

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MAURÍCIO ZARDO OLIVEIRA

**Estabilidade Robusta de Sistemas Lineares em
Tempo Discreto Sujeitos a Atraso no Estado**

Porto Alegre, abril de 2008

MAURÍCIO ZARDO OLIVEIRA

Estabilidade Robusta de Sistemas Lineares em Tempo Discreto Sujeitos a Atraso no Estado

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas de Energia

Orientador: Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho

Porto Alegre, abril de 2008

"Se fiz descobertas valiosas, foi mais por ter paciência do que qualquer outro talento."

Isaac Newton

Agradecimentos

Agradeço:

ao professor Dr. Daniel Ferreira Coutinho, pelo apoio durante todo período de orientação, por compartilhar seu conhecimento e por contribuir de forma dedicada e compreensiva para este trabalho.

aos professores Dr. Luís Fernando Alves Pereira e Dr. Sérgio Luís Haffner, pelo exemplo de profissionalismo;

aos colegas e amigos Lucas Lorensi dos Santos, Gustavo Kaefer Dill, Marcelo Mallmann Dias, Alex Bernsts Tronchoni e Leonardo Varaschin Gasperin;

à todos amigos do *GACS*;

aos meus pais, pela credibilidade e pelo apoio incondicional;

à Ana Paula, pela companhia e paciência;

à *CAPES*, pelo imprescindível apoio financeiro;

às demais pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para que eu pudesse desenvolver este trabalho.

**Estabilidade Robusta de Sistemas Lineares em Tempo Discreto Sujeitos a
Atraso no Estado**

por

Maurício Zardo Oliveira

Submetido ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
em Fevereiro de 2008, como requisito parcial
para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica

Resumo

Esta dissertação aborda o problema de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares discretos sujeitos a atraso de transporte e incertezas paramétricas que podem aparecer de forma racional na representação por espaço de estados do sistema. As condições de estabilidade são baseadas em funcionais de Lyapunov-Krasovskii e são obtidas através da aplicação de decomposições não lineares de funções vetoriais racionais. As condições de estabilidade propostas podem ser dependentes e independentes do atraso e são expressas através de desigualdades matriciais lineares (ou LMIs).

Robust Stability of Discrete-Time Linear Systems with State Delay

by

Maurício Zardo Oliveira

Submitted to the Graduate Program of Electrical Engineering of
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
on February, 2008, in partial fulfillment of the
requirements for the degree of
Master of Engineering

Abstract

This Master thesis addresses the robust stability analysis problem of uncertain discrete-time linear systems subject to state delay, where the system state-space representation is allowed to be a rational function of the uncertain parameters. The stability conditions are obtained from Lyapunov-Krasovskii functionals with polynomial parameter dependence by means of nonlinear decompositions of rational vector functions. The proposed results are divided into delay dependent and delay independent, and they are expressed in terms of linear matrix inequalities (LMIs) constraints.

Índice

Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Lista de Acrônimos e Notação	xi
1 Introdução	1
2 Conceitos Básicos	5
2.1 Estabilidade por Lyapunov	5
2.1.1 Estabilidade Quadrática	10
2.1.2 Estabilidade de Sistemas Discretos	12
2.2 Sistemas com Atraso	13
2.2.1 Lyapunov-Krasovskii	15
2.2.2 Razumikhin	16
2.2.3 Funcionais de Lyapunov-Krasovskii	17
2.3 Sistemas Incertos	19
2.3.1 Incertezas Politópicas	20

2.3.2	Representação por Diferenças Algébricas	24
2.3.3	Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)	26
2.3.4	Complemento de Schur	27
2.3.5	Lema de Finsler	28
3	Estabilidade Independente de Parâmetros	30
3.1	Estabilidade Independente do Atraso	31
3.2	Estabilidade Dependente do Atraso	35
3.3	Exemplos Numéricos	41
4	Estabilidade Dependente de Parâmetros	45
4.1	Estabilidade Independente do Atraso	46
4.2	Estabilidade Dependente do Atraso	54
4.3	Exemplo Numérico	62
5	Conclusões e Perspectivas	66
5.1	Considerações Finais	66
5.2	Trabalhos Futuros	68
	Referências	69
A	Exemplos	74
A.1	Exemplo 4	74
A.1.1	Exemplo 4.1	74
A.1.2	Exemplo 4.2	75
A.2	Exemplo 5	77
A.3	Exemplo 6	77
A.4	Exemplo 7	78

Lista de Figuras

2-1	Estabilidade assintótica e no sentido de Lyapunov	8
2-2	Sistema sujeito a diferentes atrasos τ	15
2-3	Conjunto politópico com vértices v_i , para $i=1,\dots,5$	20
3-1	Sistema instável com atraso de transporte $\tau = 59$	43
4-1	Valores admissíveis para $ \lambda_1 $ e $ \lambda_2 $	65

Lista de Tabelas

4.1	Valores admissíveis para o vetor de parâmetros incertos.	65
-----	--	----

Lista de Acrônimos e Notação

\star	Indica bloco simétrico nas LMIs
∞	Infinito
$:=$	Definido como
$[a, b)$	Intervalo real, fechado em a e aberto em b
ϕ_k	Seqüencia de valores iniciais de $x(k)$ $k \in [-\tau, 0]$
$\tilde{\phi}_k$	Seqüencia de valores iniciais de $\lambda(k)$ para $k \in [-\tau, 0]$
$\text{He}\{P\}$	Representa $P + P'$
I_n	Matriz identidade de dimensão $n \times n$
λ	Vetor de parâmetros incertos
Λ	Politopo
<i>LMI</i>	<i>Linear Matrix Inequality</i> (desigualdade matricial linear)
$\max\{\cdot\}$	Valor máximo de $\{\cdot\}$
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
0_n	Matriz de zeros com dimensão $n \times n$
$0_{n \times m}$	Matriz de zeros com dimensão $n \times m$
P'	Matriz transposta de P
$P > 0$	Matriz simétrica definida positiva
$P \geq 0$	Matriz simétrica semi-definida positiva

$P < 0$	Matriz simétrica definida negativa
$P \leq 0$	Matriz simétrica semi-definida negativa
\Re	Conjunto dos números Reais
\Re^n	Conjunto de vetores de dimensão n , cujos elementos pertencem ao conjunto dos números reais
$f : \Re^n \mapsto \Re^m$	Função f mapeia o conjunto \Re^n no conjunto \Re^m
τ	Atraso de transporte
$\bar{\tau}$	Atraso de transporte máximo
$\mathcal{V}(\Lambda)$	Conjunto de todos os vértices de Λ
x_k	Seqüência de valores de $x(k)$ para $k \in [k - \tau, k]$
$ \cdot $	Valor absoluto ou módulo de um número real
$\ x\ _2$	Norma-2 ou Euclideana
$x(t)$	Vetor de estados
\dot{x}	Derivada do vetor de estados
x_0	Vetor de estados iniciais
$x(t_0)$	Vetor de estados iniciais no instante t_0
$x(k)$	Vetor de estados em tempo discreto avaliado no instante k
$x(k + 1)$	Vetor de estados em tempo discreto avaliado no instante $k+1$
$x(k - \tau)$	Vetor de estados em tempo discreto avaliado no instante $k - \tau$

Capítulo 1

Introdução

Modelos de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas e atrasos de transporte são amplamente encontrados em diversas áreas de conhecimento, como por exemplo, matemática, engenharia, física, economia e biologia [19]. Nestes sistemas, suas incertezas devem ser modeladas para garantia de estabilidade de sistemas de controle. Além disso, a presença do atraso de transporte compromete as características dinâmicas do sistema, prejudicando sua performance [37], além de ser fontes de oscilações [24, 30, 40]. Sendo assim, desconsiderar o efeito da fase do atraso de transporte no projeto de um controlador pode prejudicar a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada.

Recentemente, o estudo de sistemas com atraso tem despertado grande interesse na área de pesquisa de sistemas de controle e vários métodos de análise e síntese têm sido desenvolvidos com o passar dos anos [24, 40, 37]. Assim como no caso de sistemas incertos sem a presença do atraso, técnicas baseadas em conceitos de estabilidade quadrática têm se mostrado efetivas para lidar com estes problemas [40]. Porém, em alguns casos a estabilidade quadrática pode levar a resultados bastante conservadores [27]. Uma das formas de se contornar este problema é através da utilização de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.

No caso de sistemas em tempo discreto, uma das formas mais naturais para tratar o atraso de

transporte é através da inclusão de novos estados no sistema [31]. Entretanto, para sistemas com grandes atrasos de transporte ou quando o atraso é várias vezes superior à taxa de amostragem, estes sistemas podem possuir uma dimensão muito grande e a inserção de novos estados resulta em um sistema de elevada ordem. Isto aumenta a complexidade ou até mesmo impossibilita a utilização de técnicas de otimização convexa na solução de problemas de controle. Outro problema que ocorre é quando o atraso não é perfeitamente conhecido e existe a dificuldade de obter-se uma representação sem o atraso [31, 21]. Geralmente, nestes casos utilizam-se condições suficientes para provar a estabilidade de sistemas sujeitos a atrasos de transporte de maneira similar ao caso contínuo [19].

Trabalhos realizados utilizando tais conceitos são usualmente descritos de duas formas: independente e dependente do atraso [3, 24, 37, 30]. A condição independente do atraso verifica estabilidade do sistema para qualquer valor do atraso de transporte, enquanto que a condição dependente do atraso é menos conservadora, pois o sistema é estável desde que o atraso de transporte não ultrapasse um determinado valor [21]. Tais condições são baseadas em diferentes modelos e transformações, e o sistema é geralmente descrito em termos de equações de diferenças funcionais levando aos conceitos de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii e Lyapunov-Razumikhin [19, 37]. Para utilizar-se tais conceitos, uma das formas mais empregadas para a determinação da estabilidade do sistema é a descrição do problema em termos de desigualdades lineares matriciais, ou LMIs (*Linear Matrix Inequalities*).

LMIs são utilizadas em vários problemas práticos específicos em engenharia de controle, tendo como principal vantagem a solução de forma convexa [2]. Como uma LMI pode ser representada de diversas formas e dificilmente ela está representada em sua forma afim, é necessária a utilização de alguns métodos de conversão. Pode-se citar o uso do complemento de Schur que é amplamente aplicado neste sentido, bem como o Lema de Finsler que permite obter formulações equivalentes para testes de LMIs e a inserção de restrições [2, 8]. Com o passar dos anos, novas técnicas e teoremas foram desenvolvidos a fim de facilitar sua resolução e aplicação. Atualmente

existem diversos softwares capazes de solucionar LMIs de forma satisfatória, como por exemplo, *LMI Control Toolbox* [18] para *MatLab*.

Nota-se que a descrição do problema em termos de LMIs tem sido uma das abordagens mais empregadas para a obtenção de condições de análise e síntese de controle para sistemas com atraso, sendo que grande parte destes resultados foram desenvolvidos para sistemas em tempo contínuo, como por exemplo, as referências [16, 32]. Contudo, é conveniente desenvolver condições de estabilidade para sistemas em tempo discreto, visando implementações digitais em tempo real [21].

Apesar do apelo prático, poucos métodos foram desenvolvidos para sistemas discretos com atraso. Alguns exemplos de resultados são apresentados em [14, 15, 24, 14] que utilizam uma representação da dinâmica do sistema através de modelos de sistemas descritores (incluindo a classe de sistemas neutrais), e em [40] onde são propostas condições de estabilidade independentes do atraso para sistemas descritos por lógica difusa. Ainda pode-se citar condições dependentes do atraso propostas em [21] e [36] que apresentam critérios de estabilidade e estabilização quadrática. Outros trabalhos também foram desenvolvidos para controle desta classe de sistemas, como por exemplo, controle via custo garantido em [3], controle robusto em [22] e controle de sistemas chaveados em [37].

Ao mesmo tempo, salienta-se que vários esforços têm sido realizados com o objetivo de reduzir o conservadorismo das condições de estabilidade. Em especial, estes esforços têm sido direcionados na busca de técnicas dependentes de parâmetros para determinar a estabilidade de sistemas com incertezas de forma politópica [16]. Segundo esta abordagem, um dos problemas encontrados é quando o vetor de incertezas não aparece de forma afim nas matrizes do sistema. Nos últimos anos, várias formulações convexas para o problema foram propostas na literatura como o conceito de multi-convexidade [12], estabilidade bi-quadrática [33], estabilidade estendida [8], entre outras. Um exemplo deste problema ocorre em modelos discretos provenientes da discretização de sistemas contínuos quando utilizam-se transformações bi-lineares ou

do tipo *backward* [13], resultando em matrizes do sistema com dependência racional no vetor de parâmetros. Uma possível formulação para este caso é através da utilização da representação por diferenças algébricas (denominada de representação DAR) [6], pois permite modelar toda a classe de funções vetoriais racionais na incerteza.

Resultados para determinar condições que asseguram a estabilidade robusta de sistemas lineares em tempo discreto sujeitos a atrasos de transporte são apresentados nesta dissertação. Tais resultados consideram condições dependentes e independentes do atraso e com o objetivo de reduzir o conservadorismo são estendidos para condições dependentes de parâmetros. As condições propostas são expressas em termos de restrições LMIs obtidas a partir de funcionais de Lyapunov-Krasovskii.

Descrição dos Capítulos

Primeiramente, no Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento dos resultados principais desta dissertação. No Capítulo 3, são expostas as formulações LMIs para tratar o problema de análise de estabilidade de sistemas discretos sujeitos a atraso no estado, considerando funcionais de Lyapunov-Krasovskii quadráticos. Neste capítulo também ilustra-se a aplicação da metodologia proposta através de exemplos numéricos. No Capítulo 4, as formulações LMIs do Capítulo 3 são estendidas para funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes do vetor de parâmetros. Da mesma forma, um exemplo ilustra a aplicação. As considerações finais e propostas futuras são apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento dos resultados principais desta dissertação. Este conceitos fundamentais são mostrados de forma resumida neste capítulo e portanto exigem um certo conhecimento dos temas abordados. Caso necessário, o leitor pode obter maiores detalhes e informações nas seguintes referências: teoria de Lyapunov [20], desigualdades matriciais lineares (LMIs) [2], sistemas incertos [10] e sistemas com atraso [19].

2.1 Estabilidade por Lyapunov

A estabilidade de um sistema pode ser caracterizada pela energia do sistema. Em outras palavras, se a energia de um sistema tende a zero quando o tempo tender ao infinito, então o sistema é dito assintoticamente estável. Os métodos de Lyapunov possuem a habilidade de verificar a estabilidade através de uma função escalar que procura descrever a energia do sistema. Se esta função, conhecida como função de Lyapunov, for positiva e decrescente, pode-se concluir que o sistema é assintoticamente estável. A verificação da estabilidade de um sistema pode ser realizada através dos métodos indireto ou direto (segundo método de Lyapunov) [20].

Pelo segundo método de Lyapunov verifica-se a estabilidade sem solucionar o conjunto de

equações diferenciais que descrevem o sistema. Sua limitação está em determinar uma função de Lyapunov que caracterize a estabilidade. Caso a função seja encontrada, a estabilidade está verificada, porém em caso contrário, nada pode-se afirmar a respeito da estabilidade do sistema. Ressalta-se que o método direto de Lyapunov pode ser aplicado a sistemas forçados e não forçados, lineares e não-lineares, estacionários ou variantes no tempo, determinísticos ou estocásticos [9].

Em contrapartida, o método indireto de Lyapunov verifica a estabilidade do sistema determinando se a aproximação linear do sistema em torno do ponto de equilíbrio é estável. Desta forma, pelo método indireto a estabilidade do sistema é caracterizada localmente, isto é, em uma região em torno do ponto de equilíbrio. Enquanto que a resposta de sistemas não-lineares é limitada ou não-limitada, talvez dependa de condições iniciais ou das condições forçadas do sistema e ainda pode possuir oscilações em torno de um valor constante de pico, em sistemas lineares invariantes no tempo o sistema é estável ou instável, independente das condições iniciais ou das entradas do sistema [9].

A seguir são apresentadas algumas definições importantes para conceituar estabilidade com base no seguinte sistema não-linear:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Teorema 1 (Existência e Unicidade [20]) *A partir do sistema (2.1) e sendo $f(x, t)$ contínua por partes em t , tal que satisfaça a condição de Lipschitz, dada por*

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{B}(r), \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{B}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r, r > 0\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Então existe algum $\delta > 0$ tal que a

equação (2.1) tenha uma única solução no intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$.

Definição 1 (Ponto de equilíbrio) *Para o sistema (2.1), x_e é definido como um ponto de equilíbrio se $f(x_e, t) \equiv 0, \forall t \geq 0$.*

Em geral, supõe-se que o ponto de equilíbrio do sistema seja a origem. Porém caso isto não aconteça, pode-se transladar o ponto de equilíbrio x_e à origem fazendo com que o 0 seja o ponto de equilíbrio do sistema transladado [28].

Definição 2 (Estabilidade) *O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito ponto de equilíbrio estável se $\forall t_0 \geq 0$ e $\epsilon > 0$, exista um $\delta(t_0, \epsilon)$ tal que*

$$\|x_0\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

onde $x(t)$ é a solução do sistema partindo de x_0 até t_0 .

Esta definição de estabilidade requer que as trajetórias iniciadas dentro da região representada por $\mathcal{B}(\delta)$ de raio δ não ultrapassem a região $\mathcal{B}(\epsilon)$ de raio ϵ , centrada no ponto de equilíbrio x_e .

Definição 3 (Estabilidade uniforme) *O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito ponto de equilíbrio uniformemente estável se $\delta = \delta(\epsilon)$, isto é, se δ pode ser definido independentemente de t_0 .*

Definição 4 (Estabilidade assintótica) *O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito ponto de equilíbrio assintoticamente estável se*

- $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável,
- $x = 0$ é atrativo, isto é, para todo $t_0 \geq 0$ existe um $\delta(t_0)$ tal que

$$\|x_0\| < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0.$$

A Definição 2 de estabilidade e o conceito de estabilidade assintótica são ilustradas, segundo [9], através da figura 2-10.

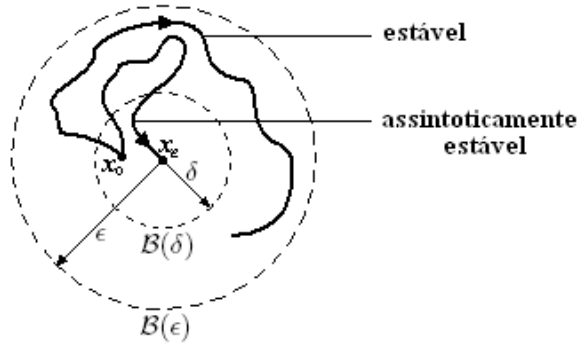


Figura 2-1: Estabilidade assintótica e no sentido de Lyapunov

Definição 5 (Estabilidade uniforme assintótica) *O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável se*

- $x = 0$ é um ponto de equilíbrio uniformemente estável,
- As trajetórias de $x(t)$ convergem uniformemente a 0, ou seja, existe $\delta > 0$ e uma função $\gamma(t, x_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_n \mapsto \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t, x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathcal{B}(\delta)$ e

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \gamma(t - t_0, x_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

As definições anteriores referem-se a estabilidade local, ou seja, nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. Conceitos de estabilidade global são mostrados a seguir.

Definição 6 (Estabilidade global assintótica) *O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável se é estável e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Definição 7 (Estabilidade global uniforme assintótica) *O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito ponto de equilíbrio global, uniforme e assintoticamente estável se é globalmente assintoticamente estável*

e a convergência para a origem é uniforme no tempo, ou seja, existe uma função $\gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|x(t)\| \leq \gamma(t - t_0, x_0), \quad \forall t \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 8 (Estabilidade exponencial [20]) *O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito ponto de equilíbrio exponencialmente estável se existir um λ e uma estimativa da taxa de convergência $\alpha > 0$ tal que*

$$\|x(t)\| \leq \lambda e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|, \quad \forall \|x(t_0)\| \leq \epsilon \text{ e } t \geq t_0.$$

A seguir, apresentam-se alguns conceitos importantes na análise de estabilidade de sistemas através do método direto de Lyapunov.

Definição 9 (Função definida positiva) *Sendo $x = 0$ o ponto de equilíbrio de (2.1), $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ uma região contendo $x = 0$ e $V : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável tal que*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \\ V(x) &> 0, \quad \text{para } x \neq 0 \text{ e } \mathcal{D} - \{0\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

então a função $V(x)$ é dita ser definida positiva e \mathcal{D} é o domínio de $V(x)$.

Definição 10 (Função semi-definida positiva) *Sendo $x = 0$ o ponto de equilíbrio de (2.1), $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ a região contendo $x = 0$ e $V : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável tal que*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \\ V(x) &\geq 0, \quad \text{para } x \neq 0 \text{ e } \mathcal{D} - \{0\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

então a função $V(x)$ é chamada de semi-definida positiva.

As definições 9 e 10 também são válidas para funções definidas e semi-definidas negativas, substituindo $V(x) > 0$ e $V(x) \geq 0$ por $V(x) < 0$ e $V(x) \leq 0$ respectivamente.

Com base nos conceitos definidos acima, apresenta-se o seguinte resultado que caracteriza a estabilidade pelo método direto de Lyapunov [20].

Teorema 2 (Estabilidade por Lyapunov) *Seja $V : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}_+$ uma função positiva definida no domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem e a derivada de V em torno das trajetórias de (2.1), denotada por \dot{V} e dada por*

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \quad (2.5)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (2.6)$$

então, se $\dot{V}(x)$ é semi-definida negativa ($\dot{V}(x) \leq 0$), a trajetória $x(t)$ é estável. Caso $\dot{V}(x)$ seja definida negativa ($\dot{V}(x) < 0$) o sistema é assintoticamente estável.

2.1.1 Estabilidade Quadrática

O método de Lyapunov consiste na busca de uma função de Lyapunov definida positiva, cuja derivada seja definida negativa para todas as trajetórias do sistema.

Uma das funções candidatas a função de Lyapunov mais utilizadas é a função quadrática definida da seguinte maneira:

$$V(x) = x'Px = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}x_i x_j, \quad (2.7)$$

onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica, ou seja, $P = P'$, cujos elementos são p_{ij} e x_i, x_j são os elementos do vetor de estados x [20].

Para que $V(x)$, dada por (2.7), seja definida positiva é necessário que a matriz P seja definida

positiva ($P > 0$), isto é, todos os autovalores de P sejam reais e maiores que zero¹. A estabilidade de um sistema será caracterizada se a derivada de $V(x)$ for (semi-)definida negativa.

Para ilustrar a aplicação do método de Lyapunov, considere o seguinte sistema linear:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.8)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados do sistema e A é uma matriz de dimensão apropriada.

A derivada de $V(x)$ em torno das trajetórias do sistema (2.8) é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x'P\dot{x} + \dot{x}'Px = 2x'P\dot{x} \\ &= x'PAx + x'A'Px \\ &= x'(PA + A'P)x \end{aligned} \quad (2.9)$$

Relembrando, pelo Teorema 2, se $V(x)$ é definida positiva e $\dot{V}(x)$ é definida negativa, conclui-se que o sistema é assintoticamente estável, ou seja, todos os autovalores de A tem a parte real menor que 0 [20]. Quando $V(x)$ é uma função quadrática, a análise de estabilidade traduz-se a: (i) se P é definida positiva, então $V(x)$, é definida positiva, e (ii) se a matriz $PA + A'P$ for definida negativa, então, $\dot{V}(x)$ é definida negativa. Em outras palavras, as condições do Teorema 2 estão satisfeitas, logo, o sistema é estável e os estados convergem para a origem [28].

De forma resumida, para que o sistema seja estável, busca-se uma matriz $P = P'$ definida positiva tal que a matriz $PA + A'P$ seja definida negativa. Este problema pode ser reescrito dentro da formulação conhecida como Desigualdades Matriciais Lineares (ou LMIs, do termo em inglês *Linear Matrix Inequalities* [2]). Utilizando pacotes computacionais como *LMI Control Toolbox* [18] e *SeDuMi* [29], a formulação LMI permite determinar numericamente problemas na

¹O mesmo vale no caso de $V(x)$ ser semi-definida positiva, porém os autovalores de P são semi-definidos positivos, logo ($P \geq 0$).

forma:

$$P = P' > 0 \mid A'P + PA < 0, \quad (2.10)$$

onde P é a variável de decisão.

Com a utilização do problema definido em (2.10), a verificação de estabilidade do sistema (2.8) reduz-se a um teste de factibilidade LMI. Ressalta-se que para sistemas lineares invariantes no tempo, o teste de estabilidade em (2.10) é uma condição necessária e suficiente. Mas, em geral, para sistemas dinâmicos, as condições de estabilidade de Lyapunov são apenas suficientes.

2.1.2 Estabilidade de Sistemas Discretos

Conceitualmente, os resultados apresentados para sistemas contínuos são utilizados de forma natural em sistemas discretos. Entretanto, devido à descontinuidade da trajetória dos estados as condições de estabilidade por Lyapunov são caracterizadas pela busca de função $V(x)$ definida positiva tal que a sua variação

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

seja definida negativa.

Especificamente para sistemas lineares, a representação discreta da equação (2.8) é definida da seguinte maneira:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (2.11)$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Utilizando-se a forma quadrática definida em (2.7) como função de Lyapunov, a análise de estabilidade por Lyapunov consiste na busca de uma matriz simétrica definida positiva P tal

que

$$\begin{aligned}
 \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\
 &= x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) \\
 &= x(k)'A'PAx(k) - x(k)'Px(k) \\
 &= x(k)'(A'PA - P)x(k)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

seja definida negativa.

Logo, para provar a estabilidade em sistemas discretos é suficiente que $V(x(k)) > 0$ e $\Delta V(x(k)) < 0$, isto é, pela formulação LMI:

$$P = P' > 0 \mid A'PA - P < 0. \tag{2.13}$$

Para o caso particular acima, as condições de Lyapunov são necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica do sistema [25]. Observa-se, também, que os testes para verificação de estabilidade são transformados em um problemas de factibilidade LMI de maneira similar ao caso contínuo.

2.2 Sistemas com Atraso

Atrasos de transporte são freqüentemente encontrados em diversos sistemas na engenharia, comunicação e biologia e a presença destes afeta significativamente as características dinâmicas do sistema, prejudicando o desempenho [37] e sendo fontes de instabilidade e de oscilações [24, 30, 40]. Entretanto o estudo de sistemas com atraso têm recebido muita atenção e vários métodos de análise e síntese tem sido desenvolvidos com o passar dos anos [40, 37].

Além disso, quando o atraso não é perfeitamente conhecido ou quando a incerteza é variante no tempo, existe uma dificuldade em representar um sistema equivalente sem o atraso [31].

No caso discreto, o problema de estabilidade em sistemas com atraso pode ser facilmente contornado através da inserção de uma dinâmica adicional na (matriz) função de transferência

do sistema [31], como abaixo

$$\begin{aligned}
 zX(z) - X_0 &= AX(z) + z^{-\tau}A_dX(z) \\
 X_0 &= (zI - A - z^{-\tau}A_d)X(z) \\
 X(z) &= (zI - A - z^{-\tau}A_d)^{-1}X_0.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Contudo, em muitas situações, esta solução não é adequada ou até mesmo não pode ser aplicada. Por exemplo, em sistemas nos quais o atraso de transporte é várias vezes superior à taxa de amostragem, a inserção da dinâmica adicional resulta em um sistema de elevada ordem, o que dificulta a utilização de técnicas de otimização convexa na solução de problemas de controle. Por outro lado, quando o atraso não é perfeitamente conhecido ou quando o atraso é variante no tempo, existe a dificuldade de obter-se uma representação sem o atraso [31, 21]. Nestes casos, a análise de estabilidade é realizada em termos de equações de diferenças funcionais levando aos conceitos de estabilidade de Razumikhin e Lyapunov-Krasovskii [19, 37], sendo a descrição do problema em termos de desigualdades lineares matriciais uma das formas mais utilizadas para a determinação da estabilidade do sistema.

O desenvolvimento de métodos utilizando tais conceitos usualmente são descritos de duas formas: dependente e independente do atraso [24, 37, 30] e geralmente o caso de estabilidade dependente do atraso é considerado menos conservativo do que o caso de estabilidade independente do atraso [21].

A classe de sistemas lineares discretos com atraso a ser considerada nesta dissertação é descrita pela equação:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= Ax(k) + A_dx(k-\tau) \\
 x(k) &= \phi_k, \forall k \in [-\bar{\tau}, 0]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $x(k), x(k-\tau) \in \mathfrak{R}^n$ são os vetores de estados sem e com atraso, respectivamente, A e $A_d \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $\tau \leq \mathfrak{R}$ é um número inteiro positivo representando o atraso de transporte com $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, onde $\bar{\tau}$ é o atraso máximo. O conceito de estado inicial $x(0)$ é substituído pela seqüência de valores iniciais ϕ_k entre $-\tau$ e 0.

A Figura 2-2 ilustra um exemplo, proposto em [21], de um sistema linear discreto dado por (2.15), sujeito a diferentes atrasos de transporte nos estados. Para este caso, as matrizes A e A_d são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.91 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

onde os estados foram sujeitos aos atrasos $\tau = 0$, $\tau = 30$ e $\tau = 100$ e a trajetória vista na Figura 2-2 corresponde ao estado x_2 .

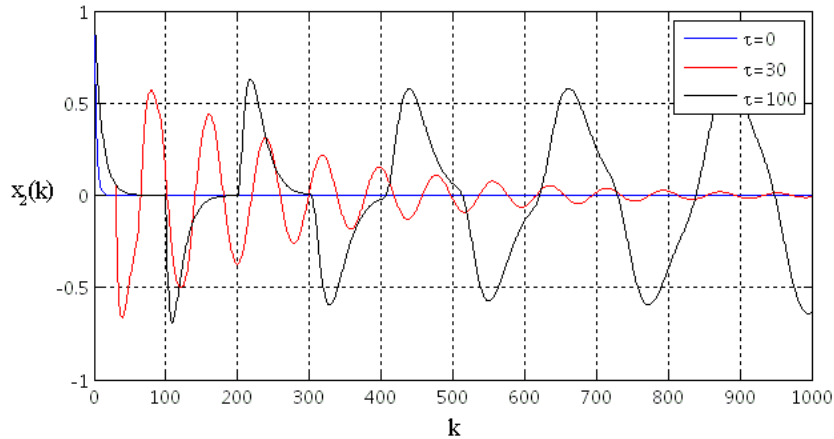


Figura 2-2: Sistema sujeito a diferentes atrasos τ

Nota-se que o sistema é estável sem atraso ($\tau = 0$). Quando o atraso é inserido, a performance do sistema é prejudicada ($\tau = 30$) ou ainda pode tornar o sistema instável ($\tau = 100$).

A seguir são apresentados conceitos de Lyapunov-Krasovskii e Razumikhin para a determinação da estabilidade de sistemas com atraso.

2.2.1 Lyapunov-Krasovskii

Para sistemas sem a presença de atraso de transporte, um efetivo método para determinar estabilidade de sistemas é o método de Lyapunov [19]. Como visto anteriormente, busca-se uma função de Lyapunov $V(x(k))$, que quantifica o desvio entre os estados e a solução trivial 0. Para sistemas com a presença de atrasos de transporte, a análise de estabilidade é determinada

seguindo o mesmo princípio, porém o conceito de estado inicial é substituído por uma seqüência inicial $x(\theta)$ no intervalo $\theta \in [-\tau, 0]$ representada por ϕ_k . Logo, para sistemas com atraso, busca-se um funcional $V(x_k)$ dependente de ϕ_k , medindo assim o desvio entre a seqüência x_k e a solução trivial 0. Este método é conhecido como Lyapunov-Krasovskii, e $V(x_k)$ é denominado de funcional de Lyapunov-Krasovskii. O seguinte Teorema caracteriza a estabilidade por Lyapunov-Krasovskii [19].

Teorema 3 (Lyapunov-Krasovskii [19]) *Considere o sistema (2.15). Se existem um funcional $V(x_k)$ contínuo e escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 , tal que as condições em (2.16) são satisfeitas, então o sistema é assintoticamente estável.*

$$\begin{aligned}\epsilon_1 \|\phi(0)\|^2 &\leq V(x_k) \leq \epsilon_2 \|\phi_k\|_\tau^2, \\ \Delta V(x_k) &\leq -\epsilon_3 \|\phi(0)\|^2,\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde

$$\Delta V(x_k) := V(x(k+1)) - V(x(k)).$$

2.2.2 Razumikhin

O método Lyapunov-Krasovskii necessita de variáveis de estado $x(k)$ no intervalo $[k, k - \tau]$ e requer manipulação de funcionais, o que, conseqüentemente, faz sua aplicação ser de complexa implementação, dependendo do processo envolvido. Tais dificuldades são muitas vezes contornadas utilizando-se do teorema de Razumikhin, que envolve somente funções ao invés de funcionais [19].

A idéia geral deste teorema consiste em utilizar uma função $V(x(k))$, que representa o tamanho de $x(k)$. No caso de sistemas com a presença do atraso de transporte é necessário mensurar o tamanho x_k , que é realizado da seguinte maneira:

$$\bar{V}(x_k) = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} V(x(k + \theta))\tag{2.17}$$

Se $V(x(k)) < \bar{V}(x_k)$, não é necessário que $\Delta V(x) < 0$, pois $\Delta V(x) > 0$ não faz $\Delta \bar{V}(x_k)$ divergir. Sendo assim, para $\bar{V}(x_k)$ não aumentar, somente é necessário que $\Delta V(x(k))$ não seja definida positiva sempre que $V(x(k)) \geq \bar{V}(x_k)$.

Teorema 4 (Razumikhin [19]) *Considere o sistema (2.8). Se existe uma função $V(x(k))$ contínua e escalares positivos $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ e ϵ_4 , tal que sejam satisfeitas as condições*

$$\epsilon_1 \|x\|^2 \leq V(x(k)) \leq \epsilon_2 \|x\|_\tau^2, \quad (2.18)$$

$$\Delta V(x(k)) \leq -\epsilon_3 \|x(k)\|^2, \quad \text{se } V(x(t+\theta)) \leq \epsilon_4(V(x(t))), \quad (2.19)$$

então o sistema é assintoticamente estável para $\theta \in [-\tau, 0]$.

2.2.3 Funcionais de Lyapunov-Krasovskii

O estudo de estabilidade de sistemas com atraso pode ser realizado de duas maneiras: independente ou dependente do atraso presente [24, 37, 30]. Utilizando-se de condições independentes, o valor do atraso não aparece explicitamente nas condições de teste de estabilidade. Sendo assim, presume-se que o atraso possa assumir qualquer valor dentro do intervalo $[0, \infty)$. Pela abordagem dependente do atraso, preocupa-se em verificar intervalos de valores de atraso onde o sistema seja estável. Neste caso os testes de estabilidade contém este atraso e busca-se um intervalo $\theta \in [0, \bar{\tau}]$ onde $\bar{\tau}$ é o atraso máximo permitido.

Estabilidade Independente do Atraso

Provavelmente uma das formas mais simples para critério de estabilidade do sistema discreto com atraso (2.15) pode ser obtida através de funcionais de Lyapunov-Krasovskii definidos da seguinte forma:

$$V(x_k) = V_1(x) + V_2(x_k), \quad (2.20)$$

onde

$$V_1(x) = x(k)'Px(k), \quad (2.21)$$

$$V_2(x_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)'Qx(r), \quad (2.22)$$

com P e Q sendo matrizes simétricas e definidas positivas a serem determinadas [19].

A variação de $V(x_k)$, denominada $\Delta V(x_k)$, é determinada através da seguinte relação

$$\Delta V(x_k) = \Delta V_1(x) + \Delta V_2(x_k), \quad (2.23)$$

onde

$$\Delta V_1(x(k)) = x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k), \quad (2.24)$$

$$\Delta V_2(x_k) = \sum_{r=k-\tau+1}^k x(r)'Qx(r) - \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)'Qx(r), \quad (2.25)$$

e, portanto,

$$\Delta V(x_k) = x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'(P-Q)x(k) - x(k-\tau)'Qx(k-\tau). \quad (2.26)$$

Se $V(x_k)$ é positiva definida e $\Delta V(x_k)$ é negativa definida, pode-se concluir que o sistema é assintoticamente estável.

Estabilidade Dependente do Atraso

O funcional de Lyapunov-Krasovskii para obter-se condições de estabilidade dependentes de atraso pode ser dado por

$$V(x_k) = V_1(x) + V_2(x_k) + V_3(x_k), \quad (2.27)$$

onde V_1 e V_2 são como em (2.24) e (2.25), respectivamente, e

$$V_3(x_k) = \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k-1+\rho}^{k-1} y(r)' S y(r), \quad (2.28)$$

com S sendo uma matriz constante e simétrica a ser determinada e

$$y(r) = x(r+1) - x(r), \quad \forall r. \quad (2.29)$$

De maneira similar aos funcionais independentes do atraso, a variação de $V_3(x_k)$, i.e. $\Delta V_3(x_k)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta V_3(x_k) &= \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k+\rho}^k y(r)' S y(r) - \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k+\rho-1}^{k-1} y(r)' S y(r) \\ &= \tau y(k)' S y(k) - \sum_{r=k-\tau}^{k-1} y(r)' S y(r) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se $V(x_k)$ é positiva definida e $\Delta V(x_k)$ é negativa definida, pode-se concluir que o sistema é assintoticamente estável para todo $\tau \in [0, \bar{\tau}]$.

2.3 Sistemas Incertos

Recentemente problemas de estabilidade robusta e estabilização robusta para sistemas incertos com atraso têm sido estudados. Similarmente ao caso de sistemas incertos que não possuam atrasos, técnicas baseadas em conceitos de estabilidade quadrática e estabilização quadrática têm se mostrado efetivas para se lidar com estes problemas [40].

Na prática, diversos sistemas possuem parâmetros incertos, que também devem ser modelados para garantir a estabilidade do projeto de controle. Tais parâmetros pode ser inseridos para simplificação do modelo ou representam incertezas reais nos parâmetros.

Existem diversas formas de representar as incertezas do sistema, sendo possível citar repre-

representações lineares fracionais [38, 11], representações não-lineares fracionais [34], representação através de equações de diferenças algébricas [6, 5], bem como, a representação por incertezas politópicas [19, 26, 22, 1].

A seguir são apresentados conceitos de incertezas de forma politópica e a representação de diferenças algébricas (ou DAR) que serão utilizadas nos resultados apresentados neste trabalho.

2.3.1 Incertezas Politópicas

Um politopo pode ser definido como um conjunto de elementos que pode ser descritos como a soma convexa de um número finito de pontos, chamados de vértices deste politopo [19]. Considere um politopo Λ , que representa o conjunto admissível de um vetor de parâmetros incertos $\lambda \in \mathfrak{R}^m$ pode ser definido da seguinte maneira:

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathfrak{R}^m, v_i \in \mathfrak{R}^m, \alpha_i \in \mathfrak{R} \mid \lambda = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}, \quad (2.31)$$

onde os vetores $v_i, i = 1, \dots, N$, representam os N vértices de Λ e $\mathcal{V}(\Lambda)$ representa o conjunto de todos os vértices de Λ .

A Figura 2-3 apresenta uma interpretação gráfica para a representação do politopo, com $N = 5$.

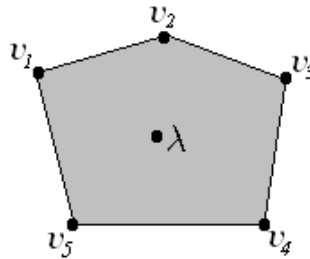


Figura 2-3: Conjunto politópico com vértices v_i , para $i=1, \dots, 5$

Supondo que o sistema (2.11) está sujeito a incertezas no modelo, representadas pelo vetor

de incertezas λ , obtém-se a seguinte representação:

$$x(k+1) = A(\lambda)x, \quad \text{para } \lambda \in \Lambda \quad (2.32)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $\lambda \in \mathfrak{R}^{n_\lambda}$ é o vetor de parâmetros incertos, Λ é o politopo conhecido representando os valores admissíveis de λ , sendo que a variação $\delta\lambda$ desses parâmetros pode ser limitada ou não (dependendo do contexto), e $A(\lambda) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é uma função matricial em λ . Nesta dissertação, assume-se que $A(\lambda)$ possa ser uma função matricial racional em λ , sendo as funções matriciais polinomiais e afins em λ casos particulares.

Por simplicidade, suponha que $A(\lambda)$ é uma função afim em λ , isto é:

$$A(\lambda) = A_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i. \quad (2.33)$$

Para verificar-se a estabilidade do sistema incerto (2.32) com (2.33) e supondo uma função de Lyapunov quadrática, pode ser utilizado o resultado apresentado em (2.13) levando-se a seguinte condição na forma de desigualdades matricias:

$$P = P' > 0 \mid A(\lambda)'PA(\lambda) - P < 0, \forall \lambda \in \Lambda. \quad (2.34)$$

As condições apresentadas acima não podem ser numericamente tratadas, pois teríamos que resolver um numero infinito de LMIs (isto é, a condição (2.34) para cada λ pertencente a Λ). No entanto, sabendo que $PP^{-1} = I$, as condições podem ser reescritas por

$$P = P' > 0 \mid A(\lambda)'PP^{-1}PA(\lambda) - P < 0, \forall \lambda \in \Lambda. \quad (2.35)$$

Desta forma é possível utilizar o resultado conhecido como *Complemento de Schur* (a ser apresentado na próxima seção), na qual a desigualdade apresentada acima pode ser reescrita na

seguinte forma:

$$P = P' > 0 \mid F(P, \lambda) = \begin{bmatrix} -P & A(\lambda)'P \\ PA(\lambda) & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (2.36)$$

Como $F(P, \lambda)$ é afim em λ , não é necessário resolver (2.36) para todo o λ em Λ , mas apenas para os valores dos vértices do politopo Λ . Desta forma, pode-se determinar a estabilidade robusta do sistema incerto (2.32) com (2.33) através de um conjunto finito de LMIs [2, 10].

De maneira similar, pode-se utilizar o procedimento acima para analisar a estabilidade robusta de sistemas com atraso no estado. Para ilustrar este procedimento, suponha que o sistema (2.32) está sujeito a um atraso de transporte τ , isto é:

$$x(k+1) = A(\lambda)x(k) + A_d(\lambda)x(k-\tau), \quad \lambda \in \Lambda, \quad (2.37)$$

onde $A_d(\lambda)$ e $A(\lambda)$ são funções matriciais afins no vetor de parâmetros incertos λ .

Como veremos no próximo capítulo, pode-se obter condições LMIs para determinar a estabilidade assintótica do sistema (2.37) utilizando um conjunto de ferramentas algébricas comuns a formulação LMI. Desta forma, é possível considerar que $A(\lambda)$ e $A_d(\lambda)$ são matrizes constantes em cada vértice de Λ e testar N condições (2.34), uma para cada vértice.

Funções de Lyapunov Dependentes de Parâmetros

Para se investigar a estabilidade, o uso das funções de Lyapunov tem sido largamente aplicados na análise de robustez, no projeto de controladores e filtros para sistemas lineares incertos. Entretanto, em alguns casos a estabilidade quadrática pode levar a resultados bastante conservadores [27]. Uma das formas utilizadas na literatura para reduzir o conservadorismo das condições baseadas em funções quadráticas é a utilização de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.

Para ilustrar o procedimento da aplicação de funções de Lyapunov dependentes dos parâme-

tros, considere o sistema apresentado em (2.32) com (2.33). Suponha que o vetor de parâmetros incertos e sua variação dada por

$$\delta\lambda(k) = \lambda(k+1) - \lambda(k), \quad (2.38)$$

são limitados a uma região politópica Λ com vértices conhecidos, isto é, $(\lambda(k), \delta\lambda(k)) \in \Lambda$, onde a notação $\lambda(k) \in \Lambda$ significa que $(\lambda(k), 0) \in \Lambda$.

Para reduzir o conservadorismo de testes de verificação de estabilidade para o sistema (2.32)-(2.33), utiliza-se uma classe de funções de Lyapunov incluindo a dependência de parâmetros na matriz P [17, 33, 12]. A forma mais comum empregada na literatura é uma função matricial $P(\lambda)$ afim em λ , isto é:

$$P(\lambda) = P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_{n_\lambda} P_{n_\lambda}, \quad (2.39)$$

onde $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n_\lambda}$ são matrizes simétricas a serem determinadas.

Aplicando diretamente a função acima em (2.36), obtém-se as seguintes desigualdades matriciais

$$P(\lambda) = P(\lambda)' > 0 \mid \tilde{F}(P_0, \dots, P_{n_\lambda}, \lambda) = \begin{bmatrix} -P(\lambda) & A(\lambda)'P(\delta\lambda + \lambda) \\ P(\delta\lambda + \lambda)A(\lambda) & -P(\delta\lambda + \lambda) \end{bmatrix} < 0. \quad (2.40)$$

Note que a condição (2.40) não é mais afim no parâmetro λ , devido ao produto $P(\delta\lambda + \lambda)A(\lambda)$ que aparece em $\tilde{F}(P_0, \dots, P_{n_\lambda}, \lambda)$. Nos últimos anos, várias formulações convexas para o problema acima foram propostas na literatura como o conceito de multi-convexidade [12], estabilidade bi-quadrática [33], estabilidade estendida [8], entre outras.

2.3.2 Representação por Diferenças Algébricas

Em diversas situações, o vetor de incertezas λ não aparece de forma afim nas matrizes do sistema. Isto ocorre principalmente em modelos discretos provenientes da discretização de sistemas contínuos quando utilizam-se transformações bi-lineares ou do tipo *backward* [13], resultando em matrizes do sistema com dependência racional no vetor de parâmetros λ .

Uma possível formulação do problema para sistemas com dependência racional na incerteza é a utilização da representação por diferenças algébricas (denominada de representação DAR). Esta representação pode modelar toda a classe de funções vetoriais racionais na incerteza, sendo equivalente à representação NFT (*nonlinear fractional transformation*) proposta em [34], contrastando com a representação politópica com dependência linear nos parâmetros normalmente utilizada para descrever sistemas incertos [26, 22].

Para introduzir esta representação, considere no sistema apresentado em (2.37) que $A(\lambda)$ e $A_d(\lambda)$ são funções matriciais racionais em λ . A representação DAR deste sistema é descrita pelas seguintes equações por diferenças algébricas [6]:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_1(\lambda)x(k) + A_2(\lambda)x(k-\tau) + A_3(\lambda)\pi(k) \\ 0 &= \Omega_1(\lambda)x(k) + \Omega_2(\lambda)x(k-\tau) + \Omega_3(\lambda)\pi(k) \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $\pi \in \mathfrak{R}^m$ é um vetor auxiliar; e $A_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $A_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $A_3 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $\Omega_1 \in \mathfrak{R}^{q \times n}$, $\Omega_2 \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ e $\Omega_3 \in \mathfrak{R}^{q \times m}$ são matrizes afins em $\lambda(k)$.

Para que a representação acima seja bem definida, a variável π pode ser eliminada da expressão (2.41) retornando ao sistema original através da seguinte relação:

$$\pi(k) = -(\Omega_3(\lambda)' \Omega_3(\lambda))^{-1} \Omega_3(\lambda)' (\Omega_1(\lambda)x(k) + \Omega_2(\lambda)x(k-\tau)) .$$

Portanto, a matriz $\Omega_3(\lambda)' \Omega_3(\lambda)$ deve ser inversível para todo $\lambda \in \Lambda$. Desta forma, assume-se em relação à representação (2.41) que:

A1 A matriz $\Omega_3(\lambda)$ tem posto completo por colunas para todo $\lambda \in \Lambda$.

Claramente, a representação politópica é um caso particular de (2.41) com $\pi = 0$. Analogamente, a representação DAR torna-se equivalente às representações LFT (*linear fractional transformation* [39]) e representações diferenciais algébricas em [5] quando as matrizes A_1, A_2 e A_3 são constantes e π é unicamente função da incerteza.

Com o objetivo de ilustrar a utilização da representação DAR, é apresentado o seguinte exemplo.

Exemplo 1 Considere o seguinte sistema escalar:

$$x(k+1) = \frac{0.5 + \lambda^2}{1 + \lambda^3} x(k) + \frac{0.1}{1 + \lambda^2} x(k - \tau) \quad (2.42)$$

Definindo o vetor auxiliar $\pi(k)$ como

$$\pi(k) = \left[\frac{x(k)}{1 + \lambda^3} \quad \frac{\lambda x(k)}{1 + \lambda^3} \quad \frac{\lambda^2 x(k)}{1 + \lambda^3} \quad \frac{x(k-\tau)}{1 + \lambda^2} \quad \frac{\lambda x(k-\tau)}{1 + \lambda^2} \right]',$$

obtem-se a representação em (2.41) com

$$A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Omega_3(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que a representação acima é bem definida pois $\text{rank}(\Omega_3(\lambda)) \neq 0$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^p$.

2.3.3 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Pode-se considerar que o estudo de LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) para sistemas dinâmicos iniciou-se em 1890 com teoria de Lyapunov [2] e desde então, são utilizadas em vários problemas práticos específicos em engenharia de controle, bem como, em problemas de filtragem e observação de estados. Com o passar dos anos, novas técnicas e teoremas foram desenvolvidos a fim de facilitar sua resolução e aplicação, e atualmente existem diversos *softwares* capazes de solucionar LMIs de forma satisfatória.

Uma LMI é genericamente descrita na forma

$$F(\xi) = F_0 + \sum_{i=1}^{\eta} \xi_i F_i > 0, \quad (2.43)$$

onde $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{\sigma \times \sigma}$ são matrizes constantes e o vetor $\xi \in \mathbb{R}^{\eta}$ representa as variáveis a serem determinadas para a resolução da desigualdade. Quando existe solução para $F(\xi) > 0$, diz-se que a LMI é factível [19]. Entretanto, a grande maioria dos problemas na teoria de controle são formulados através de desigualdades na forma matricial como apresentada em (2.13) e (2.36), onde as variáveis de decisão são matrizes e não vetores. Mas, existem *softwares* específicos (*Parsers*) como o Yalmip [23] que traduzem o problema LMI para a formulação genérica (2.43) para então utilizar-se programas de resolução LMI (chamados de *Solvers*), como o *LMI Control Toolbox* [18] e *SeDuMi* [29]

No cenário atual, vários esforços têm sido realizados para o desenvolvimento de teorias de controle através da abordagem LMI, tendo como principal vantagem a solução de forma convexa, porém, como uma LMI pode ser representada de diversas formas, dificilmente ela está representada em sua forma afim. Tais representações são contornadas através de manipulações algébricas com o intuito de convertê-las em LMIs sendo que o complemento de Schur é largamente aplicado neste sentido. Outra ferramenta útil para se trabalhar com LMIs é o Lema de Finsler que permite obter formulações equivalentes para testes de LMIs.

2.3.4 Complemento de Schur

Algumas desigualdades matriciais não-lineares convexas podem ser convertidas para a formulação LMI usando o complemento de Schur, sendo esta, uma ferramenta básica na manipulação de desigualdades matriciais [2].

Lema 1 (Complemento de Schur [10]) *Supondo que $Q = Q'$, $M = M'$ e R são matrizes reais de dimensões apropriadas. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$\begin{aligned} & i) Q > 0 \quad e \quad M - RQ^{-1}R' > 0 \\ & ii) \begin{bmatrix} M & R \\ R' & Q \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Note que o Complemento de *Schur* foi aplicado na expressão (2.35) para chegar à representação em (2.36) tornando a desigualdade matricial afim no parâmetro λ . A seguir, apresenta-se outro exemplo de aplicação do Lema 1 extraído da referência [4].

Exemplo 2 *Considere o sistema*

$$\dot{x} = A(\lambda)x, \quad z = C(\lambda)x,$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $\lambda \in \Lambda \subset \mathfrak{R}^m$ o vetor de parâmetros incertos, $z \in \mathfrak{R}^{n_z}$ representa o sinal de saída do sistema e $A(\lambda), C(\lambda)$ são matrizes afins em λ com dimensões apropriadas.

Considerando conceitos de energia do sinal de saída, sendo α o seu limitante superior, a condição de Lyapunov modificada é dada por

$$A(\lambda)'P + PA(\lambda) + \alpha^{-1}C(\lambda)'C(\lambda) < 0,$$

Aplicando o complemento de Schur em:

$$-\underbrace{(A(\lambda)'P + PA(\lambda))}_M - \underbrace{C(\lambda)'\alpha^{-1}C(\lambda)}_{RQ^{-1}R'} > 0,$$

obtem-se a seguinte desigualdade matricial afim em α e λ :

$$\begin{bmatrix} A(\lambda)'P + PA(\lambda) & C(\lambda)' \\ C(\lambda) & -\alpha I_{n_z} \end{bmatrix} < 0$$

2.3.5 Lema de Finsler

Através da utilização do Lema de Finsler é possível obter formulações equivalentes para testes de LMIs sujeitas a restrições de igualdade. Portanto, este lema é bastante útil para inserir as restrições de igualdade presentes na representação DAR levando a desigualdades matriciais sem restrições de igualdade.

Lema 2 (Lema de Finsler [8]) Sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma função simétrica, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz tal que o posto de $B < n$ e B_0 é uma base para o espaço nulo de B ($BB_0 = 0$), as seguintes condições são equivalentes:

- i) $x'Qx < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0, x \neq 0$;
- ii) $Q + LB + B'L' < 0, L \in \mathbb{R}^{m+n}$;
- iii) $B_0'QB_0 < 0,;$
- iv) $Q - \alpha B'B < 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

A seguir, apresenta-se um exemplo da aplicação do Lema de Finsler.

Exemplo 3 Considere o sistema (2.32) sendo que a representação DAR apresentada em (2.41)

sem o atraso é definida por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_1(\lambda)x(k) + A_2(\lambda)\pi(k), \\ 0 &= \Omega_1(\lambda)x(k) + \Omega_2(\lambda)\pi(k). \end{aligned}$$

Considerando que o sistema está sujeito à seguinte desigualdade

$$x'Qx < 0, \forall x \mid \begin{bmatrix} \Omega_1(\lambda) & \Omega_2(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} = 0. \quad (2.45)$$

Visando obter uma formulação LMI para o problema acima, aplica-se o Lema 2 levando à seguinte condição:

$$\begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix}' \left(\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \Omega_1(\lambda) & \Omega_2(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_1(\lambda)' \\ \Omega_2(\lambda)' \end{bmatrix} L' \right) \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} < 0,$$

a qual pode ser solucionada através da seguinte LMI (construída nos vértices do politopo Λ):

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \Omega_1(\lambda) & \Omega_2(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_1(\lambda)' \\ \Omega_2(\lambda)' \end{bmatrix} L' < 0,$$

onde L é uma nova variável de decisão introduzida pela aplicação do Lema de Finsler.

Capítulo 3

Estabilidade Independente de Parâmetros

O problema a ser abordado neste capítulo é o de determinar condições que assegurem a estabilidade robusta de sistemas lineares sujeitos a atrasos de transporte para todo $\lambda(k) \in \Lambda$. Primeiramente é apresentado o desenvolvimento do teorema para verificar a estabilidade independente do atraso τ e em seguida dependente do atraso.

A utilização dos métodos propostos neste capítulo são referentes à seguinte classe de sistemas:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(\lambda(k))x(k) + A_d(\lambda(k))x(k-\tau), \\x(k) &= \phi_k, \lambda(k) = \tilde{\phi}_k, \forall k \in [-\bar{\tau}, 0],\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $x(k-\tau) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados com atraso, $\lambda(k) \in \mathfrak{R}^{n_\lambda}$ é o vetor de parâmetros incertos, τ é um número inteiro positivo representando o atraso de transporte com $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ e $\bar{\tau}$ representando o atraso máximo, ϕ_k e $\tilde{\phi}_k$ são as seqüências de valores iniciais de $x(k)$ e $\lambda(k)$, respectivamente, entre $-\tau$ e 0. As matrizes $A(\cdot)$ e $A_d(\cdot)$ são funções racionais em $\lambda(k)$ com dimensões apropriadas e bem definidas para todo $\lambda(k) \in \Lambda$.

Com o objetivo de verificar a estabilidade, a classe de sistemas definida em (3.1) será repre-

sentada pelas equações de diferenças e algébricas (representação DAR) como definida em (2.41) [6].

3.1 Estabilidade Independente do Atraso

Conforme apresentado no capítulo anterior, uma das formas utilizadas para análise de estabilidade independente do atraso para o sistema (3.1) é obtida através de funcionais de Lyapunov-Krasovskii definidos da seguinte forma:

$$V(x_k) = V_1(x) + V_2(x_k), \quad (3.2)$$

sendo que

$$V_1(x) = x(k)'Px(k), \quad (3.3)$$

$$V_2(x_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)'Qx(r), \quad (3.4)$$

com P e Q sendo matrizes simétricas e definidas positivas a serem determinadas [19].

Para verificar a estabilidade, se $V(x_k)$ é positiva definida e $\Delta V(x_k)$ é negativa definida, pode-se concluir que o sistema é assintoticamente estável. Então, para aplicar os teoremas de Lyapunov (teorema 2) e Lyapunov-Krasovskii (teorema 3), obtém-se a seguinte expressão para a variação dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii:

$$\Delta V(k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) \quad (3.5)$$

onde

$$\Delta V_1(k) = x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k), \quad e \quad (3.6)$$

$$\Delta V_2(k) = \sum_{r=k-\tau+1}^k x(r)'Qx(r) - \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)'Qx(r). \quad (3.7)$$

A partir da equação (3.7), é possível desenvolver o somatório presente em $\Delta V_2(k)$ a fim de eliminá-lo da equação. Isto pode ser feito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) = & \left[\left(x(k-\tau+1)'Qx(k-\tau+1) + x(k-\tau+2)'Qx(k-\tau+2) + \right. \right. \\ & + x(k-\tau+3)'Qx(k-\tau+3) + \cdots + x(k-1)'Qx(k-1) + \\ & \left. \left. + x(k)'Qx(k) \right) - \left(x(k-\tau)'Qx(k-\tau) + x(k-\tau+1)'Qx(k-\tau+1) + \right. \right. \\ & + x(k-\tau+2)'Qx(k-\tau+2) + x(k-\tau+3)'Qx(k-\tau+3) + \cdots + \\ & \left. \left. + x(k-1)'Qx(k-1) \right) \right]. \end{aligned}$$

Por simplificação obtém-se:

$$\Delta V_2(k) = x(k)'Qx(k) - x(k-\tau)'Qx(k-\tau). \quad (3.8)$$

Então substituindo (3.6) e (3.8) em (3.5), a variação do funcional de Lyapunov-Krasovskii definido em (3.2) fica na forma:

$$\Delta V(k) = \left[x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) + x(k)'Qx(k) - x(k-\tau)'Qx(k-\tau) \right], \quad (3.9)$$

a qual pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\Delta V(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-\tau) \end{bmatrix}'}_{\eta_1(k)'} \underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & -P+Q & 0 \\ 0 & 0 & -Q \end{bmatrix}}_{\Pi_1(P,Q)} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-\tau) \end{bmatrix}}_{\eta_1(k)}. \quad (3.10)$$

Em (3.10) são definidas as matrizes $\eta_1(k)$ e $\Pi_1(P, Q)$, desta forma, a variação do funcional de Lyapunov-Krasovskii pode ser reescrita na seguinte forma compacta

$$\Delta V(k) = \eta_1(k)' \Pi_1(P, Q) \eta_1(k). \quad (3.11)$$

Por outro lado, os elementos $x(k+1)$, $x(k)$ e $x(k-\tau)$ do vetor auxiliar $\eta_1(k)$ são dependentes entre si e estão relacionados pela dinâmica do sistema (3.1). Esta relação pode ser vista como uma restrição referente a $\eta_1(k)$ na forma

$$0 = \begin{bmatrix} I_n & -A(\lambda) & -A_d(\lambda) \end{bmatrix} \eta_1(k). \quad (3.12)$$

Como as matrizes $A(\cdot)$ e $A_d(\cdot)$ podem ser funções racionais em $\lambda(k)$, utiliza-se a representação DAR do sistema. Portanto, a restrição acima é reescrita na seguinte forma:

$$0 = \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & -A_1(\lambda) & -A_2(\lambda) & -A_3(\lambda) \\ 0 & \Omega_1(\lambda) & \Omega_2(\lambda) & \Omega_3(\lambda) \end{bmatrix}}_{\Psi_1(\lambda)} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-\tau) \\ \pi(k) \end{bmatrix}}_{\eta_{1a}(k)} \quad (3.13)$$

onde $\pi \in \mathfrak{R}^m$ é um vetor auxiliar contendo os termos não lineares em $\lambda(k)$, $\eta_{1a}(k)$ representa $\eta_1(k)$ de forma aumentada, ou seja, $\eta_{1a}(k) = [\eta_1(k)' \ \pi(k)']'$ e a matriz $\Omega_3(\lambda)$ tem posto

completo por colunas para todo $\lambda \in \Lambda$.

Relembrando que para assegurar a estabilidade do sistema (3.1), a variação $\Delta V(x_k)$, dada por (3.11), deve ser negativa definida. Para obter uma condição que possa ser numericamente testada, utiliza-se o Lema de Finsler (Lema 2) para que a restrição (3.13) possa ser inserida em $\Delta V(k)$. Desta forma, a condição

$$\eta_{1_a}(k)' \begin{bmatrix} \Pi_1(P, Q) & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} \eta_{1_a}(k) < 0, \forall \eta_{1_a}(k) \mid \Psi_1(\lambda)\eta_{1_a}(k) = 0, \eta_{1_a}(k) \neq 0,$$

é satisfeita para todo $\lambda(k) \in \Lambda$ se

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(P, Q) & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} + L\Psi_1(\lambda) + \Psi_1(\lambda)'L' < 0, L \in \mathfrak{R}^{(3n+m) \times (n+q)}, \forall \lambda(k) \in \mathcal{V}(\Lambda). \quad (3.14)$$

A partir desta formulação, é proposto o seguinte resultado para a análise de estabilidade robusta de sistemas lineares independentes do atraso de transporte, utilizando o funcional de Lyapunov-Krasovskii na forma quadrática em x e x_k .

Teorema 5 *Considere o sistema (3.1), com a sua representação DAR em (2.41) satisfazendo*

A1. *Seja Λ um politopo com vértices conhecidos, que define os valores admissíveis da incerteza $\lambda(k)$. Suponha que existam matrizes $P > 0$, $Q > 0$ e L satisfazendo a LMI (3.14) para todo $\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda)$. Então, o sistema (3.1) é assintoticamente estável para qualquer $\tau \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \Lambda$.*

Prova. Suponha que a LMI (3.14) é satisfeita para todo $\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda)$, então por convexidade ela também é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$.

Como P e Q são definidas positivas, então o funcional definido em (3.2) satisfaz

$$V(x, x_k) > 0. \quad (3.15)$$

Além disso, note que V_1 e V_2 são formas quadráticas em x e x_k , respectivamente. Portanto, existem escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 tais que:

$$\epsilon_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x, x_k) \leq \epsilon_2 \|x_k\|_\tau^2. \quad (3.16)$$

Agora, considere a LMI em (3.14) e a represente de forma compacta por $\Xi < 0$. Como ela é estrita, existe um escalar ϵ_3 tal que $\Xi + \epsilon_3 N_1' N_1 \leq 0$, onde N_1 é uma matriz constante tal que $N_1 \eta_{1_a}(k) = x(k)$, e.g.

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0_n & 0_{n \times p} \end{bmatrix}.$$

Pré e pós-multiplicando $\Xi + \epsilon_3 N_1' N_1 \leq 0$ por $\eta_{1_a}(k)'$ e $\eta_{1_a}(k)$, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta V(x, x_k) \leq -\epsilon_3 \|x(k)\|^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad (3.17)$$

visto que $\Psi_1(\lambda) \eta_{1_a}(k) = 0$, e o resto da prova segue a partir do Teorema de Lyapunov-Krasovskii (Teorema 3).

3.2 Estabilidade Dependente do Atraso

Conforme apresentado no capítulo anterior, o funcional de Lyapunov-Krasovskii para obter-se condições de estabilidade dependentes de atraso pode ser dado por

$$V(x_k) = V_1(x) + V_2(x_k) + V_3(x_k), \quad (3.18)$$

onde V_1 é dada por (3.3), V_2 por (3.4), e

$$V_3(x_k) = \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k-1+\rho}^{k-1} y(r)' S y(r), \quad (3.19)$$

com S sendo uma matriz constante e simétrica a ser determinada e

$$y(r) = x(r+1) - x(r), \forall r. \quad (3.20)$$

A seguir é realizado o desenvolvimento das variações dos funcionais de Lyapunov dependentes do atraso com

$$\Delta V(x, x_k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k), \quad (3.21)$$

onde $\Delta V_1(k)$ e $\Delta V_2(k)$ são representadas por (3.6) e (3.8) respectivamente e

$$\Delta V_3(x_k) = \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k+\rho}^k y(r)' S y(r) - \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k+\rho-1}^{k-1} y(r)' S y(r). \quad (3.22)$$

De forma similar ao desenvolvimento realizado para $\Delta V_2(k)$, é necessário desenvolver $\Delta V_3(k)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta V_3(x_k) = \sum_{\rho=-\tau+1}^0 & \left[\left(y(k+\rho)' S y(k+\rho) + y(k+\rho+1)' S y(k+\rho+1) + \right. \right. \\ & + y(k+\rho+2)' S y(k+\rho+2) + \dots + y(k-2)' S y(k-2) + \\ & + y(k-1)' S y(k-1) + y(k)' S y(k) \left. \right) + \\ & - \left(y(k+\rho-1)' S y(k+\rho-1) + y(k+\rho)' S y(k+\rho) + \right. \\ & + y(k+\rho+1)' S y(k+\rho+1) + y(k+\rho+2)' S y(k+\rho+2) + \\ & + \dots + y(k-2)' S y(k-2) + y(k-1)' S y(k-1) \left. \right) \left. \right]. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Por simplificação, tem-se:

$$\Delta V_3(x_k) = \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \left[y(k)' S y(k) - y(k+\rho-1)' S y(k+\rho-1) \right].$$

Sem perda de generalidade, pode-se redefinir os limites do somatório em $\rho \in [-\tau+1, 0]$ para

$r \in [k - \tau, k - 1]$. Logo, a expressão acima pode ser escrita na seguinte forma:

$$\Delta V_3(x_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} y(k)'Sy(k) - y(r)'Sy(r). \quad (3.24)$$

Então, substituindo (3.6), (3.8) e (3.24) em (3.21) obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta V(k) = & \left[x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) + x(k)'Qx(k) \right. \\ & \left. - x(k-\tau)'Qx(k-\tau) + \sum_{r=k-\tau}^{k-1} y(k)'\tau Sy(k) - y(r)'Sy(r) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como uma forma quadrática $Y(\xi) = \xi(k)'U\xi(k)$ pode ser escrita na forma

$$Y(\xi) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \xi(k)' \frac{U}{\tau} \xi(k),$$

por conveniência, todos os termos na expressão (3.25) são colocados dentro do somatório em r , ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta V(x, x_k) = & \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \left[x(k+1)'\frac{P}{\tau}x(k+1) - x(k)'\frac{P}{\tau}x(k) + x(k)'\frac{Q}{\tau}x(k) \right. \\ & \left. - x(k-\tau)'\frac{Q}{\tau}x(k-\tau) + y(k)'Sy(k) - y(r)'Sy(r) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

É possível retirar o termo $\frac{1}{\tau}$ do somatório, fazendo com que (3.26) seja dada por:

$$\begin{aligned} \Delta V(x, x_k) = & \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \left[x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) + x(k)'Qx(k) \right. \\ & \left. - x(k-\tau)'Qx(k-\tau) + y(k)'\tau Sy(k) - y(r)'\tau Sy(r) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

De maneira similar ao caso independente do atraso, pode-se obter uma forma quadrática da expressão acima através das seguintes variáveis auxiliares:

$$\Delta V(x, x_k) = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-\tau) \\ y(k) \\ y(r) \end{bmatrix}'}_{\eta_2(k,r)'} \underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q-P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau S \end{bmatrix}}_{\Pi_2(P,Q,S,\tau)} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-\tau) \\ y(k) \\ y(r) \end{bmatrix}}_{\eta_2(k,r)}. \quad (3.28)$$

A equação acima pode ser representada de forma compacta da seguinte maneira:

$$\Delta V(x, x_k) = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \eta_2(k, r)' \Pi_2(P, Q, S, \tau) \eta_2(k, r), \quad (3.29)$$

onde o vetor $\eta_2(k, r)$ e a matriz $\Pi_2(P, Q, S, \tau)$ são as mesmas variáveis definidas em (3.28).

Nota-se que, de maneira similar ao visto para o caso de sistemas independentes do atraso, os elementos de $\eta_2(k, r)$ são dependentes entre si e satisfazem à seguinte restrição referente à dinâmica do sistema (3.1):

$$0 = \begin{bmatrix} I_n & -A(\lambda) & -A_d(\lambda) & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_2(k). \quad (3.30)$$

Por outro lado, a partir da definição de $y(\cdot)$, vista em (3.20), obtém-se as relações

$$y(k) = x(k+1) - x(k) \quad \text{e} \quad \sum_{r=k-\tau}^{k-1} y(r) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} (x(r+1) - x(r)) = x(k) - x(k-\tau). \quad (3.31)$$

sendo que tais igualdades podem ser adicionadas à restrição (3.30), ou seja,

$$0 = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \begin{bmatrix} I_n & -A & -A_d & 0 & 0 \\ I_n & -I_n & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & I_n & -I_n & 0 & -\tau I_n \end{bmatrix} \eta_2(k, r). \quad (3.32)$$

Visto que as matrizes $A(\cdot)$ e $A_d(\cdot)$ podem ser funções racionais em $\lambda(k)$, então a restrição acima em termos da representação DAR pode ser reescrita na seguinte forma

$$0 = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & -A_1 & -A_2 & 0 & 0 & -A_3 \\ 0 & \Omega_1 & \Omega_2 & 0 & 0 & \Omega_3 \\ I_n & -I_n & 0 & -I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & -I_n & 0 & -\tau I_n & 0 \end{bmatrix}}_{\Psi_2(\lambda, \tau)} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-\tau) \\ y(k) \\ y(r) \\ \pi(k) \end{bmatrix}}_{\eta_{2_a}(k, r)} \quad (3.33)$$

onde $\eta_{2_a}(k, r)$ é dado por $\eta_2(k, r)$ de forma aumentada ($\eta_{2_a}(k, r) = [\eta_2(k, r)' \ \pi(k)']'$). Tais restrições também podem ser representadas de forma compacta por

$$0 = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \Psi_2(\lambda, \tau) \eta_{2_a}(k, r), \quad (3.34)$$

sendo que $\Psi_2(\lambda, \tau)$ é dado por (3.33).

Utilizando o Lema de Finsler (Lema 2), a restrição acima pode ser inserida em $\Delta V(k) < 0$, onde $\Delta V(k)$ é dada por (3.29).

Portanto, a condição

$$\eta_{2_a}(k, r)' \begin{bmatrix} \Pi_2(P, Q, S, \tau) & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} \eta_{2_a}(k, r) < 0, \forall \eta_{2_a}(k, r) \mid \Pi_2(P, Q, S, \tau) \eta_{2_a}(k, r) = 0, \eta_{2_a}(k, r) \neq 0,$$

é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$ se

$$\begin{bmatrix} \Pi_2(P, Q, S, \tau) & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} + \text{He}\{L\Psi_2(\lambda, \tau)\} < 0, L \in \mathfrak{R}^{(5n+m) \times (3n+q)}, \forall \lambda \in \mathcal{V}(\Lambda). \quad (3.35)$$

Com base nos resultados e considerações apresentadas, o seguinte resultado para a análise de estabilidade robusta dependente do atraso é proposto.

Teorema 6 *Considere o sistema (3.1), com a sua representação DAR em (2.41) satisfazendo A1. Seja Λ um politopo com vértices conhecidos, que define os valores admissíveis da incerteza $\lambda(k)$. Seja $\bar{\tau}$ o atraso de transporte máximo. Suponha que existam matrizes $P > 0$, $Q > 0$, $S > 0$, e L satisfazendo a LMI (3.35) para todo $\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda)$. Então, o sistema (3.1) é assintoticamente estável para todo $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ e todo $\lambda \in \Lambda$.*

Prova. Suponha que a LMI (3.35) é satisfeita para todo $\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda)$, então por convexidade ela também é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$.

Como P, Q e S são definidas positivas, então o funcional definido em (3.18) satisfaz

$$V(x, x_k) > 0. \quad (3.36)$$

Como V_1 e V_2, V_3 são formas quadráticas em x e x_k , respectivamente, existem escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 tais que:

$$\epsilon_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x, x_k) \leq \epsilon_2 \|x_k\|_\tau^2. \quad (3.37)$$

Agora, considere a LMI em (3.35) e a represente de forma compacta por $\Xi < 0$. Como ela é

estrita, existe um escalar ϵ_3 tal que $\Xi + \epsilon_3 N_2' N_2 \leq 0$, onde N_2 é uma matriz constante tal que $N_2 \eta_{2_a}(k) = x(k)$, e.g.

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0_n & I_n & 0_n & 0_n & 0_n & 0_{n \times p} \end{bmatrix}.$$

Pré e pós-multiplicando $\Xi + \epsilon_3 N_2' N_2 \leq 0$ por $\eta_{2_a}(k)'$ e $\eta_{2_a}(k)$, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta V(x, x_k) \leq -\epsilon_3 \|x(k)\|^2, \forall \lambda \in \Lambda, \quad (3.38)$$

visto que $\Psi_2(\lambda, \tau) \eta_{2_a}(k) = 0$, e o resto da prova segue a partir do Teorema de Lyapunov-Krasovskii (Teorema 3).

3.3 Exemplos Numéricos

Com o objetivo de ilustrar os teoremas 5 e 6, são apresentados alguns exemplos numéricos. Para solução destes exemplos é utilizado *MatLab* em conjunto com *Yalmip (Parser)* [23] e *SeDuMi (Solver)* [29], permitindo a resolução das LMIs a partir de uma formulação genérica.

Exemplo 4 *Considere o Exemplo 1 proposto em [36], onde conclui-se que o sistema incerto é quadraticamente estável para $\tau = 2$. Uma representação politópica para este sistema, de acordo com a representação apresentada em (3.1), pode ser dada na seguinte forma:*

$$A(\lambda(k)) = A_0 + \lambda A_1 \quad e \quad (3.39)$$

$$A_d(\lambda(k)) = A_{d_0} + \lambda A_{d_1}, \lambda \in [-\alpha, \alpha],$$

onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 \\ 0.2 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad A_{d_0} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.045 & 0.03 \\ 0.015 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.03 \\ 0.02 & 0.01 \end{bmatrix},$$

e α é um escalar dado tal que o sistema é quadraticamente estável.

Para o sistema acima, aplica-se o resultado proposto no Teorema 5 e verifica-se que o sistema é assintoticamente estável independente do atraso τ para todo $\alpha \in [0, 5.1)$. Em contrapartida, o resultado apresentado em [36] prova que o sistema é assintoticamente estável para $\tau = 2$ e $\alpha = 1$.

Agora, supondo que o sistema seja invariante no tempo e levando em consideração que as matrizes P e Q no Teorema 5 aparecem de forma isolada, pode-se fazer as matrizes P e Q dependentes dos vértices do politopo sem perda de convexidade. Neste caso, verifica-se que o sistema é assintoticamente estável independentemente do atraso para todo $\alpha \in [0, 5.8)$.

As programações utilizadas para se obter tais resultados são apresentadas em A.1.1 e A.1.2.

Exemplo 5 Considere o exemplo proposto em [21] de um sistema linear com atraso:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.91 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix} x(k-\tau),$$

$$x(k) = \phi(k), \quad \tau \leq k \leq 0$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $x(k-\tau) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados com atraso, τ é um número inteiro positivo representando o atraso de transporte com $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, $\bar{\tau}$ representa o atraso máximo e $\phi(k)$ representa a seqüência de valores iniciais de $x(k)$.

Note que para este sistema $A(\cdot)$ e $A_d(\cdot)$ são matrizes constantes e não possuem incertezas. Segundo [21], qualquer critério independente do atraso falha ao verificar estabilidade assintótica, tornando-se necessária a aplicação de métodos dependentes do atraso. Em simulação, conforme figura 3-1, observa-se que um dos estados do sistema (x_2) é instável para $\tau \geq 59$ e condições iniciais não nulas.

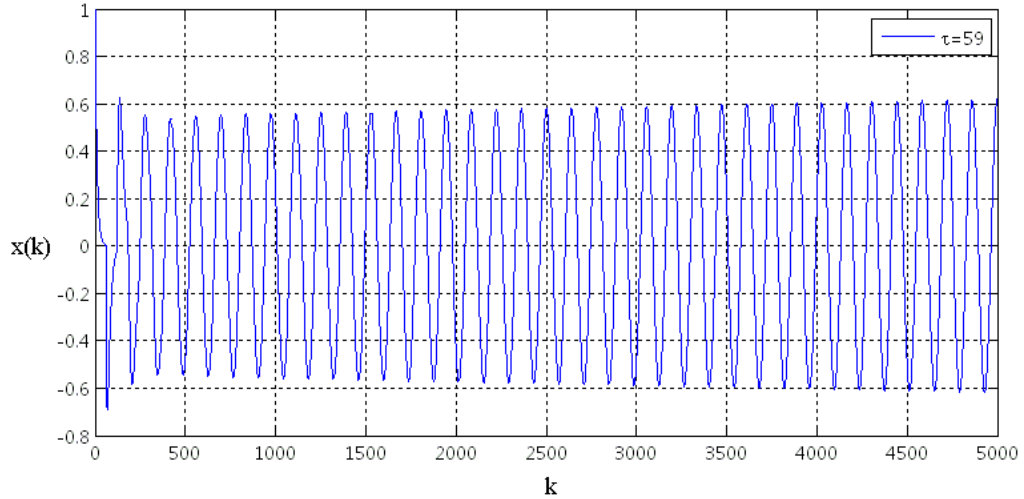


Figura 3-1: Sistema instável com atraso de transporte $\tau = 59$

Ainda que o sistema não possua incertezas, é possível aplicar o Teorema 6 sendo que o teste das condições de estabilidade resume-se a uma única LMI, aprenentada em A.2. Assim, verifica-se que o sistema é assintoticamente estável para um atraso de transporte máximo $\bar{\tau} = 42$, mostrando-se menos conservador do que o método de [21] que encontra o atraso máximo $\bar{\tau} = 41$.

Exemplo 6 Considere o exemplo proposto em [15]:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix} x(k-\tau)$$

A este sistema inclui-se uma incerteza racional nos estados levando a seguinte representação:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.97 \frac{0.8+\lambda}{1-\lambda} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix} x(k-\tau)$$

onde $\lambda \in [0, 0.1]$.

Definindo-se $\pi = \left[\frac{x_2}{1-\lambda} \right]$, a representação DAR em (2.41) é definida com:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.97(0.8 + \lambda) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} -1 + \lambda \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se o Teorema 6, a partir de A.3 verifica-se que o sistema é assintoticamente estável para um atraso de transporte máximo $\bar{\tau} = 16$ para qualquer $\lambda \in [0, 0.1]$. Ressalta-se que pelo método apresentado em [15] encontra-se o mesmo atraso máximo $\bar{\tau}$ com $\lambda = 0.1$, porém neste método não são admitidas incertezas racionais no modelo.

Capítulo 4

Estabilidade Dependente de Parâmetros

No capítulo anterior foram apresentadas condições dependentes e independentes do atraso para se verificar a estabilidade robusta de sistemas lineares discretos sujeitos a atrasos de transporte, utilizando funcionais de Lyapunov-Krasovskii independentes dos parâmetros incertos do sistema. Porém, sabe-se que condições de estabilidade independentes de parâmetros são em geral conservadoras para tratar sistemas incertos. Com o objetivo de reduzir o conservadorismo, os resultados apresentados anteriormente são estendidos para funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes do vetor de parâmetros $\lambda(k)$, sendo que os termos desses funcionais são formas quadráticas em $x(k)$ e $x(k - \tau)$ e polinomiais em $\lambda(k)$.

Certamente, a forma mais comum utilizada na literatura de controle robusto para inserir a dependência paramétrica nos testes de verificação de estabilidade de sistemas lineares é através da classe de funções de Lyapunov afins no vetor de parâmetros incertos $\lambda(k)$, isto é, para a classe de funções na forma [17, 12]

$$V(x) = x'P(\lambda(k))x, \quad P(\lambda(k)) = P_0 + \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i P_i, \quad P(\lambda(k)) = P(\lambda(k))'.$$

Entretanto, sabe-se que os testes de estabilidade baseados em funções afins no parâmetro são apenas condições suficientes. Desta forma, vários autores têm utilizado funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros, com o objetivo de obter condições de Lyapunov ainda menos conservadoras [33, 35]. Dentro deste cenário, propõem-se condições de estabilidade para sistemas lineares discretos sujeitos a atraso no estado baseadas em funcionais de Lyapunov-Krasovskii com dependência polinomial no vetor de parâmetros incertos do sistema.

A aplicação de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros é realizada considerando o sistema apresentado em (3.1), sendo que $A(\cdot)$ e $A_d(\cdot)$ são funções racionais em $\lambda(k)$ com dimensões apropriadas e bem definidas para todo $\lambda(k) \in \Lambda$. Adicionalmente, supõe-se que a variação da incerteza, dada por

$$\delta\lambda(k) = \lambda(k+1) - \lambda(k), \quad (4.1)$$

é limitada a uma região politópica com vértices conhecidos. Por simplicidade, supõe-se que o politopo Λ engloba os valores admissíveis de $\lambda(k)$ e $\delta\lambda(k)$. Em outras palavras, $(\lambda(k), \delta\lambda(k)) \in \Lambda$. A notação $\lambda(k) \in \Lambda$ indica que $(\lambda(k), 0) \in \Lambda$.

Da mesma forma que no caso independente de parâmetros, supõe-se que a classe de sistemas a ser considerada neste capítulo possa ser representada por equações de diferenças e algébricas (representação DAR). A seguir, aborda-se o caso da estabilidade independente do atraso e posteriormente o caso dependente do atraso.

4.1 Estabilidade Independente do Atraso

Considere que o funcional de Lyapunov-Krasovskii mostrado em (3.2) possa ser definido incluindo a dependência de parâmetros da seguinte forma:

$$V(x_k, \lambda_k) = V_1(x(k), \lambda(k)) + V_2(x_k, \lambda_k), \quad (4.2)$$

onde

$$V_1(x(k), \lambda(k)) = x(k)' \mathcal{P}(\lambda(k)) x(k) \text{ e} \quad (4.3)$$

$$V_2(x_k, \lambda_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)' \mathcal{Q}(\lambda(r)) x(r), \quad (4.4)$$

sendo $\mathcal{P}(\lambda)$ e $\mathcal{Q}(\lambda)$ matrizes simétricas cujos elementos são funções polinomiais em λ .

Visando uma formulação convexa para o problema de análise de estabilidade robusta, as matrizes $\mathcal{P}(\lambda)$ e $\mathcal{Q}(\lambda)$ obedecem a seguinte estrutura:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Theta(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} \Theta(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Theta(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix}' Q \begin{bmatrix} \Theta(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde $P \in \mathfrak{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ e $Q \in \mathfrak{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ são matrizes simétricas e constantes a serem determinadas, e $\Theta(\lambda) \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ é uma matriz dada cujos elementos são funções polinomiais no vetor de parâmetros λ .

Definindo a notação auxiliar

$$\xi(x, \lambda) := \Theta(\lambda)x, \quad (4.7)$$

pode-se reescrever a função V_1 em (4.3) da seguinte forma:

$$V_1(x(k), \lambda(k)) = \begin{bmatrix} \xi(x, \lambda) \\ x \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} \xi(x, \lambda) \\ x \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Note que os elementos do vetor auxiliar $\xi(x, \lambda)$ são funções polinomiais em λ . Portanto,

existe uma representação na forma DAR para $\xi(x, \lambda)$ na seguinte forma [7]:

$$\begin{aligned}\xi(x, \lambda) &= F_1(\lambda)x + F_2(\lambda)g(x, \lambda) \\ 0 &= \Phi_1(\lambda)x + \Phi_2(\lambda)g(x, \lambda)\end{aligned}\tag{4.9}$$

onde $g(x, \lambda) \in \mathfrak{R}^{m_g}$ é um vetor auxiliar contendo monômios de grau maior do que 2 em x e λ ; e $F_1 \in \mathfrak{R}^{p \times n}$; e $F_2 \in \mathfrak{R}^{p \times m_g}$, $\Phi_1 \in \mathfrak{R}^{q_g \times n}$ e $\Phi_2 \in \mathfrak{R}^{q_g \times m_g}$ são matrizes afins no vetor λ .

De maneira similar à representação em (2.41), para que a representação (4.9) seja bem definida, assume-se que:

A2 A matriz $\Phi_2(\lambda)$ tem posto completo por colunas para todo $\lambda(k) \in \Lambda$.

Observa-se que a representação (4.9) pode ser aplicada para qualquer x e λ computados nos instantes k , $k + 1$ e $k - \tau$, então da mesma forma, são definidos:

$$\begin{aligned}\xi(k) &= \Theta(\lambda(k))x(k), \\ \xi(k + 1) &= \Theta(\lambda(k + 1))x(k + 1) = \Theta(\lambda(k) + \delta\lambda(k))x(k + 1) \quad \text{e} \\ \xi(k - \tau) &= \Theta(\lambda(k - \tau))x(k - \tau).\end{aligned}$$

Por conveniência, definem-se os seguintes vetores auxiliares:

$$v = \begin{bmatrix} \xi(k) \\ x(k) \end{bmatrix}, v_+ = \begin{bmatrix} \xi(k + 1) \\ x(k + 1) \end{bmatrix}, v_\tau = \begin{bmatrix} \xi(k - \tau) \\ x(k - \tau) \end{bmatrix},\tag{4.10}$$

de modo que (4.8) possa ser reescrito por

$$V_1(x(k), \lambda(k)) = v' P v.\tag{4.11}$$

Ao mesmo tempo, definem-se matrizes constantes N_ξ e N_x tais que $N_\xi v(\cdot) = \xi(\cdot)$ e $N_x v(\cdot) =$

$x(\cdot)$, como por exemplo, as matrizes

$$N_\xi = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times n} \end{bmatrix} \text{ e } N_x = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & I_n \end{bmatrix}.$$

Para assegurar a estabilidade do sistema (3.1), o funcional de Lyapunov-Krasovskii, mostrado em (4.2), deve ser positivo definido para todo v satisfazendo a relação algébrica definida em (4.9). Então, define-se a matriz $\Upsilon_1(\lambda)$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \xi(x, \lambda) - F_1(\lambda)x - F_2(\lambda)g(x, \lambda) \\ \Phi_1(\lambda)x + \Phi_2(\lambda)g(x, \lambda) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_\xi - F_1(\lambda)N_x & -F_2(\lambda) \\ \Phi_1(\lambda)N_x & \Phi_2(\lambda) \end{bmatrix}}_{\Upsilon_1(\lambda)} \begin{bmatrix} v \\ g(k) \end{bmatrix} = 0. \quad (4.12)$$

Esta definição permite obter uma condição que possa ser numericamente testada, tal que a representação DAR em (4.9) possa ser inserida no funcional de Lyapunov-Krasovskii em (3.3). Isto pode ser realizado utilizando o Lema de Finsler (Lema 2) de forma que a condição

$$\begin{bmatrix} v \\ g(k) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0_{m_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ g(k) \end{bmatrix} > 0, \forall \begin{bmatrix} v \\ g(k) \end{bmatrix} \mid \Upsilon_1(\lambda(k)) \begin{bmatrix} v \\ g(k) \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} v \\ g(k) \end{bmatrix} \neq 0,$$

é satisfeita para todo $\lambda(k) \in \Lambda$ se

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0_{m_g} \end{bmatrix} + \text{He}\{L\Upsilon_1(\lambda(k))\} > 0, L \in \mathfrak{R}^{(p+n+m_g) \times (p+q_g)}, \forall \lambda(k) \in \mathcal{V}(\Lambda). \quad (4.13)$$

O mesmo desenvolvimento pode ser feito para o funcional $V_2(x_k, \lambda_k)$ em (3.4), sendo que $V_2(x_k, \lambda_k)$ é positivo definido se

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0_{m_g} \end{bmatrix} + \text{He}\{M\Upsilon_1(\lambda(k))\} > 0, M \in \mathfrak{R}^{(p+n+m_g) \times (p+q_g)}, \forall \lambda(k) \in \mathcal{V}(\Lambda). \quad (4.14)$$

Por outro lado, utilizando a notação (4.10), a diferença do funcional de Lyapunov-Krasovskii como definido em (4.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta V(k) = v_+'Pv_+ - v'Pv + v'Qv - v_\tau'Qv_\tau. \quad (4.15)$$

Levando em consideração a representação DAR em (4.9), $\Delta V(k)$ pode ser reescrita na forma

$$\Delta V(k) = \begin{bmatrix} v_+ \\ v \\ v_\tau \\ g(k+1) \\ g(k) \\ g(k-\tau) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q-P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{3m_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_+ \\ v \\ v_\tau \\ g(k+1) \\ g(k) \\ g(k-\tau) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Ainda é possível inserir à equação (4.16) o vetor auxiliar $\pi(k)$ referente à representação DAR (2.41), ou seja,

$$\Delta V(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} v_+ \\ v \\ v_\tau \\ \pi(k) \\ g(k+1) \\ g(k) \\ g(k-\tau) \end{bmatrix}}_{\eta_3(k)'} \underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q-P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{(m+3m_g)} \end{bmatrix}}_{\Pi_3(P,Q)} \underbrace{\begin{bmatrix} v_+ \\ v \\ v_\tau \\ \pi(k) \\ g(k+1) \\ g(k) \\ g(k-\tau) \end{bmatrix}}_{\eta_3(k)}. \quad (4.17)$$

Em (4.17) define-se a matriz $\Pi_3(P, Q)$ e o vetor auxiliar $\eta_3(k)$, permitindo que a variação do funcional de Lyapunov-Krasovskii possa ser reescrita da forma compacta por

$$\Delta V(k) = \eta_3(k)' \Pi_3(P, Q) \eta_3(k). \quad (4.18)$$

Observa-se que os elementos do vetor auxiliar $\eta_3(k)$ são dependentes entre si e satisfazem as seguintes restrições com base na representação DAR em (2.41)

$$\begin{aligned} x(k+1) - A_1(\lambda)x(k) - A_2(\lambda)x(k-\tau) - A_3(\lambda)\pi(k) &= 0 \\ \Omega_1(\lambda)x(k) + \Omega_2(\lambda)x(k-\tau) + \Omega_3(\lambda)\pi(k) &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

e com base na representação DAR em (4.9):

$$\begin{aligned} \xi(k) - F_1(\lambda(k))x(k) - F_2(\lambda(k))g(k) &= 0 \\ \Phi_1(\lambda(k))x(k) + \Phi_2(\lambda(k))g(k) &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \xi(k+1) - F_1(\lambda+\delta\lambda)x(k+1) - F_2(\lambda+\delta\lambda)g(k+1) &= 0 \\ \Phi_1(\lambda(k)+\delta\lambda(k))x(k+1) + \Phi_2(\lambda(k)+\delta\lambda(k))g(k+1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \xi(k-\tau) - F_1(\lambda(k-\tau))x(k-\tau) - F_2(\lambda(k-\tau))g(k-\tau) &= 0 \\ \Phi_1(k-\tau)x(k-\tau) + \Phi_2(k-\tau)g(k-\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Estas restrições podem ser reescritas na seguinte forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{1(1,1)} & \psi_{1(1,2)} & \psi_{1(1,3)} & \psi_{1(1,4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{1(2,2)} & \psi_{1(2,3)} & \psi_{1(2,4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{1(3,2)} & 0 & 0 & 0 & \psi_{1(3,6)} & 0 \\ \psi_{1(4,1)} & 0 & 0 & 0 & \psi_{1(4,5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{1(5,3)} & 0 & 0 & 0 & \psi_{1(5,7)} \\ 0 & \psi_{1(6,2)} & 0 & 0 & 0 & \psi_{1(6,6)} & 0 \\ \psi_{1(7,1)} & 0 & 0 & 0 & \psi_{1(7,5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{1(8,3)} & 0 & 0 & 0 & \psi_{1(8,7)} \end{bmatrix}}_{\Psi_3(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau))} \eta_3(k) = 0 \quad (4.23)$$

onde $\eta_3(k)$ é definido em (4.17) e os blocos $\psi_{1(i,j)}$ de $\Psi_3(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau))$ são dados por

$$\begin{aligned}
 \psi_{1(1,1)} &= N_x, & \psi_{1(1,2)} &= -A_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{1(1,3)} &= -A_2(\lambda(k))N_x, \\
 \psi_{1(1,4)} &= -A_3(\lambda(k)), & \psi_{1(2,2)} &= \Omega_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{1(2,3)} &= \Omega_2(\lambda(k))N_x, \\
 \psi_{1(2,4)} &= \Omega_3(\lambda(k)), & \psi_{1(3,2)} &= N_\xi - F_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{1(3,6)} &= -F_2(\lambda(k)), \\
 \psi_{1(4,1)} &= N_\xi - F_1(\lambda + \delta\lambda)N_x, & \psi_{1(4,5)} &= -F_2(\lambda + \delta\lambda), & \psi_{1(5,3)} &= N_\xi - F_1(\lambda(k-\tau))N_x, \\
 \psi_{1(5,7)} &= -F_2(\lambda(k-\tau)), & \psi_{1(6,2)} &= \Phi_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{1(6,6)} &= \Phi_2(\lambda(k)), \\
 \psi_{1(7,1)} &= \Phi_1(\lambda(k+1))N_x, & \psi_{1(7,5)} &= \Phi_2(\lambda(k+1)), & \psi_{1(8,3)} &= \Phi_1(\lambda(k-\tau))N_x, \\
 \psi_{1(8,7)} &= \Phi_2(\lambda(k-\tau)).
 \end{aligned}$$

Sendo assim as restrições apresentadas em (4.23) podem ser reescritas de forma compacta por

$$\Psi_3(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \eta_3(k) = 0 \quad (4.24)$$

Utilizando o Lema de Finsler (Lema 2), a restrição (4.24) pode ser inserida na diferença do funcional de Lyapunov-Krasovskii de maneira a determinar se $\Delta V(k)$ é negativa definida, onde

$\Delta V(k)$ é dada por (4.17). Portanto, a condição

$$\eta_3(k)' \Pi_3(P, Q) \eta_3(k) < 0, \forall \eta_3(k) \mid \Psi_3(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \eta_3(k) = 0, \eta_3(k) \neq 0,$$

é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$ se

$$\Pi_3(P, Q) + \text{He}\{W \Psi_3(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau))\} < 0, W \in \mathfrak{R}^{d_1 \times d_2}, \forall (\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \in \mathcal{V}(\Lambda \times \Lambda), \quad (4.25)$$

onde $d_1 = (3n + 3p + m + 3m_g)$ e $d_2 = (n + q + 3p + 3q_g)$.

Esta formulação leva ao seguinte resultado para a análise de estabilidade robusta, independente do atraso de transporte e dependente de parâmetros.

Teorema 7 *Considere o sistema (3.1), com a sua representação DAR em (2.41) satisfazendo **A1**. Seja $\Theta(\lambda) \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ uma dada matriz cujos elementos são funções polinomiais em λ , e considere a decomposição DAR em (4.9) satisfazendo **A2**. Seja Λ um politopo com vértices conhecidos, que define os valores admissíveis da incerteza $\lambda(k)$ e de sua variação $\delta\lambda(k)$. Suponha que existam matrizes $P = P'$, $Q = Q'$, L , M e W satisfazendo as seguintes LMIs (4.13), (4.14) e (4.25) para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \in \mathcal{V}(\Lambda \times \Lambda)$, então, o sistema (3.1) é assintoticamente estável para qualquer $(\lambda, \delta\lambda) \in \Lambda$ e independente do atraso τ .*

Prova. Suponha que as LMIs descritas em (4.13), (4.14) e (4.25) são satisfeitas para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \in \mathcal{V}(\Lambda \times \Lambda)$, então por convexidade elas também estão satisfeitas para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \in \Lambda \times \Lambda$.

Considere as LMIs (4.13) e (4.14) e defina o vetor auxiliar $\sigma_1 = [v' \ g']'$. Pré- e pós-multiplicando estas LMIs por σ_1' e σ_1 , respectivamente, obtém-se:

$$V_1(x(k), \lambda(k)) = x(k)' \mathcal{P}(\lambda(k)) x(k) > 0, \quad (4.26)$$

$$V_2(x_k, \lambda_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)' \mathcal{Q}(\lambda(r)) x(r) > 0, \quad (4.27)$$

pois $\Upsilon_1(\lambda)\sigma_1 = 0$ para qualquer instante k .

Como os elementos das matrizes $\mathcal{P}(\lambda)$ e $\mathcal{Q}(\lambda)$ são limitados por suposição (i.e., $\lambda \in \Lambda$) existem escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 tais que:

$$\epsilon_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x_k, \lambda_k) = V_1(x, \lambda) + V_2(x_k, \lambda_k) \leq \epsilon_2 \|x_k\|_\tau^2. \quad (4.28)$$

Agora, considere a LMI em (4.25) e a represente de forma compacta por $\tilde{\Xi} < 0$. Como ela é estrita, existe um escalar ϵ_3 tal que $\tilde{\Xi} + \epsilon_3 N_3' N_3 \leq 0$, onde N_3 é uma matriz constante tal que $N_3 \eta_3(k) = x(k)$. Pré e pós-multiplicando $\tilde{\Xi} + \epsilon_3 N_3' N_3 \leq 0$ por $\eta_3(k)'$ e $\eta_3(k)$, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta V(x, x_k) \leq -\epsilon_3 \|x(k)\|^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad (4.29)$$

visto que $\Psi_3(\cdot) \eta_3(k) = 0$, e o resto da prova segue a partir do do Teorema de Lyapunov-Krasovskii (Teorema 3).

4.2 Estabilidade Dependente do Atraso

Com o objetivo de obter condições de estabilidade dependente do atraso e do vetor de parâmetros λ , considere que o funcional de Lyapunov-Krasovskii, apresentado no capítulo anterior em (3.18), seja dado por

$$V(x_k, \lambda_k) = V_1(x(k), \lambda(k)) + V_2(x_k, \lambda_k) + V_3(x_k, \lambda_k), \quad (4.30)$$

onde V_1 e V_2 são os mesmos definidos em (4.3) e (4.4), respectivamente, e

$$V_3(x_k, \lambda_k) = \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k-1+\rho}^{k-1} \varphi(\lambda, r)' S \varphi(\lambda, r), \quad (4.31)$$

onde $S \in \mathfrak{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ é uma matriz simétrica e constante a ser determinada, e $\varphi \in \mathfrak{R}^{n+p}$ é uma função vetorial obedecendo a seguinte estrutura

$$\varphi(\lambda, r) = \begin{bmatrix} \Theta(\lambda(r+1))x(r+1) - \Theta(\lambda(r))x(r) \\ x(r+1) - x(r) \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

sendo que $\Theta(\lambda) \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ é a mesma função matricial utilizada nas definições de V_1 e V_2 em (4.3) e (4.4), respectivamente.

De maneira similar ao apresentado no caso independente do atraso, levando em conta a definição de $y(\cdot)$ em (3.20), é definido o vetor auxiliar

$$\xi_y(r) = \Theta(\lambda(r+1))x(r+1) - \Theta(\lambda(r))x(r), \quad (4.33)$$

de forma que

$$V_3(x_k, \lambda_k) = \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k-1+\rho}^{k-1} \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix}' S \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Por conveniência, definem-se os seguintes vetores auxiliares:

$$w = \begin{bmatrix} \xi_y(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad w_r = \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix}, \quad v_r = \begin{bmatrix} \xi(r) \\ x(r) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_{r+} = \begin{bmatrix} \xi(r+1) \\ x(r+1) \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Observa-se que, pelas definições acima, as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$w = v_+ - v, \quad w_r = v_{r+} - v_r, \quad \sum_{r=k-\tau}^{k-1} w_r = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} (v_{r+} - v_r) = v - v_\tau. \quad (4.36)$$

Para que o funcional $V_3(x_k, \lambda_k)$ seja positivo definido, deve-se garantir que a seguinte condição

seja satisfeita

$$\varphi(\lambda, r)' S \varphi(\lambda, r) > 0, \forall r, \lambda \in \Lambda. \quad (4.37)$$

Entretanto, pela definição do vetor $\varphi(\lambda, r)$ em (4.32), nota-se que este vetor satisfaz as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} w + v - v_+ &= 0 \\ \xi(k) - F_1(\lambda(k))x(k) - F_2(\lambda(k))g(k) &= 0 \\ \Phi_1(\lambda(k))x(k) + \Phi_2(\lambda(k))g(k) &= 0 \\ \xi(k+1) - F_1(\lambda(k)+\delta\lambda(k))x(k+1) - F_2(\lambda(k)+\delta\lambda(k))g(k+1) &= 0 \\ \Phi_1(\lambda(k)+\delta\lambda(k))x(k+1) + \Phi_2(\lambda(k)+\delta\lambda(k))g(k+1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Definindo-se a seguinte notação

$$\Upsilon_2(\lambda, \delta\lambda) = \begin{bmatrix} I_{n+p} & [I_{n+p} & 0] & [-I_{n+p} & 0] \\ 0 & \Upsilon_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \Upsilon_1(\lambda+\delta\lambda) \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} w \\ v \\ g(k) \\ v_+ \\ g(k+1) \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

chega-se à seguinte forma compacta para (4.38)

$$\Upsilon_2(\lambda, \delta\lambda) \sigma_2 = 0,$$

onde $\Upsilon_1(\cdot)$ é a mesma matriz definida em (4.12).

Com base na formulação acima, a condição (4.37) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma'_2 \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0_{d_3} \end{bmatrix} \sigma_2 > 0, \forall \sigma'_2 \mid \Upsilon_2(\lambda, \delta\lambda)\sigma_2 = 0, \sigma'_2 \neq 0,$$

onde $d_3 = 2(n + p + m_g)$.

Assim, utilizando o Lema de Finsler (Lema 2), a condição acima é satisfeita para todo $\lambda(k) \in \Lambda$ se

$$\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0_{d_3} \end{bmatrix} + \text{He}\{T\Upsilon_2(\lambda, \delta\lambda)\} > 0, T \in \mathfrak{R}^{d_4 \times d_5}, \forall (\lambda(k), \delta\lambda(k)) \in \mathcal{V}(\Lambda), \quad (4.40)$$

onde $d_4 = (n + p + d_3)$ e $d_5 = 3(n + p + q_g)$.

Por outro lado, a partir das definições (4.35), o somatório presente na variação do funcional $\Delta V_3(x_k, \lambda_k)$ pode ser desenvolvido, conforme apresentado no capítulo anterior, levando à seguinte expressão:

$$\Delta V_3(x_k, \lambda_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} (w' S w - w'_r S w_r). \quad (4.41)$$

Adicionando (4.41) em (4.15), a diferença do funcional de Lyapunov-Krasovskii, como definido em (4.30), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta V(x_k, \lambda_k) = v'_+ P v_+ - v' P v + v' Q v - v'_\tau Q v_\tau + \sum_{r=k-\tau}^{k-1} (w' S w - w'_r S w_r). \quad (4.42)$$

Por conveniência, todos os termos na expressão acima são colocados dentro do somatório em r , ou seja,

$$\Delta V(x_k, \lambda_k) = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \left[v'_+ P v_+ - v' P v + v' Q v - v'_\tau Q v_\tau + \tau (w' S w - w'_r S w_r) \right].$$

Levando em consideração as representações DAR (2.41) e (4.9), a expressão acima pode ser

reescrita na seguinte maneira:

$$\Delta V(x_k, \lambda_k) = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \underbrace{\begin{bmatrix} v_+ \\ v \\ v_\tau \\ w \\ w_r \\ \pi(k) \\ g(k+1) \\ g(k) \\ g(k-\tau) \end{bmatrix}'}_{\eta_4(k,r)'} \underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q-P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m+3m_g} \end{bmatrix}}_{\Pi_4(P,Q,S,\tau)} \underbrace{\begin{bmatrix} v_+ \\ v \\ v_\tau \\ w \\ w_r \\ \pi(k) \\ g(k+1) \\ g(k) \\ g(k-\tau) \end{bmatrix}}_{\eta_4(k,r)}, \quad (4.43)$$

ou na seguinte forma compacta

$$\Delta V(x_k, \lambda_k) = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \eta_4(k,r)' \Pi_4(P,Q,S,\tau) \eta_4(k,r), \quad (4.44)$$

onde $\Pi_4(P,Q,S,\tau)$ e $\eta_4(k,r)$ são como definidos em (4.43).

Note que os elementos do vetor auxiliar $\eta_4(k,r)$ são dependentes entre si e considerando a representação DAR (2.41) do sistema (3.1) é possível associar as restrições

$$0 = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \begin{bmatrix} N_x & -A_1 N_x & -A_2 N_x & 0_{n \times (n+p)} & 0_{n \times (n+p)} & -A_3 & 0_{n \times 3m_g} \\ 0 & \Omega_1 N_x & \Omega_2 N_x & 0_{n \times (n+p)} & 0_{n \times (n+p)} & \Omega_3 & 0_{n \times 3m_g} \end{bmatrix} \eta_4(k,r). \quad (4.45)$$

Com base nas representação DAR definida em (4.9), para $\xi(k)$, $\xi(k+1)$ e $\xi(k-\tau)$, obtém-se as seguintes restrições de igualdade:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \xi(k) - F_1(\lambda(k))x(k) - F_2(\lambda(k))g(k) &= 0, \\
 \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \Phi_1(\lambda(k))x(k) + \Phi_2(\lambda(k))g(k) &= 0, \\
 \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \xi(k+1) - F_1(\lambda+\delta\lambda)x(k+1) - F_2(\lambda+\delta\lambda)g(k+1) &= 0, \\
 \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \Phi_1(\lambda(k)+\delta\lambda(k))x(k+1) + \Phi_2(\lambda(k)+\delta\lambda(k))g(k+1) &= 0, \\
 \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \xi(k-\tau) - F_1(\lambda(k-\tau))x(k-\tau) - F_2(\lambda(k-\tau))g(k-\tau) &= 0, \\
 \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \Phi_1(k-\tau)x(k-\tau) + \Phi_2(k-\tau)g(k-\tau) &= 0.
 \end{aligned}$$

Considerando a representação DAR do sistema em (2.41) de $\xi(\cdot)$ em (4.9), as restrições (4.36), (4.45) e acima, o conjunto de restrições envolvendo os elementos de η_4 pode ser reescrito na seguinte forma compacta

$$0 = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \Psi_4(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau), \tau) \eta_4(k, r) \tag{4.46}$$

onde a matriz $\Psi_4(\cdot)$ é definida da seguinte forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
 \psi_{2(1,1)} & \psi_{2(1,2)} & \psi_{2(1,3)} & 0 & 0 & \psi_{2(1,6)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \psi_{2(2,2)} & \psi_{2(2,3)} & 0 & 0 & \psi_{2(2,6)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \psi_{2(3,2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{2(3,8)} & 0 \\
 \psi_{2(4,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{2(4,7)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \psi_{2(5,3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{2(5,9)} \\
 0 & \psi_{2(6,2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{2(6,8)} & 0 \\
 \psi_{2(7,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{2(7,7)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \psi_{1(8,3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{2(8,9)} \\
 \psi_{2(9,1)} & \psi_{2(9,2)} & 0 & \psi_{2(9,4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \psi_{2(10,2)} & \psi_{2(10,3)} & 0 & \psi_{2(10,5)} & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}}_{\Psi_4(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau), \tau)} \quad (4.47)$$

cujos blocos $\psi_{2(i,j)}$ diferentes de matrizes de zeros são dados por

$$\begin{aligned}
 \psi_{2(1,1)} &= N_x, & \psi_{2(1,2)} &= -A_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{2(1,3)} &= -A_2(\lambda(k))N_x, \\
 \psi_{2(1,6)} &= -A_3(\lambda(k)), & \psi_{2(2,2)} &= \Omega_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{2(2,3)} &= \Omega_2(\lambda(k))N_x, \\
 \psi_{2(2,6)} &= \Omega_3(\lambda(k)), & \psi_{2(3,2)} &= N_\xi - F_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{2(3,8)} &= -F_2(\lambda(k)), \\
 \psi_{2(4,1)} &= N_\xi - F_1(\lambda + \delta\lambda)N_x, & \psi_{2(4,7)} &= -F_2(\lambda + \delta\lambda), & \psi_{2(5,3)} &= N_\xi - F_1(\lambda(k-\tau))N_x, \\
 \psi_{2(5,9)} &= -F_2(\lambda(k-\tau)), & \psi_{2(6,2)} &= \Phi_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{2(6,8)} &= \Phi_2(\lambda(k)), \\
 \psi_{2(7,1)} &= \Phi_1(\lambda(k+1))N_x, & \psi_{2(7,7)} &= \Phi_2(\lambda(k+1)), & \psi_{2(8,3)} &= \Phi_1(\lambda(k-\tau))N_x, \\
 \psi_{2(8,9)} &= \Phi_2(\lambda(k-\tau)), & \psi_{2(9,1)} &= I_{n+p}, & \psi_{2(9,2)} &= -I_{n+p} \\
 \psi_{2(9,4)} &= -I_{n+p} & \psi_{2(10,2)} &= I_{n+p}, & \psi_{2(10,3)} &= -I_{n+p}, \\
 \psi_{2(10,5)} &= -\tau I_{n+p},
 \end{aligned}$$

Utilizando o Lema de Finsler (Lema 2), a restrição (4.46) pode ser inserida em $\Delta V(k) < 0$,

onde $\Delta V(k)$ é dada por (4.42). Portanto, a condição

$$\eta_4(k, r)' \Pi_4(P, Q, S, \tau) \eta_4(k, r) < 0, \forall \eta_4(k, r) \mid \Pi_4(P, Q, S, \tau) \eta_4(k, r) = 0, \eta_4(k, r) \neq 0,$$

é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$ se

$$\Pi_4(P, Q, S, \tau) + \text{He}\{W \Psi_4(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau), \tau)\} < 0, W \in \Re^{d_6 \times d_7}, \forall \lambda \in \mathcal{V}(\Lambda). \quad (4.48)$$

onde $d_6 = (5n + 5p + m + 3m_g)$ e $d_7 = (3n + q + 5p + 3q_g)$.

Com base na formulação apresentada o seguinte resultado para a análise de estabilidade robusta, dependente do atraso de transporte e dependente de parâmetros é proposto.

Teorema 8 *Considere o sistema (3.1), com a sua decomposição DAR em (2.41) satisfazendo*

A1. *Seja $\Theta(\lambda) \in \Re^{q \times n}$ uma dada matriz cujos elementos são funções polinomiais em λ e considere a representação DAR em (4.9) satisfazendo* **A2.** *Seja $\bar{\tau}$ o atraso de transporte máximo e Λ um politopo com vértices conhecidos, que define os valores admissíveis da incerteza $\lambda(k)$ e de sua variação $\delta\lambda(k)$. Suponha que existam matrizes $P = P'$, $Q = Q'$, $S = S'$, L , M , T e W satisfazendo as LMIs (4.13), (4.14), (4.40) e (4.48) para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \in \mathcal{V}(\Lambda \times \Lambda)$, então, o sistema (3.1) é assintoticamente estável para todo $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ e todo $(\lambda, \delta\lambda) \in \Lambda$.*

Prova. Suponha que as LMIs (4.13), (4.14), (4.40) e (4.48) estão satisfeitas para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \in \mathcal{V}(\Lambda \times \Lambda)$, então por convexidade elas também estão satisfeitas para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k)) \in \Lambda$ e $(\lambda(k-\tau), 0) \in \Lambda$.

Utilizando a prova do Teorema 7, as LMIs (4.13) e (4.14) implicam que

$$V_1(x(k), \lambda(k)) = x(k)' \mathcal{P}(\lambda(k)) x(k) > 0, \quad (4.49)$$

$$V_2(x_k, \lambda_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)' \mathcal{Q}(\lambda(r)) x(r) > 0. \quad (4.50)$$

Agora, considere a LMI (4.40) e defina o vetor auxiliar σ_2 definido em (4.39). Pré- e pós-multiplicando esta LMI por σ_2' e σ_2 , respectivamente, obtém-se:

$$V_3(x_k, \lambda_k) = \sum_{p=-\tau+1}^0 \sum_{r=k-1+p}^{k-1} \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix}' S \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix} > 0, \quad (4.51)$$

pois $\Upsilon_2(\lambda, \delta\lambda)\sigma_2 = 0$ para qualquer instante k .

Como os elementos de V_1 , V_2 e V_3 são limitados por suposição (i.e., $(\lambda, \delta\lambda) \in \Lambda$) existem escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 tais que:

$$\epsilon_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x, x_k) \leq \epsilon_2 \|x_k\|_\tau^2. \quad (4.52)$$

Agora, considere a LMI em (4.48) e a represente de forma compacta por $\tilde{\Xi} < 0$. Como ela é estrita, existe um escalar ϵ_3 tal que $\tilde{\Xi} + \epsilon_3 N_4' N_4 \leq 0$, onde N_4 é uma matriz constante tal que $N_4 \eta_4(k, r) = x(k)$. Pré e pós-multiplicando $\tilde{\Xi} + \epsilon_3 N_4' N_4 \leq 0$ por $\eta_4(k, r)'$ e $\eta_4(k, r)$, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta V(x, x_k) \leq -\epsilon_3 \|x(k)\|^2, \quad \forall (\lambda, \delta\lambda) \in \Lambda, \quad (4.53)$$

visto que $\Psi_4(\cdot) \eta_4(k, r) = 0$, e o resto da prova segue a partir do do Teorema de Lyapunov-Krasovskii (Teorema 3).

4.3 Exemplo Numérico

A seguir, apresenta-se um exemplo numérico afim de ilustrar a aplicação das condições de estabilidade dependente de parâmetros para sistemas com atraso no estado.

Considere o seguinte sistema discreto

$$x(k+1) = A(\lambda(k))x(k) + A_d(\lambda(k))x(k-\tau), \lambda \in \Lambda,$$

onde

$$A(\lambda(k)) = A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \quad \text{e} \quad A_d(\lambda(k)) = A_{d_0} + \lambda_1 A_{d_1} + \lambda_2 A_{d_2},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 \\ 0.2 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad A_{d_0} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.045 & 0.03 \\ 0.015 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.03 \\ 0.02 & 0.01 \end{bmatrix},$$

e $A_2 = A_{d_2} = 0_2$.

Neste exemplo, supõe-se que os parâmetros são invariantes no tempo, isto é, $\delta\lambda(k) = 0$, e que o politopo Λ é parametrizado da seguinte maneira:

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^2 \mid |\lambda_1| \leq \alpha, |\lambda_2| \leq \beta\},$$

onde α e β são escalares não negativos.

O sistema acima sem incertezas é assintoticamente estável independente do atraso τ , sendo o objetivo deste exemplo verificar a influência da variação paramétrica na estabilidade do sistema. Com este objetivo, considera-se o resultado apresentado no Teorema 7 com a seguinte definição da matriz $\Theta(\lambda)$:

$$\Theta(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_2 \\ \lambda_2 I_2 \end{bmatrix},$$

resultando em funcionais de Lyapunov-Krasovskii de grau dois em λ .

Para a definição acima, a DAR para $\xi(x, \lambda) = [\lambda_1 x' \quad \lambda_2 x']'$ como em (4.9) pode ser obtida

pelas seguintes definições:

$$F_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_2 \\ \lambda_2 I_2 \end{bmatrix}, g(x, \lambda) = 0, F_2(\lambda) = 0, \Phi_1(\lambda) = 0, \Phi_2 = 0.$$

Como, neste exemplo, os vetores auxiliares $\pi(k)$ e $g(x, \lambda)$ são nulos as variáveis correspondentes às condições de estabilidade apresentadas no Teorema 7 podem ser eliminadas do problema por uma adequada eliminação de linhas e colunas nas LMIs (4.13), (4.14) e (4.25) levando às seguintes condições de estabilidade:

$$P + \text{He}\{L\tilde{\Upsilon}_1\} > 0, \quad (4.54)$$

$$Q + \text{He}\{M\tilde{\Upsilon}_1\} > 0, \quad (4.55)$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q - P & 0 \\ 0 & 0 & -Q \end{bmatrix} + \text{He}\{W\tilde{\Psi}_3\} < 0, \quad (4.56)$$

onde $\tilde{\Upsilon}_1 = N_\xi - F_1(\lambda)N_x$ e

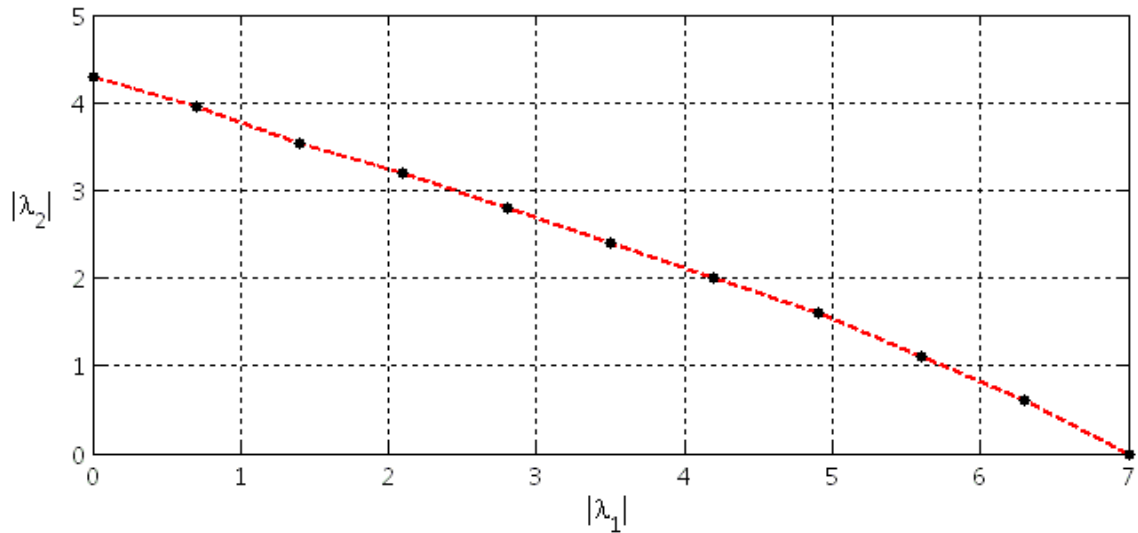
$$\tilde{\Psi}_3 = \begin{bmatrix} \psi_{1(1,1)} & \psi_{1(1,2)} & \psi_{1(1,3)} \\ 0 & \psi_{1(3,2)} & 0 \\ \psi_{1(4,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{1(5,3)} \end{bmatrix}.$$

Os resultados apresentados na Tabela 4.3 foram obtidos a partir da programação em A.4, onde fixa-se o valor de α e é determinado o valor máximo admissível para β tal que as condições do Teorema 7 sejam factíveis.

α	0.0	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	4.9	5.6	6.3	7.0
β	4.3	3.9	3.5	3.2	2.8	2.4	2.0	1.6	1.1	0.6	0.0

Tabela 4.1: Valores admissíveis para o vetor de parâmetros incertos.

Estes resultados também são apresentados de forma gráfica na figura 4-1.

Figura 4-1: Valores admissíveis para $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$.

Note que o exemplo acima para $\lambda_1 = \lambda_2$ é o mesmo sistema apresentado no Exemplo 4 no capítulo anterior. Como esperado, a inclusão de mais um parâmetro incerto aumenta o conservadorismo dos resultados, pois o valor máximo obtido para $\lambda_1 = \lambda_2$ é de 2.8 no caso acima ao invés de 5.8 no Exemplo 4. A diminuição deste conservadorismo pode ser obtida através da utilização de funcionais de Lyapunov-Krasovskii mais complexos, mas ao custo de um maior esforço computacional.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

5.1 Considerações Finais

O problema de determinar a estabilidade de sistemas lineares incertos em tempo discreto sujeitos a atraso no vetor de estados ainda é um desafio no cenário atual. Para lidar com este fenômeno, esta dissertação propõe condições para verificar a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio do sistema. Essas condições são apresentadas na forma de Desigualdades Matriciais Lineares (ou LMIs) que caso sejam factíveis asseguram a estabilidade do sistema.

Utilizando funcionais de Lyapunov-Krasovskii, obteve-se quatro novos teoremas para a verificação da estabilidade do sistema. Primeiramente são desenvolvidas duas condições, uma dependente e outra independente do atraso presente considerando funcionais quadráticos no estado e independente dos parâmetros incertos do sistema. Em seguida, estas condições são estendidas para funcionais com dependência nos parâmetros incertos do sistema, onde esses funcionais podem ser quaisquer funções polinomiais dos parâmetros. Para estes quatro casos, as condições apresentadas são descritas em termos de LMIs. Destaca-se que nenhuma dessas condições utiliza transformações na representação original do sistema, como representação com atraso distribuído, e tão pouco limitantes superiores do produto interno de dois vetores para

completar formas quadráticas.

Para possibilitar uma formulação convexa na análise de estabilidade de sistemas mais complexos, como aqueles com dependência racional no vetor de parâmetros incertos, empregou-se a Representação por Diferenças Algébricas (ou DAR) na qual os termos não-lineares no vetor de parâmetros incertos são definidos como variáveis algébricas na representação por variáveis de estado do sistema. Utilizou-se o lema de Finsler para inserir essas restrições algébricas (provenientes de representações DAR) levando à obtenção de condições de estabilidade em termos de um conjunto finito de restrições LMIs que são resolvidas numericamente através de pacotes computacionais disponíveis na literatura de controle.

Ao longo da dissertação são introduzidos alguns exemplos numéricos com o objetivo de demonstrar alguns conceitos básicos e também a aplicação do método proposto na análise de estabilidade de sistemas discretos lineares incertos sujeitos a atraso de transporte.

A seguir são apresentadas as principais contribuições desta dissertação:

- Formulação convexa sem utilizar transformação do modelo para sistemas com atraso distribuído;
- Utilização de funcionais de Lyapunov com dependência polinomial;
- Admite-se que o sistema possa depender de forma racional do vetor de parâmetros incertos do sistema.

Em comparação com outros métodos propostos, as condições apresentadas mostram-se eficientes e menos conservadoras. Observa-se que a redução do conservadorismo é obtida com a utilização de funcionais de Lyapunov-Krasovskii mais complexos (i.e., com dependência paramétrica) implicando em maior complexidade computacional em relação a condições sem a dependência de parâmetros. Vale salientar que existem poucos métodos e exemplos disponíveis na literatura de controle abordando sistemas com atraso em tempo discreto, dificultando estudos comparativos sobre o grau de conservadorismo da metodologia proposta.

Os resultados apresentados neste trabalho foram submetidos à revista *SBA - CONTROLE & AUTOMAÇÃO*, cujo artigo está anexado no apêndice B.

5.2 Trabalhos Futuros

Esta dissertação concentrou-se na análise de estabilidade de sistemas discretos incertos sujeitos a um único atraso no estado, mas pode ser facilmente estendida para o caso com múltiplos atrasos. Além disso, os resultados apresentados foram concentrados na utilização de funcionais de Lyapunov-Krasovskii e a alternativa da utilização do Teorema de Razumikhin na análise de estabilidade desta classe de sistemas não foi verificada.

Em adição às considerações anteriores, pode-se destacar os seguintes futuros temas de pesquisa relacionais aos temas abordados neste trabalho:

- Estender as condições apresentadas para atrasos variantes no tempo;
- Analisar a estabilidade de sistemas não-lineares discretos com atraso através da modelagem das não-linearidades como parâmetros variantes no tempo (representação *Quasi-LPV*);
- Incluir condições de estabilidade para analisar sistemas discretos com atraso em malha fechada na presença de saturação do sinal de controle utilizando condições de setor;
- Desenvolver métodos de síntese de compensadores e observadores de estado (filtros) para aplicações em sistemas de controle mais genéricos.

Referências

- [1] K. A. Barbosa and A. Trofino. Síntese H_∞ para sistemas com restrições algébricas no estado. *Revista Controle e Automação*, 14(3):254–261, 2003.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM books, 1994.
- [3] W. H. Chen, Z. H. Guan, and X. Lu. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay. *IEE Proceedings-Control Theory Applications*, 150(4):412–416, 2004.
- [4] D. F. Coutinho. Técnicas de Controle Robusto – Aula 4. Notas de Aula de Técnicas de Controle Robusto - PPGEE (PUCRS), 2007.
- [5] D. F. Coutinho, A. S. Bazanella, A. Trofino, and A. S. Silva. Stability Analysis and Control of a Class of Differential-Algebraic Nonlinear Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(16):1301–1326, 2004.
- [6] D. F. Coutinho, C. E. de Souza, and K. A. Barbosa. Improved Robust H_∞ Filter Design for Discrete-Time Linear Parameter Varying Systems. In *Preprints of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Iguassu Falls, Brazil, 2007.

- [7] D. F. Coutinho, C. E. de Souza, and A. Trofino. Regional Stability Analysis of Implicit Polynomial Systems. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006.
- [8] M. C. de Oliveira and R. Skelton. Stability tests for constrained linear systems (Lecture Notes in Control and Information Science). In S. O. R. Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, pages 241–257. Springer-Verlag, 2001.
- [9] P. M. DeRusso, R. J. Joy, C. M. Close, and A. A. Desrochers. *State Variables for Engineers*. John Wiley & Sons, 1998.
- [10] G. E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory*. Springer-Verlag New York, 1999.
- [11] L. El Ghaoui and G. Scorletti. Control of Rational Systems using Linear-Fractional Representations and LMIs. *Automatica*, 32(9):1273–1284, 1996.
- [12] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter-Dependent Lyapunov Functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041–1046, 1996.
- [13] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley Longman, 1998.
- [14] E. Fridman. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *System & Control Letters*, 43(4):309–319, 2001.
- [15] E. Fridman and U. Shaked. An LMI approach to stability of discrete delay systems. In *Proc. Eur. Contr. Conf. (ECC'03)*, pages 1–6, Cambridge, United Kingdom, 2003.
- [16] E. Fridman and U. Shaked. Parameter Dependent Stability and Stabilization of Uncertain Time-Delay Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5):861–866, 2003.

- [17] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442, 1996.
- [18] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox – For Use with MATLAB*. MathWorks, Natick, United States, 1995.
- [19] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhauser, 2003.
- [20] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [21] Y. S. Lee and W. H. Kwon. Delay-dependent robust stabilization of uncertain discrete-time state-delayed systems . In *Proceedings XV Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [22] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In *Proc. American Control Conference*, 2004.
- [23] J. Löfberg. YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB . In *Proceedings of the CACSD Conferences*, Taipei, Taiwan, 2004.
- [24] C. Lien and J. Chen. Discrete-Delay-Independent and Discrete-Delay-Dependent Criteria for a Class of Neutral Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 125(1):33–41, 2003.
- [25] M. Mansour. Discrete-time and sampled-data stability tests. In W. S. Levine, editor, *The Control Handbook*, pages 146–151. CRC–Press, 1996.
- [26] R. M. Palhares, C. D. Campos, P. Y. Ekel, M. C. R. Leles, and M. F. S. V. D’Angelo. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear systems with lumped delays. 152(1):27–33, 2005.

- [27] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A Less conservative LMI condition for Robust Stability of discrete-time Uncertain Systems. *System & Control Letters*, 43:371–378, 2001.
- [28] S. Sastry. *Nonlinear Systems - Analysis, Stability and Control*. Springer-Verlag New York, 1999.
- [29] J. F. Sturm, O. Romanko, and I. Pólik. SeDuMi, version 1.1R3. Online – <http://sedumi.mcmaster.ca/>, 2006.
- [30] T. Su and C. Huang. Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(10):1656–1659, 1992.
- [31] Y. S. Suh, Y. S. Ro, H. J. Kang, and H. H. Lee. Necessary and Sufficient Stability Condition of Discrete State Delay Systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2(4):501–508, 2004.
- [32] V. Suplin, E. Fridman, and U. Shaked. H_∞ Control of Linear Uncertain Time-Delay Systems-A Projection Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(4):680–685, 2006.
- [33] A. Trofino and C. E. de Souza. Biquadratic Stability of Uncertain Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1303–1307, 2001.
- [34] H. D. Tuan, P. Apkarian, and T. Q. Nguyen. Robust Filtering for Uncertain Nonlinearly Parameterized Plants. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(7):1806–1815, 2003.
- [35] F. Wu and S. Prajna. SOS-based solution approach to polynomial LPV system analysis and synthesis problems. *International Journal of Control*, 78(8):600–611, 2005.
- [36] S. Xu, J. Lam, and C. Yang. Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete-Time Systems With State Delay. *System & Control Letters*, 43(2):77–84, 2001.

- [37] S. Yang, X. Zhengrong, C. Quingwei, and H. Weili. Dynamic output feedback control of discrete switched system with time delay. In *Proceedings of the V World Congress on Intelligent Control*, pages 1088–1091, Hangzhou, China, 2004.
- [38] Q. Zhong. *Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer-Verlag London, 2006.
- [39] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- [40] S. Zhou and T. Li. Robust Stabilization for Delayed Discrete-Time Fuzzy Systems Via Basis-Dependent Lyapunov-Krasovskii Function. 151(1):139–153, 2004.

Apêndice A

Exemplos

A resolução dos exemplos demonstrativos desta dissertação são apresentados neste apêndice. Para solução destes exemplos foi utilizado *MatLab* em conjunto com *Yalmip (Parser)* [23] e *SeDuMi (Solver)* [29], permitindo a resolução das LMIs.

A.1 Exemplo 4

A solução deste exemplo foi realizada de duas formas. Primeiramente utilizou-se o Teorema 5 e em seguida usando o mesmo teorema, supõe-se que o sistema seja invariante no tempo e as matrizes P e Q são dependentes dos vértices do polítopo. Os resultados são obtidos a partir da programação apresentada em A.1.1 e A.1.2.

A.1.1 Exemplo 4.1

```
yalmip('clear');  
clear all;  
I2=eye(2,2);  
Z2=zeros(2,2);  
Z4=zeros(4,2);  
LIM_INF=500;  
LIM_SUP=510;  
for aux = LIM_INF:LIM_SUP  
ALFA=aux/100;
```

```

A=[-0.5 -0.4; 0.2 -0.6];
Ad=[0.3 0.1; -0.1 0.1];
Na=[0.15 0.1];
Nd=[0.2 0.1];
M=[0.3;0.1];
D_A=ALFA*M*Na;
D_Ad=ALFA*M*Nd;
A11=A+D_A;
A12=Ad+D_Ad;
A21=A-D_A;
A22=Ad-D_Ad;
ops = sdpsettings;
ops = sdpsettings('solver','sedumi');
W1=[-I2 A11 A12];
W2=[-I2 A21 A22];
P = sdpvar(2,2,'symmetric');
Q = sdpvar(2,2,'symmetric');
L = sdpvar(6,2,'full');
F = set(P > 0) + set(Q > 0) ...
+ set(([P Z2 Z2 ; Z2 (-P+Q) Z2; Z2 Z2 -Q ]+L*W1+W1'*L')<0)...
+ set(([P Z2 Z2 ; Z2 (-P+Q) Z2; Z2 Z2 -Q ]+L*W2+W2'*L')<0);
DIAGNOSTIC = solvesdp(F, [], ops);
SOLUCAO(1,aux-LIM_INF+1)=DIAGNOSTIC.problem;
SOLUCAO(2,aux-LIM_INF+1)=ALFA;
if min(checkset(F))<0
    SOLUCAO(3,aux-LIM_INF+1)=1
else
    SOLUCAO(3,aux-LIM_INF+1)=0
end
end
end

```

A.1.2 Exemplo 4.2

```

yalmip('clear');
clear all;
I2=eye(2,2);
Z2=zeros(2,2);
Z24=zeros(2,4);
Z4=zeros(4,4);
Z1=zeros(2,1);
Nx=[zeros(2) eye(2)];
Ne=[eye(2) zeros(2)];
ops = sdpsettings;
ops = sdpsettings('solver','sedumi');

```



```

LIM_INF=570;
LIM_SUP=585;
for aux = LIM_INF:LIM_SUP
ALFA=aux/100;
A=[-0.5 -0.4; 0.2 -0.6];
Ad=[0.3 0.1; -0.1 0.1];
Na=[0.15 0.1];
Nd=[0.2 0.1];
M=[0.3;0.1];
D_A=ALFA*M*Na;
D_Ad=ALFA*M*Nd;
A11=A+D_A;
A12=Ad+D_Ad;
A21=A-D_A;
A22=Ad-D_Ad;
F1=eye(2)
W1=[Nx -A11*Nx -A12*Nx; Z24 Ne-F1*Nx Z24; ...
Ne-F1*Nx Z24 Z24; Z24 Z24 Ne-F1*Nx];
W2=[Nx -A21*Nx -A22*Nx; Z24 Ne-F1*Nx Z24; ...
Ne-F1*Nx Z24 Z24; Z24 Z24 Ne-F1*Nx];
Psi=[Ne-F1*Nx;zeros(2,4)]
P = sdpvar(4,4,'symmetric');
Q = sdpvar(4,4,'symmetric');
P1 = sdpvar(4,4,'symmetric');
Q1 = sdpvar(4,4,'symmetric');
Lp = sdpvar(4,4,'full');
Lq = sdpvar(4,4,'full');
L = sdpvar(12,8,'full');
F = set(([P Z4 Z4; Z4 (-P+Q) Z4; Z4 Z4 -Q]+L*W1+W1'*L')<0)...
+ set(([P1 Z4 Z4; Z4 (-P1+Q1) Z4; Z4 Z4 -Q1]+L*W2+W2'*L')<0)...
+ set(P + Lp*Psi + Psi'*Lp'> 0) ...
+ set(Q + Lq*Psi + Psi'*Lq'> 0) ...
+ set(P1 + Lp*Psi + Psi'*Lp'> 0) ...
+ set(Q1 + Lq*Psi + Psi'*Lq'> 0);
DIAGNOSTIC = solvesdp(F, [],ops);
SOLUCAO(1,aux-LIM_INF+1)=DIAGNOSTIC.problem
SOLUCAO(2,aux-LIM_INF+1)=ALFA
if min(checkset(F))<0
    SOLUCAO(3,aux-LIM_INF+1)=1
else
    SOLUCAO(3,aux-LIM_INF+1)=0
end
end

```

A.2 Exemplo 5

```

yalmip('clear');
clear all;
LIM_INF=40
LIM_SUP=50
ops = sdpsettings;
ops = sdpsettings('solver','sedumi');
for aux = LIM_INF:LIM_SUP
tau=aux-1;
I2=eye(2,2);
Z2=zeros(2,2);
A=[0.8 0; 0 0.91];
Ad=[-0.1 0; -0.1 -0.1];
Ii=[-I2 A Ad Z2 Z2; Z2 I2 -I2 Z2 -tau*I2; I2 -I2 Z2 -I2 Z2];
P = sdpvar(2,2,'symmetric');
Q = sdpvar(2,2,'symmetric');
S = sdpvar(2,2,'symmetric');
L = sdpvar(10,6,'full');
F = set(P > 0) + set(Q > 0) + set(S > 0) ...
+ set([(P) Z2 Z2 Z2 Z2; Z2 (-P+Q) Z2 Z2 Z2; ...
Z2 Z2 -Q Z2 Z2; Z2 Z2 Z2 tau*S Z2; Z2 Z2 Z2 Z2...
-tau*S]+L*Ii+Ii'*L')<0);
DIAGNOSTIC = solvesdp(F, [], ops);
SOLUCAO(1,aux-LIM_INF+1)=DIAGNOSTIC.problem;
SOLUCAO(2,aux-LIM_INF+1)=tau;
if min(checkset(F))<0
    SOLUCAO(3,aux-LIM_INF+1)=1
else
    SOLUCAO(3,aux-LIM_INF+1)=0
end
end
end

```

A.3 Exemplo 6

```

yalmip('clear')
clear all;
I2=eye(2,2);
Z2=zeros(2,2);
ops = sdpsettings;
ops = sdpsettings('solver','sedumi');
for aux = 1:20 tau=aux-1;
D=0.1;
A11=[0.8 0; 0 0];
A12=[-0.1 0; -0.1 -0.1];

```

```

A13=[0; 0.97*(0.8+D)];
OM11=[0 1];
OM12=[0 0];
OM13=[-1+D];
D=0;
A21=[0.8 0; 0 0];
A22=[-0.1 0; -0.1 -0.1];
A23=[0; 0.97*(0.8+D)];
OM21=[0 1];
OM22=[0 0];
OM23=[-1+D];
Z1=zeros(2,1);
W1=[-I2 A11 A12 Z2 Z2 A13; Z2 I2 -I2 Z2 -tau*I2 Z1;...
I2 -I2 Z2 -I2 Z2 Z1; 0 0 OM11 OM12 0 0 0 0 OM13];
W2=[-I2 A21 A22 Z2 Z2 A23; Z2 I2 -I2 Z2 -tau*I2 Z1;...
I2 -I2 Z2 -I2 Z2 Z1; 0 0 OM21 OM22 0 0 0 0 OM23];
P = sdpvar(2,2,'symmetric');
Q = sdpvar(2,2,'symmetric');
S = sdpvar(2,2,'symmetric');
P2 = sdpvar(2,2,'symmetric');
Q2 = sdpvar(2,2,'symmetric');
S2 = sdpvar(2,2,'symmetric');
L = sdpvar(11,7,'full');
F = set(P > EPSS) + set(Q > 0) + set(S > 0) ...
+ set(([P Z2 Z2 Z2 Z2 Z1; Z2 (-P+Q) Z2 Z2 Z2 Z1;...
Z2 Z2 -Q Z2 Z2 Z1; Z2 Z2 Z2 tau*S Z2 Z1; ...
Z2 Z2 Z2 Z2 -tau*S Z1; zeros(1,11)]+L*W1+W1'*L')<0)...
+ set(([P2 Z2 Z2 Z2 Z2 Z1; Z2 (-P2+Q2) Z2 Z2 Z2 Z1;...
Z2 Z2 -Q2 Z2 Z2 Z1; Z2 Z2 Z2 tau*S2 Z2 Z1;...
Z2 Z2 Z2 Z2 -tau*S2 Z1; zeros(1,11)]+L*W2+W2'*L')<0)...
DIAGNOSTIC = solvesdp(F, [],ops);
SOLUCAO(1,aux)=DIAGNOSTIC.problem;
SOLUCAO(2,aux)=tau;
if min(checkset(F))<0
    SOLUCAO(3,aux)=1
else
    SOLUCAO(3,aux)=0
end
end
end

```

A.4 Exemplo 7

```

yalmip('clear');
clear all;
I2=eye(2,2);

```

```

Z2=zeros(2,2);
Z24=zeros(2,4);
Z26=zeros(2,6);
Z46=zeros(4,6);
Z42=zeros(4,2);
Z4=zeros(4,4);
Z6=zeros(6);
Z2=zeros(2);
Z1=zeros(2,1);
Nx=[zeros(2,4) eye(2)];
Ne=[eye(4) zeros(4,2)];
ops = sdpsettings
ops = sdpsettings('solver','sedumi');
LIM_INF=360;
LIM_SUP=380;
for aux = LIM_INF:LIM_SUP
ALFA=1.2;
BETA=(aux-1)/100;
A0=[-0.5 -0.4; 0.2 -0.6];
Ad0=[0.3 0.1; -0.1 0.1];
A1=[0.045 0.03;0.015 0.01];
Ad1=[0 0;0 0];
A2=[0 0;0 0];
Ad2=[0.06 0.03;0.02 0.01];
At1 = A0 + ALFA*A1;
Adt1 = Ad0 + BETA*Ad2;
At2 = A0 - ALFA*A1;
Adt2 = Ad0 - BETA*Ad2;
F11=[+ALFA 0;0 +ALFA;+BETA 0;0 +BETA];
F12=[+ALFA 0;0 +ALFA;-BETA 0;0 -BETA];
F13=[-ALFA 0;0 -ALFA;+BETA 0;0 +BETA];
F14=[-ALFA 0;0 -ALFA;-BETA 0;0 -BETA];
W1=[Nx -At1*Nx -Adt2*Nx; Z46 Ne-F11*Nx Z46;...
Ne-F11*Nx Z46 Z46; Z46 Z46 Ne-F11*Nx];
W2=[Nx -At1*Nx -Adt2*Nx; Z46 Ne-F12*Nx Z46;...
Ne-F12*Nx Z46 Z46; Z46 Z46 Ne-F12*Nx];
W3=[Nx -At2*Nx -Adt1*Nx; Z46 Ne-F13*Nx Z46;...
Ne-F13*Nx Z46 Z46; Z46 Z46 Ne-F13*Nx];
W4=[Nx -At2*Nx -Adt2*Nx; Z46 Ne-F14*Nx Z46;...
Ne-F14*Nx Z46 Z46; Z46 Z46 Ne-F14*Nx];
Psi1=[Ne-F11*Nx];
Psi2=[Ne-F12*Nx];
Psi3=[Ne-F13*Nx];
Psi4=[Ne-F14*Nx];
P = sdpvar(6,6,'symmetric');

```

```

Q = sdpvar(6,6,'symmetric');
P1 = sdpvar(6,6,'symmetric');
Q1 = sdpvar(6,6,'symmetric');
Lp = sdpvar(6,4,'full');
Lq = sdpvar(6,4,'full');
L = sdpvar(18,14,'full');
F = set([P Z6 Z6; Z6 (-P+Q) Z6; Z6 Z6 -Q]+L*W1+W1'*L')<0)...
+ set([P Z6 Z6; Z6 (-P+Q) Z6; Z6 Z6 -Q]+L*W2+W2'*L')<0)...
+ set([P Z6 Z6; Z6 (-P+Q) Z6; Z6 Z6 -Q]+L*W3+W3'*L')<0)...
+ set([P Z6 Z6; Z6 (-P+Q) Z6; Z6 Z6 -Q]+L*W4+W4'*L')<0)...
+ set([P + Lp*Psi1 + Psi1'*Lp'> 0)...
+ set([P + Lp*Psi2 + Psi2'*Lp'> 0)...
+ set([P + Lq*Psi3 + Psi3'*Lq'> 0)...
+ set([P + Lq*Psi4 + Psi4'*Lq'> 0)...
+ set([Q + Lp*Psi1 + Psi1'*Lp'> 0)...
+ set([Q + Lp*Psi2 + Psi2'*Lp'> 0)...
+ set([Q + Lq*Psi3 + Psi3'*Lq'> 0)...
+ set([Q + Lq*Psi4 + Psi4'*Lq'> 0);
DIAGNOSTIC = solvesdp(F, [],ops);
SOLUCAO(1,aux-LIM_INF+1)=DIAGNOSTIC.problem;
SOLUCAO(2,aux-LIM_INF+1)=ALFA;
SOLUCAO(3,aux-LIM_INF+1)=BETA;
if min(checkset(F))<0
    SOLUCAO(4,aux-LIM_INF+1)=1
else
    SOLUCAO(4,aux-LIM_INF+1)=0
end
end
end

```

Apêndice B

Artigo Submetido

ESTABILIDADE ROBUSTA DE SISTEMAS LINEARES EM TEMPO DISCRETO SUJEITOS A ATRASO NO ESTADO

Maurício Zardo Oliveira*

mzardooliveira@yahoo.com.br

Daniel Ferreira Coutinho*

daniel@ee.pucrs.br

*Grupo de Automação e Controle de Sistemas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Av. Ipiranga 6681, Porto Alegre-RS, 90619-900, Brasil.

ABSTRACT

This paper addresses the robust stability analysis problem of uncertain discrete-time linear systems subject to state delay, where the system state-space representation is allowed to be a rational function of the uncertain parameters. The stability conditions are obtained from Lyapunov-Krasovskii functionals with polynomial parameter dependence by means of nonlinear decompositions of rational vector functions. The proposed results are divided into delay dependent and delay independent, and they are expressed in terms of linear matrix inequalities (LMIs) constraints.

KEYWORDS: State delay, Uncertain Discrete-time Systems, Robustness, LMIs.

RESUMO

Este artigo aborda o problema de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares discretos sujeitos a atraso de transporte e incertezas paramétricas que podem aparecer de forma racional na representação por espaço de estados do sistema. As condições de estabilidade são baseadas em funcionais de Lyapunov-Krasovskii e são obtidas através da aplicação de decomposições não lineares de funções vetoriais racionais. As condições de estabilidade propostas podem ser dependentes e independentes do atraso e são expressas através de desigualdades matriciais lineares (ou LMIs).

KEYWORDS: Atraso de Transporte, Sistemas Lineares Incertos em Tempo Discreto, Robustez, LMIs.

1 INTRODUÇÃO

Modelos de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas e atrasos de transporte são amplamente encontrados em diversas áreas de conhecimento, como por exemplo, matemática, engenharia, física, economia e biologia [1]. Recentemente, a análise de estabilidade destes sistemas tem despertado grande interesse na área de pesquisa de sistemas de controle [2].

Ao realizar o projeto de controle, geralmente é desejável a garantia de estabilidade e desempenho dentro dos parâmetros físicos incertos do sistema [3]. Sabe-se que, além das incertezas, atrasos de transporte prejudicam o desempenho do sistema, podendo levar a instabilidade do sistema em malha fechada [4]. Conseqüentemente, a não inserção do atraso de transporte na fase de projeto do controlador, pode prejudicar a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada.

No caso de sistemas em tempo discreto, o problema de estabilidade em sistemas com atraso pode ser facilmente contornado através da inserção de pólos na origem na (matriz) função de transferência do sistema. Entretanto, em muitas situações, esta solução não é adequada ou até mesmo não pode ser aplicada. Por exemplo, sistemas na qual o atraso de transporte é várias vezes superior a taxa de amostragem, a inserção de pólos na origem resulta em um sistema de ordem elevada, o que dificulta a utilização de técnicas de otimização convexa na solução de problemas de controle. Além disso, quando o atraso não é perfeitamente conhecido ou quando a incerteza é variante no tempo, existe uma dificuldade em representar um sistema equivalente sem o atraso [5].

Quando o atraso de transporte não pode ser considerado através da elevação da inserção de integradores discretos, em geral, utilizam-se condições suficientes para provar a estabilidade de sistemas sujeitos a atrasos de transporte de maneira similar ao caso contínuo [1]. Basicamente, existem dois tipos de condições suficientes para analisar a estabilidade: condições que são dependentes e independentes do atraso de transporte [4]. A condição independente do atraso verifica estabilidade do sistema para qualquer valor do atraso de transporte, enquanto que a condição dependente do atraso é menos conservadora, pois o sistema é estável desde que o atraso de transporte não ultrapasse um determinado valor. Tais condições são baseadas em diferentes modelos e transformações, e o sistema é geralmente descrito em termos de equações a diferenças funcionais levando aos conceitos de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii e Lyapunov-Razumikhin [1]. Nota-se, através de uma análise na recente bibliografia de sistemas com atraso, que a descrição do problema em termos de desigualdades matriciais lineares (ou LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities* [6]) tem sido uma das abordagens mais empregadas para a obtenção de condições de análise e síntese de controle para sistemas com atraso. Por exemplo, os resultados apresentados em [7, 8, 2] utilizam uma representação da dinâmica do sistema através de modelos de sistemas descritores (incluindo a classe de sistemas neutros), e em [9] são propostas condições de estabilidade independentes do atraso para sistemas descritos por lógica difusa.

Salienta-se que vários esforços têm sido realizados com o objetivo de reduzir o conservadorismo das condições de estabilidade. Em especial, estes esforços têm sido direcionados na busca de técnicas dependentes de parâmetros para determinar a estabilidade de sistemas com incertezas de forma politópica [10]. Entretanto, grande parte destes resultados foram desenvolvidos para sistemas em tempo contínuo, como por exemplo, as referências [10, 11]. Porém, é conveniente desenvolver condições de estabilidade para sistemas em tempo discreto, visando implementações digitais em tempo real. Apesar do apelo prático, poucos métodos foram desenvolvidos para sistemas discretos, como visto em [4, 12, 8, 13].

Dentro deste cenário, o presente artigo propõe condições alternativas para estudar a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos em tempo discreto sujeitos a atrasos de transporte. As condições propostas são expressas em termos de restrições LMIs obtidas a partir de funcionais de Lyapunov-Krasovskii com dependência polinomial no vetor de parâmetros incertos do sistema. Nas próximas seções, os resultados são apresentados através da seguinte estrutura. A Seção 2 formula o problema a ser abordado no artigo. Na Seção 3, apresenta-se uma formulação LMI para tratar o problema de análise de estabilidade de sistemas discretos sujeitos a atraso

no estado, considerando funcionais de Lyapunov-Krasovskii quadráticos, enquanto, na Seção 4, consideram-se funcionais de Lyapunov-Krasovskii com dependência polinomial no vetor de parâmetros incertos do sistema. A Seção 5 ilustra a aplicação da metodologia proposta através de exemplos numéricos e por fim na Seção 6 são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras deste trabalho.

A seguinte notação será utilizada neste artigo. I_n representa uma matriz identidade de dimensão $n \times n$, 0_n e $0_{n \times m}$ representam matrizes de zeros com dimensão $n \times n$ e $n \times m$, respectivamente. Para uma matriz real P , P' representa a sua transposta, $\text{He}\{P\} := P + P'$, e $P > 0$ ($P \geq 0$) significa que P é uma matriz simétrica positiva definida (positiva semi-definida). Para um conjunto politópico Λ , a notação $\mathcal{V}(\Lambda)$ representa o conjunto de todos os vértices de Λ . Para uma seqüência $\phi_k : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, a norma de ϕ_k é definida como $\|\phi_k\|_\tau := \sup_{-\tau \leq k \leq 0} \|\phi(k)\|$ e x_k representa a seqüência de valores de $x(k)$ para $k \in [k - \tau, k]$. As dimensões de vetores e matrizes são omitidas sempre que elas podem ser determinadas pelo contexto.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere a seguinte classe de sistemas:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\lambda(k))x(k) + A_d(\lambda(k))x(k-\tau), \\ x(k) &= \phi_k, \lambda(k) = \tilde{\phi}_k, \forall k \in [-\hat{\tau}, 0], \end{aligned} \quad (1)$$

onde $x(k)$, $x(k-\tau) \in \mathbb{R}^n$ são os vetores de estados sem e com atraso, respectivamente, $\lambda(k) \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$ é o vetor de parâmetros incertos, $\tau \leq \mathbb{R}$ é um número inteiro positivo representando o atraso de transporte com $\tau \in [0, \hat{\tau}]$, e ϕ_k e $\tilde{\phi}_k$ são as seqüências de valores iniciais de $x(k)$ e $\lambda(k)$ entre $-\tau$ e 0. Supõe-se que o vetor de parâmetros incertos e sua variação

$$\delta\lambda(k) := \lambda(k+1) - \lambda(k),$$

são limitados a uma região politópica Λ com vértices conexos, i.e. $(\lambda(k), \delta\lambda(k)) \in \Lambda$, onde a notação $\lambda(k) \in \Lambda$ significa que $(\lambda(k), 0) \in \Lambda$. As matrizes $A(\cdot)$ e $A_d(\cdot)$ são funções racionais em $\lambda(k)$ com dimensões apropriadas e bem definidas para todo $\lambda(k) \in \Lambda$.

O problema a ser abordado neste artigo é o de determinar condições que asseguram a estabilidade robusta do sistema (1) para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k)) \in \Lambda$, considerando condições dependentes e independentes do atraso τ .

Com este objetivo, considere que a classe de sistemas acima definida possa ser representada pelas seguintes equações de diferenças e algébricas (doravante denominada de representação DAR [14]):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_1(\lambda)x(k) + A_2(\lambda)x(k-\tau) + A_3(\lambda)\pi(k) \\ 0 &= \Omega_1(\lambda)x(k) + \Omega_2(\lambda)x(k-\tau) + \Omega_3(\lambda)\pi(k) \end{aligned} \quad (2)$$

onde $\pi \in \mathbb{R}^m$ é um vetor auxiliar; e $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $\Omega_3 \in \mathbb{R}^{q \times m}$ são matrizes afins em $\lambda(k)$. Para que a representação acima seja bem definida, assume-se em relação a representação (2) que:

A1 A matriz $\Omega_3(\lambda)$ tem posto completo por colunas para todo $\lambda(k) \in \Lambda$.

A representação acima pode modelar toda a classe de funções vetoriais racionais na incerteza, sendo equivalente à representação NFT (*nonlinear fractional transformation*) proposta em [15], contrastando com a representação politópica com dependência linear nos parâmetros [16, 12]. Claramente, a representação politópica é um caso particular de (2) com $\pi = 0$. Analogamente, a representação DAR em (2) torna-se equivalente às representações LFT (*linear fractional transformation*) [17] e DAR em [18] quando as matrizes A_1, A_2 e A_3 são constantes e π é unicamente função da incerteza.

A seguir, para ilustrar a representação DAR, apresenta-se o seguinte exemplo.

Exemplo 1 Considere o seguinte sistema escalar:

$$x(k+1) = \frac{0.5 + \lambda^2}{1 + \lambda^3} x(k) + \frac{0.1}{1 + \lambda^2} x(k-\tau) \quad (3)$$

Definindo o vetor auxiliar $\pi(k)$ como

$$\pi(k) = \left[\frac{x(k)}{1+\lambda^3} \quad \frac{\lambda x(k)}{1+\lambda^3} \quad \frac{\lambda^2 x(k)}{1+\lambda^3} \quad \frac{x(k-\tau)}{1+\lambda^2} \quad \frac{\lambda x(k-\tau)}{1+\lambda^2} \right]',$$

obtem-se a representação em (2) com

$$A_1 = 0, A_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = 0,$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Omega_3(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \end{bmatrix},$$

e $\Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}'$.

A análise de estabilidade do sistema (1) será desenvolvida com base nos funcionais de Lyapunov-Krasovskii (FLK) [1]. Na análise de estabilidade de sistemas incertos sem a presença de atraso de transporte, o método de Lyapunov é largamente utilizado. Neste método, busca-se uma função $V(k, x(k))$, denominada de função de Lyapunov, que quantifica o desvio entre os estados e a solução trivial 0. Para sistemas com a presença de atraso de transporte, a análise de estabilidade é determinada seguindo o mesmo princípio,

porém o conceito de estado inicial é substituído por uma seqüência inicial $x(\theta)$ no intervalo $\theta \in [-\tau, 0]$ representada, neste artigo, por ϕ_k . Logo, para sistemas com atraso, busca-se um funcional $V(k, x_k)$ dependente de ϕ_k , medindo assim o desvio entre a seqüência x_k e a solução trivial 0. Este método é conhecido como Lyapunov-Krasovskii, e $V(k, x_k)$ é um funcional ao invés de uma função. O seguinte Lema caracteriza a estabilidade de sistemas com atraso segundo esta abordagem [1].

Lema 1 Considere o sistema (1). Se existir um funcional $V(k, x_k)$ contínuo e escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 satisfazendo as seguintes condições

$$\epsilon_1 \|\phi(0)\|^2 \leq V(k, \phi_k) \leq \epsilon_2 \|\phi_k\|_\tau^2, \quad (4)$$

$$\Delta V(k, \phi_k) \leq -\epsilon_3 \|\phi(0)\|^2, \quad (5)$$

para todo $(\lambda, \delta\lambda) \in \Lambda$, onde

$$\Delta V(k, x_k) := V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)),$$

então o sistema (1) é assintoticamente estável para todo λ pertencente a Λ .

3 ESTABILIDADE QUADRÁTICA

Nesta seção, trata-se do problema de análise de estabilidade considerando funcionais de Lyapunov-Krasovskii cujos termos são formas quadráticas em $x(k)$ e $x(k-\tau)$ e independentes da incerteza $\lambda(k)$. Em primeiro lugar, aborda-se o caso da estabilidade independente do atraso e em seguida o caso dependente do atraso.

3.1 Estabilidade Independente do Atraso

Considere que o funcional de Lyapunov-Krasovskii seja definido da seguinte forma:

$$V(x_k) = V_1(x) + V_2(x_k), \quad (6)$$

onde

$$V_1(x) = x(k)' P x(k), \quad (7)$$

$$V_2(x_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)' Q x(r), \quad (8)$$

com P e Q sendo matrizes simétricas a serem determinadas.

A variação de $V(x_k)$ é determinada através das seguintes relações

$$\Delta V_1(k) = x(k+1)' P x(k+1) - x(k)' P x(k), \quad (9)$$

$$\Delta V_2(k) = \sum_{r=k-\tau+1}^k x(r)' Q x(r) - \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)' Q x(r). \quad (10)$$

Desenvolvendo $\Delta V_2(k)$, tem-se:

$$\Delta V_2(k) = x(k)'Qx(k) - x(k-\tau)'Qx(k-\tau) \quad (11)$$

Então, a diferença do FLK fica na forma:

$$\Delta V(k) = \left[\begin{array}{l} x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) \\ + x(k)'Qx(k) - x(k-\tau)'Qx(k-\tau) \end{array} \right], \quad (12)$$

ou ainda

$$\Delta V(k) = \eta_1(k)' \Pi_1(P, Q) \eta_1(k), \quad (13)$$

sendo que $\eta_1(k) = [x(k+1)' \quad x(k)' \quad x(k-\tau)']'$ e

$$\Pi_1(P, Q) = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q - P & 0 \\ 0 & 0 & -Q \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Note que os elementos $x(k+1)$, $x(k)$, $x(k-\tau)$ do vetor auxiliar $\eta_1(k)$ são dependentes entre si, visto que eles estão relacionados pela dinâmica do sistema. Desta forma, considere a seguinte restrição sobre $\eta_1(k)$:

$$0 = [I_n \quad -A(\lambda) \quad -A_d(\lambda)] \eta_1(k). \quad (15)$$

A restrição acima em termos da representação DAR pode ser reescrita na seguinte forma

$$0 = \Psi_1(\lambda) \eta_{1_a}(k) \quad (16)$$

onde $\eta_{1_a}(k) = [\eta_1(k)' \quad \pi(k)']'$ e

$$\Psi_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & -A_1(\lambda) & -A_2(\lambda) & -A_3(\lambda) \\ 0 & \Omega_1(\lambda) & \Omega_2(\lambda) & \Omega_3(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

A partir da formulação acima, propõe-se o seguinte resultado, cujas condições para a análise de estabilidade robusta são independentes do atraso de transporte, onde o FLK é uma forma quadrática em x e x_k .

Teorema 1 Considere o sistema (1), com a sua representação DAR em (2) satisfazendo **A1**. Seja Λ um politopo com vértices conhecidos, que define os valores admissíveis da incerteza $\lambda(k)$. Suponha que existam matrizes $P > 0$, $Q > 0$ e L satisfazendo a seguinte LMI para todo $\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda)$.

$$\left[\begin{array}{cc} \Pi_1(P, Q) & 0 \\ 0 & 0_m \end{array} \right] + \text{He}\{L\Psi_1(\lambda)\} < 0, \quad (18)$$

onde as matrizes $\Pi_1(P, Q)$ e $\Psi_1(\lambda)$ são as definidas em (14) e (17), respectivamente.

Então, o sistema (1) é assintoticamente estável para qualquer τ e $\lambda \in \Lambda$.

Prova. Suponha que a LMI (18) é satisfeita para todo $\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda)$, então por convexidade ela também é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$.

Como P e Q são definidas positivas, então o funcional definido em (6) satisfaz

$$V(x, x_k) > 0. \quad (19)$$

Além disso, note que V_1 e V_2 são formas quadráticas em x e x_k , respectivamente. Portanto, existem escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 tais que:

$$\epsilon_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x, x_k) \leq \epsilon_2 \|x_k\|_\tau^2. \quad (20)$$

Agora, considere a LMI em (18) e a represente de forma compacta por $\Xi < 0$. Como ela é estrita, existe um escalar ϵ_3 tal que $\Xi + \epsilon_3 N_1' N_1 \leq 0$, onde N_1 é uma matriz constante tal que $N_1 \eta_{1_a}(k) = x(k)$, e.g.

$$N_1 = [0_n \quad I_n \quad 0_n \quad 0_{n \times m}].$$

Pré e pós-multiplicando $\Xi + \epsilon_3 N_1' N_1 \leq 0$ por $\eta_{1_a}(k)'$ e $\eta_{1_a}(k)$, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta V(x, x_k) \leq -\epsilon_3 \|x(k)\|^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad (21)$$

visto que $\Psi_1(\lambda) \eta_{1_a}(k) = 0$, e o resto da prova segue a partir do Lema 1. ■

3.2 Estabilidade Dependente do Atraso

Com o objetivo de obter condições de estabilidade dependentes de atraso, considere o seguinte funcional

$$V(x_k) = V_1(x) + V_2(x_k) + V_3(x_k), \quad (22)$$

onde V_1 e V_2 são como em (7) e (8), respectivamente, e

$$V_3(x_k) = \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k-1+\rho}^{k-1} y(r)' S y(r), \quad (23)$$

com S sendo uma matriz constante e simétrica a ser determinada e

$$y(r) = x(r+1) - x(r), \quad \forall r. \quad (24)$$

De maneira similar a seção anterior, a variação de $V_3(x_k)$, i.e. $\Delta V_3(x_k)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta V_3(x_k) &= \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k+\rho}^k y(r)' S y(r) \\ &- \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k+\rho-1}^{k-1} y(r)' S y(r) \\ &= y(k)' \tau S y(k) - \sum_{r=k-\tau}^{k-1} y(r)' S y(r). \end{aligned} \quad (25)$$

Portanto, a variação do funcional $V(x, x_k)$ em (22) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta V(x, x_k) = & \left[x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) \right. \\ & + x(k)'Qx(k) - x(k-\tau)'Qx(k-\tau) \\ & \left. + y(k)'\tau Sy(k) - \sum_{r=k-\tau}^{k-1} y(r)'Sy(r) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Por conveniência, todos os termos na expressão acima são colocados dentro do somatório em r , ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta V(x, x_k) = & \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \left[x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) \right. \\ & + x(k)'Qx(k) - x(k-\tau)'Qx(k-\tau) \\ & \left. + y(k)'\tau Sy(k) - y(r)'\tau Sy(r) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

De forma compacta, a equação (27) pode ser representada na seguinte maneira:

$$\Delta V(x, x_k) = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \eta_2(k, r)' \Pi_2(P, Q, S, \tau) \eta_2(k, r), \quad (28)$$

onde $\eta_2(k, r) = [x(k+1)' \quad x(k)' \quad x(k-\tau)' \quad y(k)' \quad y(r)']'$ e

$$\Pi_2(P, Q, S, \tau) = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q - P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau S \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Observa-se que os elementos de $\eta_2(k, r)$ são dependentes entre si e satisfazem a seguintes restrições:

$$0 = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \begin{bmatrix} I_n & -A & -A_d & 0 & 0 \\ I_n & -I_n & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & I_n & -I_n & 0 & -\tau I_n \end{bmatrix} \eta_2(k, r),$$

levando em conta a dinâmica do sistema em (1), a definição de $y(\cdot)$ em (24) e

$$\sum_{r=k-\tau}^{k-1} y(r) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} (x(r+1) - x(r)) = x(k) - x(k-\tau).$$

Considerando a representação DAR do sistema (1), as restrições acima tomam a seguinte forma

$$0 = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \Psi_2(\lambda, \tau) \eta_{2a}(k, r), \quad (30)$$

onde $\eta_{2a}(k, r) = [\eta_2(k, r)' \quad \pi(k)']'$ e

$$\Psi_2(\lambda, \tau) = \begin{bmatrix} I_n & -A_1 & -A_2 & 0 & 0 & -A_3 \\ 0 & \Omega_1 & \Omega_2 & 0 & 0 & \Omega_3 \\ I_n & -I_n & 0 & -I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & -I_n & 0 & -\tau I_n & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Com base nos resultados e considerações acima, o seguinte resultado para a análise de estabilidade robusta dependente do atraso é proposto.

Teorema 2 Considere o sistema (1), com a sua representação DAR em (2) satisfazendo **A1**. Seja Λ um politopo com vértices conhecidos, que define os valores admissíveis da incerteza $\lambda(k)$. Seja $\hat{\tau}$ o atraso de transporte máximo. Suponha que existam matrizes $P > 0$, $Q > 0$, $S > 0$, e L satisfazendo a seguinte LMI para todo $\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda)$.

$$\begin{bmatrix} \Pi_2(P, Q, S, \hat{\tau}) & 0 \\ 0 & 0_m \end{bmatrix} + \text{He}\{L\Psi_2(\lambda, \hat{\tau})\} < 0, \quad (32)$$

onde as matrizes $\Pi_2(P, Q, S, \hat{\tau})$ e $\Psi_2(\lambda, \hat{\tau})$ são as mesmas definidas em (29) e (31), respectivamente.

Então, o sistema (1) é assintoticamente estável para todo $\tau \in [0, \hat{\tau}]$ e todo $\lambda \in \Lambda$.

Prova. Suponha que a LMI (32) é satisfeita para todo $\lambda \in \mathcal{V}(\Lambda)$, então por convexidade ela também é satisfeita para todo $\lambda \in \Lambda$.

Como P, Q e S são definidas positivas, então o funcional definido em (22) satisfaz

$$V(x, x_k) > 0. \quad (33)$$

Como V_1 e V_2, V_3 são formas quadráticas em x e x_k , respectivamente, existem escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 tais que:

$$\epsilon_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x, x_k) \leq \epsilon_2 \|x_k\|_\tau^2. \quad (34)$$

Agora, considere a LMI em (32) e a represente de forma compacta por $\Xi < 0$. Como ela é estrita, existe um escalar ϵ_3 tal que $\Xi + \epsilon_3 N_2' N_2 \leq 0$, onde N_2 é uma matriz constante tal que $N_2 \eta_{2a}(k) = x(k)$, e.g.

$$N_2 = [0_n \quad I_n \quad 0_n \quad 0_n \quad 0_n \quad 0_{n \times m}].$$

Pré e pós-multiplicando $\Xi + \epsilon_3 N_2' N_2 \leq 0$ por $\eta_{2a}(k)'$ e $\eta_{2a}(k)$, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta V(x, x_k) \leq -\epsilon_3 \|x(k)\|^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad (35)$$

visto que $\Psi_2(\lambda, \tau) \eta_{2a}(k) = 0$, e o resto da prova segue a partir do Lema 1. ■

4 ESTABILIDADE DEPENDENTE DE PARÂMETROS

Nesta seção, os resultados apresentados na seção anterior são estendidos para funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes do vetor de parâmetros $\lambda(k)$. Os termos desses funcionais são formas quadráticas em $x(k)$ e $x(k-\tau)$ e polinomiais em $\lambda(k)$. Em primeiro lugar, aborda-se o caso da estabilidade independente do atraso e em seguida o caso dependente do atraso.

4.1 Estabilidade Independente do Atraso

Considere que o funcional de Lyapunov-Krasovskii seja definido da seguinte forma:

$$V(x_k, \lambda_k) = V_1(x(k), \lambda(k)) + V_2(x_k, \lambda_k), \quad (36)$$

onde

$$V_1(x(k), \lambda(k)) = x(k)' \mathcal{P}(\lambda(k)) x(k) \quad e \quad (37)$$

$$V_2(x_k, \lambda_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)' \mathcal{Q}(\lambda(r)) x(r), \quad (38)$$

$\mathcal{P}(\lambda)$ e $\mathcal{Q}(\lambda)$ são matrizes simétricas cujos elementos são funções polinomiais em λ .

Visando uma formulação convexa para o problema de análise de estabilidade robusta, as matrizes $\mathcal{P}(\lambda)$ e $\mathcal{Q}(\lambda)$ obedecem a seguinte estrutura:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Theta(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} \Theta(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Theta(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix}' Q \begin{bmatrix} \Theta(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix}, \quad (40)$$

onde $P \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ e $Q \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ são matrizes simétricas e constantes a serem determinadas, e $\Theta(\lambda) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é uma matriz dada cujos elementos são funções polinomiais em λ .

Definindo o vetor auxiliar $\xi(x, \lambda) := \Theta(\lambda)x$, tem-se que os elementos de $\xi(x, \lambda)$ são funções polinomiais em λ . Portanto, existe uma representação na forma DAR para $\xi(x, \lambda)$ na seguinte forma [19]:

$$\begin{aligned} \xi(x, \lambda) &= F_1(\lambda)x + F_2(\lambda)g(x, \lambda) \\ 0 &= \Phi_1(\lambda)x + \Phi_2(\lambda)g(x, \lambda) \end{aligned} \quad (41)$$

onde $g(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{m_g}$ é um vetor auxiliar contendo monômios de grau maior do que 2 em x e λ ; e $F_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$; e $F_2 \in \mathbb{R}^{p \times m_g}$, $\Phi_1 \in \mathbb{R}^{q_g \times n}$ e $\Phi_2 \in \mathbb{R}^{q_g \times m_g}$ são matrizes afins no vetor λ .

Para que a representação acima seja bem definida, assume-se de maneira similar a representação em (2) que:

A2 A matriz $\Phi_2(\lambda)$ tem posto completo por colunas para todo $\lambda(k) \in \Lambda$.

Note que a representação (41) pode ser aplicada para qualquer x e λ computados nos instantes k , $k+1$ e $k-\tau$, isto é, para $\xi(k) = \Theta(k)x(k)$, $\xi(k+1) = \Theta(k+1)x(k+1)$ e $\xi(k-\tau) = \Theta(k-\tau)x(k-\tau)$.

Por conveniência, definem-se os seguintes vetores auxiliares:

$$v = \begin{bmatrix} \xi(k) \\ x(k) \end{bmatrix}, v_+ = \begin{bmatrix} \xi(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix}, v_\tau = \begin{bmatrix} \xi(k-\tau) \\ x(k-\tau) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Utilizando a notação acima, a diferença do funcional de Lyapunov-Krasovskii como definido em (36) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\Delta V(k) = v_+' P v_+ - v' P v + v' Q v - v_\tau' Q v_\tau,$$

ou na seguinte forma compacta, levando em consideração as representações em (2) e (41),

$$\Delta V(k) = \eta_3(k)' \Pi_3(P, Q) \eta_3(k), \quad (43)$$

onde $\eta_3(k) = [v_+' \ v' \ v_\tau' \ \pi(k)' \ g_+' \ g' \ g_\tau']' e$

$$\Pi_3(P, Q) = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q-P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{d_1} \end{bmatrix}.$$

onde $g = g(k)$, $g_+ = g(k+1)$, $g_\tau = g(k-\tau)$ e $d_1 = m + 3m_g$.

Observa-se que os elementos do vetor auxiliar $\eta_3(k)$ são dependentes entre si e, com base nas representações DARs em (2) e (41), satisfazem as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} x(k+1) - A_1(\lambda)x(k) - A_2(\lambda)x(k-\tau) - A_3(\lambda)\pi(k) &= 0 \\ \Omega_1(\lambda)x(k) + \Omega_2(\lambda)x(k-\tau) + \Omega_3(\lambda)\pi(k) &= 0 \\ \xi(k) - F_1(\lambda(k))x(k) - F_2(\lambda(k))g &= 0 \\ \xi(k+1) - F_1(\lambda+\delta\lambda)x(k+1) - F_2(\lambda+\delta\lambda)g_+ &= 0 \\ \xi(k-\tau) - F_1(\lambda(k-\tau))x(k-\tau) - F_2(\lambda(k-\tau))g_\tau &= 0 \\ \Phi_1(\lambda(k))x(k) + \Phi_2(\lambda(k))g &= 0 \\ \Phi_1(\lambda(k)+\delta\lambda(k))x(k+1) + \Phi_2(\lambda(k)+\delta\lambda(k))g_+ &= 0 \\ \Phi_1(\lambda(k-\tau))x(k-\tau) + \Phi_2(\lambda(k-\tau))g_\tau &= 0 \end{aligned}$$

as quais podem ser reescritas na seguinte forma compacta

$$\Psi_3(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \eta_3(k) = 0 \quad (44)$$

onde $\Psi_3(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) = [\psi_{1(i,j)}]$, $i = 1, \dots, 8$ e $j = 1, \dots, 7$, cujos blocos $\psi_{1(i,j)}$ são dados por

$$\begin{aligned}
\psi_{1(1,1)} &= N_x, & \psi_{1(1,2)} &= -A_1(\lambda(k))N_x, \\
\psi_{1(1,3)} &= -A_2(\lambda(k))N_x, & \psi_{1(1,4)} &= -A_3(\lambda(k)), \\
\psi_{1(2,2)} &= \Omega_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{1(2,3)} &= \Omega_2(\lambda(k))N_x, \\
\psi_{1(2,4)} &= \Omega_3(\lambda(k)), & \psi_{1(3,2)} &= N_\xi - F_1(\lambda(k))N_x, \\
\psi_{1(3,6)} &= -F_2(\lambda(k)), & \psi_{1(4,1)} &= N_\xi - F_1(\lambda + \delta\lambda)N_x, \\
\psi_{1(4,5)} &= -F_2(\lambda + \delta\lambda), & \psi_{1(5,3)} &= N_\xi - F_1(\lambda(k - \tau))N_x, \\
\psi_{1(5,7)} &= -F_2(\lambda(k - \tau)), & \psi_{1(6,2)} &= \Phi_1(\lambda(k))N_x, \\
\psi_{1(6,6)} &= \Phi_2(\lambda(k)), & \psi_{1(7,1)} &= \Phi_1(\lambda(k + 1))N_x, \\
\psi_{1(7,5)} &= \Phi_2(\lambda(k + 1)), & \psi_{1(8,3)} &= \Phi_1(\lambda(k - \tau))N_x, \\
\psi_{1(8,7)} &= \Phi_2(\lambda(k - \tau)), & &
\end{aligned}$$

sendo que as matrizes $\psi_{1(i,j)}$ não definidas acima são matrizes de zeros com dimensões apropriadas, e N_ξ e N_x são matrizes constantes tais que $N_\xi v(\cdot) = \xi(\cdot)$ e $N_x v(\cdot) = x(\cdot)$, como, por exemplo, as matrizes

$$N_\xi = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times n} \end{bmatrix}, N_x = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & I_n \end{bmatrix}.$$

A formulação acima leva ao seguinte resultado para a análise de estabilidade robusta, independente do atraso de transporte e dependente de parâmetros.

Teorema 3 Considere o sistema (1), com a sua representação DAR em (2) satisfazendo **A1**. Seja $\Theta(\lambda) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ uma dada matriz cujos elementos são funções polinômiais em λ , e considere a decomposição DAR em (41) satisfazendo **A2**. Seja Λ um politopo com vértices conhecidos, que define os valores admissíveis da incerteza $\lambda(k)$ e de sua variação $\delta\lambda(k)$. Suponha que existam matrizes $P = P'$, $Q = Q'$, L , M e W satisfazendo as seguintes LMIs para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k - \tau)) \in \mathcal{V}(\Lambda \times \Lambda)$.

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0_{m_g} \end{bmatrix} + \text{He}\{L\Upsilon_1(\lambda(k))\} > 0 \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0_{m_g} \end{bmatrix} + \text{He}\{M\Upsilon_1(\lambda(k))\} > 0 \quad (46)$$

$$\Pi_3(P, Q) + \text{He}\{W\Psi_3(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k - \tau))\} < 0 \quad (47)$$

onde

$$\Upsilon_1(\lambda) = \begin{bmatrix} N_\xi - F_1(\lambda)N_x & -F_2(\lambda) \\ \Phi_1(\lambda)N_x & \Phi_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema (1) é assintoticamente estável para qualquer $(\lambda, \delta\lambda) \in \Lambda$ e independente do atraso τ .

Prova. Suponha que as LMIs (45)-(47) estão satisfeitas para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k - \tau)) \in \mathcal{V}(\Lambda \times \Lambda)$, então por convexidade elas também estão satisfeitas para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k - \tau)) \in \Lambda \times \Lambda$.

Considere as LMIs (45) e (46) e defina o vetor auxiliar $\sigma_1 = [v' \ g']'$. Pré- e pós-multiplicando estas LMIs por σ_1' e

σ_1 , respectivamente, obtém-se:

$$V_1(x(k), \lambda(k)) = x(k)' \mathcal{P}(\lambda(k))x(k) > 0, \quad (48)$$

$$V_2(x_k, \lambda_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)' \mathcal{Q}(\lambda(r))x(r) > 0, \quad (49)$$

pois $\Upsilon_1(\lambda)\sigma_1 = 0$ para qualquer instante k .

Como os elementos das matrizes $\mathcal{P}(\lambda)$ e $\mathcal{Q}(\lambda)$ são limitados por suposição (i.e., $\lambda \in \Lambda$) existem escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 tais que:

$$\epsilon_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x, x_k) \leq \epsilon_2 \|x_k\|_\tau^2. \quad (50)$$

Agora, considere a LMI em (47) e a represente de forma compacta por $\tilde{\Xi} < 0$. Como ela é estrita, existe um escalar ϵ_3 tal que $\tilde{\Xi} + \epsilon_3 N_3' N_3 \leq 0$, onde N_3 é uma matriz constante tal que $N_3 \eta_3(k) = x(k)$. Pré e pós-multiplicando $\tilde{\Xi} + \epsilon_3 N_3' N_3 \leq 0$ por $\eta_3(k)'$ e $\eta_3(k)$, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta V(x, x_k) \leq -\epsilon_3 \|x(k)\|^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad (51)$$

visto que $\Psi_3(\cdot) \eta_3(k) = 0$, e o resto da prova segue a partir do Lema 1. ■

4.2 Estabilidade Dependente do Atraso

Afim de obter condições de estabilidade dependente do atraso e do vetor de parâmetros λ , considere o seguinte FLK

$$V(x_k, \lambda_k) = V_1(x(k), \lambda(k)) + V_2(x_k, \lambda_k) + V_3(x_k, \lambda_k), \quad (52)$$

onde V_1 e V_2 são os mesmos definidos em (37) e (38), respectivamente, e

$$V_3(x_k, \lambda_k) = \sum_{\rho=-\tau+1}^0 \sum_{r=k-1+\rho}^{k-1} \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix}' S \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix}, \quad (53)$$

onde $S \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ é uma matriz simétrica e constante a ser determinada, e

$$\xi_y(r) = \Theta(r+1)x(r+1) - \Theta(r)x(r). \quad (54)$$

De maneira similar a seção anterior, definem-se os seguintes vetores auxiliares:

$$w = \begin{bmatrix} \xi_y(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad e \quad w_r = \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix}, \quad (55)$$

levando a seguinte expressão para $\Delta V_3(x_k, \lambda_k)$:

$$\Delta V_3(x_k, \lambda_k) = w' \tau S w - \sum_{r=k-\tau}^{k-1} w_r' S w_r. \quad (56)$$

Utilizando a notação acima, a diferença do funcional definido em (52) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta V(x_k, \lambda_k) = v'_+ P v_+ - v' P v + v' Q v - v'_\tau Q v_\tau + w' \tau S w - \sum_{r=k-\tau}^{k-1} w'_r S w_r,$$

Por conveniência, todos os termos na expressão acima são colocados dentro do somatório em r , ou seja,

$$\Delta V(x_k, \lambda_k) = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \left[v'_+ P v_+ - v' P v + v' Q v - v'_\tau Q v_\tau + \tau (w' S w - w'_r S w_r) \right]. \quad (57)$$

Levando em consideração (2) e (41), $\Delta V(x_k, \lambda_k)$ pode ser representada na seguinte forma compacta

$$\Delta V(x_k, \lambda_k) = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \eta_4(k, r)' \Pi_4(P, Q, S, \tau) \eta_4(k, r), \quad (58)$$

onde $\eta_4(k, r) = [v'_+ \quad v' \quad v'_\tau \quad w \quad w_r \quad \pi(k)' \quad g'_+ \quad g'_\tau]'$, e

$$\Pi_4(P, Q, S, \tau) = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q-P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{d_1} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Note que os elementos do vetor auxiliar $\eta_4(k, r)$ são dependentes entre si e considerando a representação DAR (2) do sistema (1) é possível associar as restrições

$$0 = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \Gamma(\lambda) \eta_4(k, r), \quad (60)$$

onde

$$\Gamma(\lambda) = \begin{bmatrix} N_x & -A_1 N_x & -A_2 N_x & 0_{n \times d_2} & -A_3 & 0_{n \times d_3} \\ 0 & \Omega_1 N_x & \Omega_2 N_x & 0_{n \times d_2} & \Omega_3 & 0_{n \times d_3} \end{bmatrix}$$

sendo $d_2 = 2(n+p)$ e $d_3 = 3m_g$.

Com base nas representação DAR definida em (41), obtém-se as seguintes igualdades:

$$\frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \xi(\cdot) - F_1(\cdot)x(\cdot) - F_2(\cdot)g(\cdot) = 0$$

$$\frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \Phi_1(\cdot)x(\cdot) + \Phi_2(\cdot)g(\cdot) = 0$$

De maneira similar, levando em conta a definição de $y(\cdot)$ em (24) e definindo os seguintes vetores auxiliares:

$$v_r = \begin{bmatrix} \xi(r) \\ x(r) \end{bmatrix} \text{ e } v_{r+} = \begin{bmatrix} \xi(r+1) \\ x(r+1) \end{bmatrix},$$

então $w = v_+ - v$ e

$$\sum_{r=k-\tau}^{k-1} w_r = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} (v_{r+} - v_r) = v - v_\tau.$$

Considerando a representação DAR do sistema em (2) e de $\xi(\cdot)$ em (41), as restrições acima podem ser reescritas na seguinte forma compacta

$$0 = \frac{1}{\tau} \sum_{r=k-\tau}^{k-1} \Psi_4(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau), \tau) \eta_4(k, r) \quad (61)$$

onde $\Psi_4(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau), \tau) = [\psi_{2(i,j)}]$, $i = 1, \dots, 10$ e $j = 1, \dots, 9$, cujos blocos $\psi_{2(i,j)}$ são dados por

$$\begin{aligned} \psi_{2(1,1)} &= N_x, & \psi_{2(1,2)} &= -A_1(\lambda(k))N_x, \\ \psi_{2(1,3)} &= -A_2(\lambda(k))N_x, & \psi_{2(1,6)} &= -A_3(\lambda(k)), \\ \psi_{2(2,2)} &= \Omega_1(\lambda(k))N_x, & \psi_{2(2,3)} &= \Omega_2(\lambda(k))N_x, \\ \psi_{2(2,6)} &= \Omega_3(\lambda(k)), & \psi_{2(3,2)} &= N_\xi - F_1(\lambda(k))N_x, \\ \psi_{2(3,8)} &= -F_2(\lambda(k)), & \psi_{2(4,1)} &= N_\xi - F_1(\lambda + \delta\lambda)N_x, \\ \psi_{2(4,7)} &= -F_2(\lambda + \delta\lambda), & \psi_{2(5,3)} &= N_\xi - F_1(\lambda(k-\tau))N_x, \\ \psi_{2(5,9)} &= -F_2(\lambda(k-\tau)), & \psi_{2(6,2)} &= \Phi_1(\lambda(k))N_x, \\ \psi_{2(6,8)} &= \Phi_2(\lambda(k)), & \psi_{2(7,1)} &= \Phi_1(\lambda(k+1))N_x, \\ \psi_{2(7,7)} &= \Phi_2(\lambda(k+1)), & \psi_{2(8,3)} &= \Phi_1(\lambda(k-\tau))N_x, \\ \psi_{2(8,9)} &= \Phi_2(\lambda(k-\tau)), & \psi_{2(9,1)} &= I_{n+p}, \\ \psi_{2(9,2)} &= -I_{n+p}, & \psi_{2(9,4)} &= -I_{n+p}, \\ \psi_{2(10,2)} &= I_{n+p}, & \psi_{2(10,3)} &= -I_{n+p}, \\ \psi_{2(10,5)} &= -\tau I_{n+p}, \end{aligned}$$

e, similarmente a seção anterior, as matrizes $\psi_{2(i,j)}$ não definidas acima são matrizes de zeros com dimensões apropriadas.

Com base na formulação acima o seguinte resultado para para a análise de estabilidade robusta, dependente do atraso de transporte e dependente de parâmetros é proposto.

Teorema 4 Considere o sistema (1), com a sua decomposição DAR em (2) satisfazendo **A1**. Seja $\Theta(\lambda) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ uma dada matriz cujos elementos são funções polinomiais em λ e considere a representação DAR em (41) satisfazendo **A2**. Seja $\hat{\tau}$ o atraso de transporte máximo e Λ um politopo com vértices conhecidos, que define os valores admissíveis

da incerteza $\lambda(k)$ e de sua variação $\delta\lambda(k)$. Suponha que existam matrizes $P = P'$, $Q = Q'$, $S = S'$, L , M , T e W satisfazendo as seguintes LMIs para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \in \mathcal{V}(\Lambda \times \Lambda)$.

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0_{m_g} \end{bmatrix} + \text{He}\{L\Upsilon_1(\lambda(k))\} > 0 \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0_{m_g} \end{bmatrix} + \text{He}\{M\Upsilon_1(\lambda(k))\} > 0 \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0_{d_4} \end{bmatrix} + \text{He}\{T\Upsilon_2(\lambda(k), \delta\lambda(k))\} > 0 \quad (64)$$

$$\Pi_4(P, Q, S, \hat{\tau}) + \text{He}\{W\Psi_4(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau), \hat{\tau})\} < 0 \quad (65)$$

onde $d_4 = 2(n + p + m_g)$ e

$$\Upsilon_2(\lambda, \delta\lambda) = \begin{bmatrix} I_{n+p} & [I_{n+p} & 0] & [-I_{n+p} & 0] \\ 0 & \Upsilon_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \Upsilon_1(\lambda + \delta\lambda) \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema (1) é assintoticamente estável para todo $\tau \in [0, \hat{\tau}]$ e todo $(\lambda, \delta\lambda) \in \Lambda$.

Prova. Suponha que as LMIs (62)-(65) estão satisfeitas para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \in \mathcal{V}(\Lambda \times \Lambda)$, então por convexidade elas também estão satisfeitas para todo $(\lambda(k), \delta\lambda(k), \lambda(k-\tau)) \in \Lambda \times \Lambda$.

Utilizando a prova do Teorema 3, as LMIs (62) e (62) implicam que

$$V_1(x(k), \lambda(k)) = x(k)' \mathcal{P}(\lambda(k)) x(k) > 0, \quad (66)$$

$$V_2(x_k, \lambda_k) = \sum_{r=k-\tau}^{k-1} x(r)' \mathcal{Q}(\lambda(r)) x(r) > 0. \quad (67)$$

Agora, considere a LMI (64) e defina o vetor auxiliar $\sigma_2 = [w' \ v' \ g' \ v'_+ \ g'_+]'$. Pré- e pós-multiplicando esta LMI por σ_2' e σ_2 , respectivamente, obtém-se:

$$V_3(x_k, \lambda_k) = \sum_{p=-\tau+1}^0 \sum_{r=k-1+p}^{k-1} \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix}' S \begin{bmatrix} \xi_y(r) \\ y(r) \end{bmatrix} > 0, \quad (68)$$

pois $\Upsilon_2(\lambda, \delta\lambda)\sigma_2 = 0$ para qualquer instante k .

Como os elementos de V_1 , V_2 e V_3 são limitados por suposição (i.e., $(\lambda, \delta\lambda) \in \Lambda$) existem escalares positivos ϵ_1, ϵ_2 tais que:

$$\epsilon_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x, x_k) \leq \epsilon_2 \|x_k\|_\tau^2. \quad (69)$$

Agora, considere a LMI em (65) e a represente de forma compacta por $\tilde{\Xi} < 0$. Como ela é estrita, existe um escalar

ϵ_3 tal que $\tilde{\Xi} + \epsilon_3 N_4' N_4 \leq 0$, onde N_4 é uma matriz constante tal que $N_4 \eta_4(k, r) = x(k)$. Pré e pós-multiplicando $\tilde{\Xi} + \epsilon_3 N_4' N_4 \leq 0$ por $\eta_4(k, r)'$ e $\eta_4(k, r)$, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta V(x, x_k) \leq -\epsilon_3 \|x(k)\|^2, \quad \forall (\lambda, \delta\lambda) \in \Lambda, \quad (70)$$

visto que $\Psi_4(\cdot) \eta_4(k, r) = 0$, e o resto da prova segue a partir do Lema 1. ■

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir são apresentados dois exemplos numéricos com o objetivo de ilustrar a abordagem proposta.

Exemplo 1: Considere o Exemplo 1 proposto em [13], onde conclui-se que o sistema incerto é quadraticamente estável para $\tau = 2$. Uma representação politópica para este sistema, de acordo com a representação apresentada em (1), pode ser dada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} A(\lambda(k)) &= A \pm \alpha \Delta A \ e \\ A_d(\lambda(k)) &= A_d \pm \alpha \Delta A_d, \end{aligned}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 \\ 0.2 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0.045 & 0.03 \\ 0.015 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_d = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.03 \\ 0.02 & 0.01 \end{bmatrix},$$

e α é um dado escalar tal que o sistema é quadraticamente estável.

Para o sistema acima, aplica-se o resultado proposto no Teorema 1 e verifica-se que o sistema é assintoticamente estável independente do atraso τ para todo $\alpha \in [0, 5.1)$. Em contrapartida, o resultado apresentado em [13] prova que o sistema é assintoticamente estável para $\tau = 2$ e $\alpha = 1$. Agora, supondo que o sistema seja invariante no tempo e levando em consideração que as matrizes P e Q no Teorema 1 aparecem de forma isolada, pode-se fazer as matrizes P e Q dependentes dos vértices do politopo sem perda de convexidade. Neste caso, verifica-se que o sistema é assintoticamente estável independentemente do atraso para todo $\alpha \in [0, 5.8)$.

Exemplo 2: Considere o exemplo proposto em [8]. A este sistema inclui-se uma incerteza racional nos estados levando a seguinte representação:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.97 \frac{(0.8+\lambda)}{(1-\lambda)} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix} x(k-\tau)$$

onde $\lambda \in [0, 0.1]$.

Definindo-se $\pi = \left[\frac{x_2}{1-\lambda} \right]$, a representação DAR em (2) é definida com:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_d, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.97(0.8 + \lambda) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} -1 + \lambda \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se o Teorema 2 verifica-se que o sistema é assintoticamente estável para um atraso de transporte máximo $\hat{\tau} = 16$ para qualquer $\lambda \in [0, 0.1]$. Ressalta-se que pelo método apresentado em [8] encontra-se o mesmo atraso máximo $\hat{\tau}$ com $\lambda = 0.1$, porém neste método não são admitidas incertezas racionais no modelo.

6 CONCLUSÕES

Este artigo aborda o problema de estabilidade de sistemas lineares incertos em tempo discreto sujeitos a atraso no vetor de estados, onde admite-se que o sistema possa depender de forma racional do vetor de parâmetros incertos do sistema. Utilizando funcionais de Lyapunov-Krasovskii com dependência polinomial nos parâmetros, obtém-se condições de estabilidade dependente e independentes do atraso em termos de desigualdades matriciais lineares. Destaca-se que a metodologia proposta não utiliza nenhuma transformação para sistemas com atraso distribuído e nem limitantes superiores do produto cruzado de dois vetores a fim de obter condições convexas. Os resultados numéricos demonstram a aplicabilidade da metodologia proposta na análise de estabilidade de sistemas discretos lineares incertos sujeitos a atraso de transporte.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pelo apoio financeiro, durante a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] K. Gu, V.L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhauser, 2003.

[2] C. Lien and J. Chen. Discrete-Delay-Independent and Discrete-Delay-Dependent Criteria for a Class of Neutral Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 125:33–41, March 2003.

[3] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41(3):436–442, March 1996.

[4] W.-H. Chen, Z.-H. Guan, and X. Lu. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 150(4):412–416, 2003.

[5] Y. S. Suh, Y. S. Ro, H. J. Kang, and H. H. Lee. Necessary and Sufficient Stability Condition of Discrete State Delay Systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2(4):501–508, December 2004.

[6] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM books, 1994.

[7] E. Fridman. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letts.*, 41:309–319, February 2001.

[8] E. Fridman and U. Shaked. An LMI approach to stability of discrete delay systems. In *Proc. Eur. Contr. Conf. (ECC'03)*, pages 1–6, Cambridge, UK, 2003.

[9] S. Zhou and T. Li. Robust Stabilization for Delayed Discrete-Time Fuzzy Systems Via Basis-Dependent Lyapunov-Krasovskii Function. *Fuzzy Sets and Systems*, 151:139–153, September 2004.

[10] E. Fridman and U. Shaked. Parameter Dependent Stability and Stabilization of Uncertain Time-Delay Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 48(5):861–866, May 2003.

[11] V. Suplein, E. Fridman, and U. Shaked. H_∞ Control of Linear Uncertain Time-Delay Systems-A Projection Approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 51(4):680–685, April 2006.

[12] V.J.S. Leite and P.L.D. Peres. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In *Proc. American Control Conference*, pages 2870–2875, Boston, Ma, 2004.

[13] S. Xu, J. Lam, and C. Yang. Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete-Time Systems With State Delay. *Systems & Control Letts.*, 43:77–84, 2001.

[14] D.F. Coutinho, C.E. de Souza, and K.A. Barbosa. Improved Robust H_∞ Filter Design for Discrete-Time Linear Parameter Varying Systems. In *Preprints of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Iguaçu Falls, Brazil, 2007.

[15] H.D. Tuan, P. Apkarian, and T.Q. Nguyen. Robust Filtering for Uncertain Nonlinearly Parameterized Plants. *IEEE Trans. Signal Processing*, 51(7):1806–1815, 2003.

- [16] R.M. Palhares, C.D. Campos, P.Ya. Ekel, M.C.R. Leles, and M.F.S.V. D'Angelo. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear systems with lumped delays. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 152(1):27–33, 2005.
- [17] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- [18] D. F. Coutinho, A. S. Bazanella, A. Trofino, and A. S. Silva. Stability Analysis and Control of a Class of Differential-Algebraic Nonlinear Systems. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 14:1301–1326, 2004.
- [19] D.F. Coutinho, C.E. de Souza, and A. Trofino. Regional Stability Analysis of Implicit Polynomial Systems. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4224–4229, San Diego, CA, 2006.