MARJÚNIA ÉDITA ZIMMER KLEIN

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA SUBSIDIADO PELAS TEORIAS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Dra. Sayonara Salvador Cabral da Costa

Porto Alegre

2009

MARJÚNIA ÉDITA ZIMMER KLEIN

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA SUBSIDIADO PELAS TEORIAS DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em 20 de março de 2009, pela Banca Examinadora.

BANCA EXAMINADORA

Dra. Sayonara Salvador Cabral da Costa (Orientadora – PUCRS)

Dra. Ruth Portanova (PUCRS)

Dra. Helena Noronha Cury (UNIFRA)

Dedico esse trabalho a todos os professores que se preocupam com a qualidade da sua ação pedagógica e com a aprendizagem dos conceitos científicos por parte dos seus alunos tendo como objetivo a formação integral do educando.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e por acreditar que sempre é possível.

Aos meus pais, Anivo (in memorium) e Ivone, pelo incentivo e exemplo como pessoas que sempre buscaram alcançar as suas metas.

Ao meu esposo, Cláudio, pelo amor incondicional e dedicação em todos os momentos.

Aos meus filhos, Maitê e Lucas, pelos momentos de compreensão quando a mamãe estava ausente de corpo, mas presente em espírito.

Aos professores do Mestrado, que estimularam a leitura e a escrita.

Aos colegas do Mestrado, pelas discussões que enriqueceram a minha jornada nesse curso.

Aos familiares e amigos, pelo carinho e apoio.

Aos meus alunos, pelas conquistas alcançadas ao longo da pesquisa.

A Capes.

Agradecimento especial

Agradeço, em especial, à minha orientadora, professora Sayonara Salvador Cabral da Costa, com quem aprendi muito e que me deu a atenção e o apoio incansável para a realização dessa dissertação.

RESUMO

Este trabalho de pesquisa, tendo como fundamentação teórica a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud, tem como principal objetivo propor uma metodologia de ensino que possa contribuir para uma construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual da trigonometria. Essa questão de pesquisa surgiu em função da inquietude com as dificuldades de compreensão e de conceitualização dos alunos e da sua falta de interesse em relação ao tema. A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel ressalta que é importante para a aprendizagem que o professor identifique os conhecimentos prévios dos alunos e organize materiais potencialmente significativos e motivadores, enquanto que a teoria dos campos conceituais de Vergnaud salienta de que a situação é que dá sentido aos conceitos e é através dela que o aluno tem condições de explicitar os seus conhecimentos-em-ação e transformá-los em conhecimentos científicos. Sendo assim, para que o processo de pesquisa acontecesse, foi planejada e executada a investigação dos conceitos prévios dos alunos por meio de um questionário, cujas respostas foram tabuladas e categorizadas, servindo de base para a construção e proposta de situações, nas quais, os alunos, de forma individual ou em pequenos grupos, poderiam explicitar e construir novos conhecimentos. Foram utilizados diferentes instrumentos de coleta de dados: o registro oral e escrito dos conhecimentos prévios dos alunos, o registro das observações feitas em sala de aula, o registro escrito de várias situações-problema, além das avaliações formais, os quais possibilitaram identificar alguns conhecimentos-em-ação. Os resultados da proposta referendaram: i) a importância de verificar as concepções prévias que os alunos trazem na sua bagagem de conhecimentos com os temas que são tratados em sala de aula, muitas vezes, sequer imaginados pelo professor; ii) a importância do papel do professor como mediador dos processos de ensino e de aprendizagem, propondo atividades pertinentes, diversificadas e contextualizadas, nas quais o aluno possa interagir significativamente com o material, com os colegas e com o próprio professor, permitindo o seu progressivo domínio num determinado campo conceitual.

Palavras-chave: Educação Matemática. Trigonometria. Conhecimentos Prévios. Situações. Conhecimentos-em-ação.

ABSTRACT

This research, having as a theoretical basis the Theory of Significant Learning (TAS) from Ausubel and the Theory of Conceptual Fields (TCC) from Vergnaud, has as main goal the proposal of a learning methodology which can contribute to a significant construction of the concepts involved in the conceptual field of trigonometry. This question of research arose based on unquietness with the difficulties of comprehension and conceptualization presented by the students and their lack of interest regarding this subject. The theory of significant learning from Ausubel highlights that it is important that the teacher identifies the previous knowledge of the students and organizes materials which are potentially significant and motivating, whereas the theory of conceptual fields from Vergnaud highlights that the situation is the one which gives meaning to the concepts and it is through it that the student has the conditions to show his knowledge-in-action and change it into scientific knowledge. Thus, so that the process of research could happen, an investigation of previous concepts of the students was planned and performed through a questionnaire whose answers were computed and categorized serving as basis for the construction and proposal of situations in which the students, individually or in small groups, could show and form new knowledge. Different instruments for collecting data were used: the oral and written record of the previous knowledge of the students, the record of observations made in class, the written record of several problems, besides the formal evaluations which made possible the identification of some knowledge-in-action. The results of the proposal countersigned: i) the importance of verifying the previous notions that the students bring in their knowledge with the subjects that are seen in class, several times not imagined by the teachers, ii) the importance of the role of the teacher as a mediator of processes of teaching and learning, suggesting proper, varied and contextualized activities in which the student can interact significantly with the material, the classmates and the teacher, this way allowing his progressive dominion in a determined conceptual field.

Keywords: Mathematical Education, Trigonometry, Previous Knowledge, situations, Knowledge-in-action.

LISTA DE ILUSTRAÇOES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BOLEMA - Boletim de Educação Matemática

CT – Círculo Trigonométrico

CEMPEM - Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática

EAD – Educação a Distância

EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática

ENAS - Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa

E.V.A. – Etil, Vinil e Acetato

FE/UNICAMP – Fundação Estadual – Universidade de Campinas

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

TAS – Teoria da Aprendizagem Significativa

TCC – Teoria dos Campos Conceituais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Minha experiência como professora, lecionando a disciplina de Matemática data de cerca de 20 anos. Nesse período, trabalhei com o Ensino Fundamental por cerca de seis anos e os demais com o Ensino Médio, lecionando em turnos variados, manhã tarde e noite. Além disso, também trabalhei, à noite, com turmas do Ensino Técnico, nas disciplinas de Matemática Financeira e Estatística e na faculdade com a disciplina de Estatística. Já lecionei por três anos em escolas da rede estadual com turmas de Ensino Fundamental e Médio e meio ano numa escola municipal com turmas do Ensino Fundamental. Atualmente, leciono para turmas de Ensino Médio regular diurno (manhã e tarde) e noturno, curso técnico e no Ensino Superior, num regime de trabalho, em média, de 30 horas aula. Como leciono em escola da rede particular, esse regime pode sofrer alterações em função do número de matrículas.

Desde a primeira experiência como docente tenho demonstrado preocupação em promover a aprendizagem do meu aluno por meio de um planejamento da aula, compondo-a de dois momentos: no primeiro, utilizando o quadro, explicava de forma clara e organizada o conteúdo e no segundo, por intermédio da realização de exercícios de fixação, procurava esclarecer as possíveis dúvidas ainda existentes. Após, combinava-se um momento de avaliação do conteúdo, esse momento geralmente era mensal. Acreditava que, por meio dessa metodologia, conseguiria atingir o meu aluno contribuindo para a sua aprendizagem. Entretanto, os anos foram se passando e os resultados das avaliações eram muito frustrantes. Não considerava falta de empenho da minha parte, mas havia algo, não tão simples de ser diagnosticado, que prejudicava a aprendizagem.

Ainda não percebia o papel das atividades dos alunos nas aulas como necessárias para a percepção do desenvolvimento dos processos de ensinar e aprender, pelo menos como vejo hoje, como nas palavras de Melchior:

> Se o objetivo do professor é que o aluno aprenda, ele necessita verificar se houve aprendizagem ou não. Para tanto, colherá dados, durante o processo, que permitam definir correções e complementações necessárias ainda antes do final do processo. Em determinado momento fará uma revisão geral escrita, que pode ou não ser denominada teste. Este momento deve ser determinado pelo próprio professor, de acordo com o ritmo de trabalho. Com base neste resultado e em testes escritos o professor fará uma reflexão analítica para verificar as condições de cada aluno. A nota ou conceito é uma representação que expressa o resultado

> desta análise, que deve estar baseada em dois aspectos: ponto de partida e os objetivos a atingir. È importante que, além da nota ou conceito, seja descrita a situação de cada um em relação à etapa de seu desenvolvimento, deixando claro tanto para o professor como para o aluno, por que o resultado é esse e qual deve ser a nova etapa no processo da construção do conhecimento (MELCHIOR, 1994, p. 146)

Ao corrigir as avaliações percebia as dificuldades de compreensão em determinados conteúdos de Matemática, tanto conceituais quanto de procedimentos, e algumas dessas dificuldades nem diziam respeito ao conteúdo daquela determinada série, eram pertinentes a conteúdos anteriores, do tipo: na concepção deles, em resolução de equações, realizavam uma troca de sinal e não de operação; realizavam simplificações inadequadas no uso do mínimo múltiplo comum em operações que envolviam frações (quando “corta” e quando não “corta” era a pergunta que faziam para explicitar a sua dúvida a respeito). Naquele período os erros tinham o efeito de me inquietar, ao contrário de hoje, que me mostram o caminho para melhorar o processo de ensinar. Segundo Brousseau:

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas de aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos (BROUSSEAU1983 apud CURY, 2007).

Essa inquietude causou uma necessidade de fundamentar-me e aperfeiçoar-me como professora, primeiro por meio de leituras e pesquisas em temas envolvendo teorias de aprendizagem e a Matemática. Nesse caminho, vislumbrei o curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática e prontamente envolvi-me na sua realização.

Os conteúdos discutidos nas disciplinas do curso encaminharam-se para a escolha do tema dessa dissertação e para o referencial teórico, apoiado em teorias psicológicas de aprendizagem, complementares entre si, de Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; MOREIRA, 2006) e de Vergnaud (1993).

Ao mesmo tempo, busquei nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, Ministério da Educação, 1998) as orientações em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Em seu papel formativo a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cujas utilidades e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança, desprendimento para analisar e enfrentar situações, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza, da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (PCNEM, 1998, p. 40).

Em linhas gerais, as orientações dos PCNEM preconizam que o ensino da Matemática deve propiciar que o aluno seja capaz de desenvolver competências e habilidades de identificar, formular e resolver problemas, utilizando um rigor lógico-científico na análise da situação-problema, bem como correlacionando-o com outros campos do saber.

Após ler os PCNEM, veio-me à mente alguns dos desabafos dos alunos em relação a um dos conteúdos da segunda série do Ensino Médio, a trigonometria; enquanto lecionava, eles faziam comentários, do tipo: “é muito chato”, “tem que decorar um monte de fórmulas e relações”, “dura mais que um trimestre”, “parece que não acaba nunca”, “onde é que se usa, só para o vestibular?”, “já tinham me falado que era comprido e chato”. Essas manifestações sensibilizaram-me no sentido de tentar modificá-las.

Quando fiquei sabendo com que séries trabalharia em 2008, não tive dúvidas: o conteúdo de trigonometria aliado às teorias psicológicas de aprendizagem seriam o foco da minha dissertação.

Seguiu-se uma pesquisa bibliográfica em periódicos reconhecidos na área de Educação Matemática, sobre possíveis trabalhos nessa área, envolvendo também a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud.

Os periódicos pesquisados foram BOLEMA (Boletim de Educação Matemática), a Revista do Professor de Matemática, Educação Matemática em Revista, Revista do Professor de Matemática – RS e a revista Zetetiké.

No periódico BOLEMA nenhum artigo sobre o Ensino de Trigonometria foi encontrado entre os anos de 1985 a 2008.

Na Revista do Professor de Matemática, pesquisada entre os anos de 1982 a 2008, foram encontrados seis artigos relacionados ao tema ângulos, dezenove relacionados ao círculo trigonométrico, trinta e dois artigos relacionados ao triângulo, quinze artigos com o título trigonometria e duas sugestões de confecção de material didático. A seguir, citam-se três deles:

- Lima (1985) relata que vários conceitos básicos da Matemática criados para resolver problemas, a *posteriori,* revelaram utilidades mais amplas, com o advento de novas idéias e teorias científicas, adquirindo uma posição de grande relevância; entre eles, a trigonometria. A trigonometria teve sua base teórica na semelhança de triângulos e como motivação original a "resolução de triângulos", que consiste em determinar os seus seis elementos (três lados e três ângulos), ou seja, faz referência aos casos de congruência de triângulos LLL (quando se conhecem os três lados do triângulo), LAL (quando se conhece dois lados e o ângulo compreendido entre eles e ALA (quando se conhece dois lados e o ângulo compreendido entre eles). O surgimento do Cálculo Infinitesimal e posteriormente a Análise Matemática deram uma nova dimensão à Trigonometria e às suas noções básicas (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, etc.), redefinindo as funções, ou seja passando-se a falar em seno e cosseno de um número, em vez de um ângulo, transição essa realizada por meio de uma outra função, a função de Euler[1]. O domínio da função de Euler é o conjunto dos números reais e seu contra-domínio é o círculo unitário no plano, chamado por ele de *S*. Assim para cada número real a função de Euler faz corresponder um ponto E do círculo *S*. Continua sua explanação afirmando que a função de Euler abriu a possibilidade de inúmeras aplicações das funções seno e cosseno, dentre elas a periodicidade, que é uma circunstância presente desde o movimento de um planeta em torno do sol, de um elétron ao redor do núcleo, na corrente alternada que usamos nas nossas casas, às batidas do nosso coração. Logo, as funções periódicas têm enorme importância e, principalmente, depois que Joseph Fourier [2] (1822) mostrou, no seu estudo sobre a transmissão de calor, sob hipóteses bem razoáveis, que toda a função pode ser

---

1 Euler é um dos matemáticos do século XVIII e autor da Introduction in analysi infinitorum (1748), que contém uma exposição sobre séries infinitas, incluindo $e^x, \operatorname{sen} x \text{ e } \cos x$, e a relação $e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x$, sendo considerado o primeiro texto de geometria analítica(STRUIK, 1992, p.196-197).

[2] Fourier é um dos matemáticos do século XIX e autor da *Théorie anlalytique de la chaleur* (1822), essa teoria é a teoria matemática da condução do calor. O livro tornou-se fonte de todos os métodos modernos da física matemática, envolvendo a integração de equações diferenciais parciais com condições de fronteira (STRUIK, 1992, p.239).

obtida como a soma de uma série cujos termos são senos ou cossenos (Série de Fourier), tornaram-se o ponto de partida para a Análise Harmônica, um ramo da Matemática contemporânea. Termina enfatizando que espera que o artigo tenha colaborado para orientar o professor do 2° grau (hoje, Ensino Médio) em relação à importância, à posição científica e às possíveis aplicações da trigonometria.

Esse artigo foi interessante, porque mostrou uma parte da evolução da trigonometria na história e desenvolvimento científico, além de citar nomes de pessoas que colaboraram para essa evolução. Também fez pensar sobre a ampliação do conceito de função trigonométrica.

➢ Leite (1986) sugere a confecção de material didático para o ensino da trigonometria, utilizando papel ofício e papel transparente, sugerindo o desenho de um círculo no papel ofício com graduações angulares e uma reta tangente (na posição da reta tangente) à ele também com subdivisões em milímetros. Sobre essa primeira folha, coloca-se uma segunda, que é a do papel transparente, onde está desenhada uma circunferência de raio igual à metade da anterior e uma reta que contenha o diâmetro dessa circunferência coincidindo com uma das duas diagonais do papel. Um alfinete é sugerido para sobrepor as duas folhas e promover o deslizamento da folha transparente por sobre a folha ofício tendo como objetivo a visualização das medidas do seno e do cosseno no círculo. Termina a sugestão chamando a atenção que se o professor utilizar papel transparente no lugar de papel ofício, poderá usar o retro projetor como um agente altamente motivador e enriquecedor nas suas aulas.

Essa sugestão para visualizar as funções trigonométricas era interessante, e serviu para comparar com um material didático próprio que foi utilizado nessa dissertação.

➢ Watanabe (1996) discorre sobre algumas características convencionais de representação das funções trigonométricas e sobre a transição das razões trigonométricas para funções periódicas de domínio real e de aplicações mais amplas, observando que essa última começou com Viéte[3], no século XVI, e culminou com os trabalhos de Euler, no século XVIII; comenta que os professores realizam-na no segundo grau (hoje, Ensino Médio).

---

[3] Viéte é um dos matemáticos do século XVI e autor da *In artem analyticam isagoge* (1591), onde se encontram algumas das primeiras representações de números por letras (STRUIK, 1992, p.150)

O artigo foi considerado interessante como fonte de esclarecimento sobre as funções trigonométricas e porque faz uma reflexão sobre um tema instigante: o da transição de razão para função trigonométrica.

A Educação Matemática em Revista, periódico de publicação semestral da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, foi pesquisado entre os anos de 1993 e 2008. Um único artigo envolvendo assuntos relacionados à trigonometria foi encontrado:

➢ Costa (2003) relata sobre a gênese do desenvolvimento da trigonometria e o aparecimento do conceito de função, em especial, as funções seno e cosseno. Ao longo do artigo procura localizar a trigonometria dentro da história da humanidade, desde o seu início, contribuições dos babilônios para a trigonometria, do Egito , da Grécia, dos hindus, árabes e persas, dos Europeus e salientando que a trigonometria toma a sua forma atual a partir de Euler (século XVIII), mas que começou com Viéte já no século XVI. Salienta que o caminho percorrido pela trigonometria foi longo e que nem tratou no texto a respeito da evolução do conceito de ângulo, que é subjacente e essencial ao desenvolvimento da trigonometria. Fica a mensagem de que ao ensinar, o professor discuta com o aluno levando-o a pensar e perceber que o conhecimento matemático não surge pronto e acabado, mas sim é construído.

Este artigo foi destacado por associar a história da trigonometria com a construção dos conhecimentos matemáticos ao longo de um processo que teve muitos colaboradores e muitos povos envolvidos, por um longo período de tempo, séculos. Levar essa discussão para a sala de aula pode favorecer a motivação dos alunos para o estudo da trigonometria, pelo menos pelas curiosidades que o texto tem.

Na Educação Matemática em Revista – RS, também só foi encontrado um único artigo no período pesquisado, entre 1999 até 2007:

➢ Kaiber e Conceição (2007) relatam sobre uma experiência de uso de softwares educativos, de distribuição livre, sobre trigonometria: o *Régua e Compasso* e o *Graphmática.* Ao longo do artigo fazem menção ao histórico da trigonometria como elemento motivador das aulas, citam pressupostos teóricos que justificariam o uso de softwares educacionais e sinalizam como acessar os softwares e como utilizá-los. Por meio de exemplos, orientam o leitor. Dão sugestões de atividades que podem ser realizadas com os alunos e dentre elas a construção do círculo trigonométrico e os gráficos das funções seno, cosseno e da tangente, na tela do computador, extrapolando as variáveis que influenciam na determinação da imagem e do período. Terminam o artigo salientando que o trabalho com softwares educacionais é motivador, facilita a autonomia aumentando o interesse e a participação, o que leva a uma maior compreensão dos conteúdos.

Este artigo serviu de inspiração para que o G*raphmática* fosse utilizado com os sujeitos da presente pesquisa, no ambiente MOODLE, apesar de já ter sido utilizado em oportunidade anterior.

A Revista Zetetiké, um periódico de publicação semestral do CEMPEM (Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática da FE/UNICAMP, de São Paulo, foi pesquisado entre 1984 e 2008 . Como no periódico anterior, de trigonometria só foi encontrado um artigo:

- Brighenti (2003), que apresenta uma pesquisa sobre a representação dos professores quanto ao ensino de trigonometria em escolas públicas de Ensino Médio. A partir dessa indicação, encontrou-se uma publicação da mesma autora (BRIGHENTI, 2003) que mostrou-se deveras interessante pois, além de abordar o ensino da trigonometria, com sugestões para o ensino, tem como referencial teórico a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel.

Os poucos trabalhos que foram encontrados para relacionar com o tema dessa dissertação exigiu que outras fontes fossem pesquisadas; *sites* de programas de pós-graduação e ligadas a universidades foram algumas delas:

- a dissertação de Camargo (2004), intitulada “Ensino com enfoque na pesquisa: repercussões na aprendizagem de trigonometria.” descreve uma pesquisa na qual o ensino é enfocado na pesquisa, no tema trigonometria. Utiliza um questionário inicial para obter a opinião dos alunos a respeito do tema; em outra etapa, realiza atividades envolvendo a trigonometria, desde a representação gráfica de triângulos retângulos até os gráficos das funções seno, cosseno e tangente, utilizando o software educacional de livre distribuição, *Graphmática*, sendo que permeia as aulas com atividades lúdicas. Na última etapa, ela realiza entrevistas individuais com seis alunos a fim de coletar informações sobre o trabalho realizado. Relata que a metodologia aplicada nas aulas baseada na construção, contextualização e na aplicação dos conceitos trigonométricos teve, por meio das entrevistas realizadas ao final, uma repercussão favorável junto aos alunos, diminuindo o nível de dificuldades. Conclui, afirmando que no processo de aprendizagem da Matemática a busca dos resultados por meio da pesquisa é uma forma prática, objetiva e concreta de aprender, evitando decorar fórmulas matemáticas e que a pesquisa em sala de aula, além de tornar o ambiente escolar mais expressivo, estimulante e alicerçado no prazer, desenvolve uma consciência crítica.

O trabalho motivou algumas das atividades dessa dissertação, inclusive a atividade prática com o astrolábio.

- O artigo de Silveira (2007) intitulado "Inclinações das ruas e das estradas", relata que as inclinações máximas de ruas e estradas são bem menores do que aquelas imaginadas pela grande maioria das pessoas e sugere a comprovação desse fato por meio da realização de algumas medidas, por parte dos alunos em fotografias que demonstram ruas ou estradas inclinadas. Justifica teoricamente o motivo de certos aclives não permitirem a passagem de caminhões ou carros pesados por eles e desafia os alunos a pesquisarem rampas mais inclinadas do mundo.

O artigo é muito interessante porque contextualiza a trigonometria em um problema prático, do cotidiano das pessoas, além de motivar a curiosidade.

Três eventos científicos em 2008 forneceram alguns subsídios extras para as teorias envolvidas na dissertação. Um deles foi o II Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa (ENAS), que aconteceu em Canela, Rio Grande do Sul, no período de 24 a 28 de novembro de 2008. O Encontro tem na sua programação conferências, mesas redondas, mini-cursos, sessões de comunicações orais e apresentação de painéis. Foram apresentados trabalhos em diversas áreas do conhecimento envolvendo a Teoria da Aprendizagem (TAS) de Ausubel. Além disso, um dos trabalhos, intitulado "Atividades práticas nas ciências do cotidiano: valorizando os conhecimentos prévios na educação de jovens e adultos", de autoria de Merazzi e Oiagen (2008), oriundo da dissertação do primeiro, reforçou a confiança na teoria de Ausubel como fundamentação teórica para promover a aprendizagem do jovem e do adulto por meio da realização de atividades práticas em Ciências e voltadas para o cotidiano. Depois da identificação dos conhecimentos prévios dos alunos quanto ao tema proposto, avaliaram o desempenho desses conhecimentos antes e depois da realização das atividades, com uma sensível melhora da cognição e da motivação dos educandos.

O outro evento foi o IV Fórum Social pelas Aprendizagens com o tema “Nada mais prático do que uma boa teoria”, que aconteceu em Porto Alegre, Rio Grande do Sul, no período de 19 a 21 e abril de 2008. Aconteceram relatos de experiências e palestras, sendo que uma delas foi com o próprio Gérard Vergnaud, um dos teóricos desta pesquisa.

O terceiro foi o XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (XII EBRAPEM), que aconteceu em Rio Claro, São Paulo, no período de 05 a 07 de setembro de 2008, cujo objetivo era oportunizar o debate científico, metodológico de pesquisas ainda em construção, privilegiando a interlocução entre linhas de pesquisa em educação Matemática e outras áreas do conhecimento. Foi uma oportunidade de ver quão poucos são os trabalhos sobre o ensino da trigonometria, pois dentre os 285 trabalhos apresentados, apenas 2 faziam referência ao mesmo.

Apresenta-se a seguir os objetivos da presente investigação:

1.1 OBJETIVO GERAL

- Propor e avaliar uma metodologia de ensino, baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud, que possa contribuir para a construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual trigonometria.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Investigar e identificar as concepções prévias dos alunos em relação ao tema trigonometria.
- Elaborar atividades potencialmente significativas (situações) para serem desenvolvidas em sala de aula;
- Investigar e identificar os conhecimentos-em-ação dos alunos durante as atividades (situações) propostas.

- Avaliar o desempenho dos alunos, frente aos objetivos gerais preconizados pelos PCNEM e que vêm ao encontro de uma aprendizagem significativa em Trigonometria.

1.3 ESTRUTURA DA APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Neste primeiro capítulo, apresenta-se alguns dos aspectos envolvidos na minha trajetória profissional, justificando a escolha do tema, uma breve revisão bibliográfica e os objetivos geral e específico do trabalho.

O segundo capítulo é dedicado aos pressupostos teóricos dessa dissertação: a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e colaboradores e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gerard Vergnaud e a possibilidade de relacioná-las na prática da sala de aula.

O terceiro capítulo descreve a investigação dos conhecimentos prévios dos alunos em relação ao tema trigonometria, as situações de aprendizagem construídas e desenvolvidas a partir desse diagnóstico, realizando, concomitantemente, uma análise dos dados obtidos com base nos pressupostos teóricos.

O quarto capítulo, destinado às considerações finais, apresenta uma reflexão dos conhecimentos construídos durante a realização dessa investigação e suas contribuições para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

A proposta de uma metodologia que pretende uma aprendizagem significativa em conteúdos científicos, como a trigonometria, exige uma fundamentação em teorias de aprendizagem. Apresenta-se a seguir, as teorias de Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e colaboradores e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud.

2.1 O QUE É UMA TEORIA DE APRENDIZAGEM ?

O homem não quis só aprender, mas sua curiosidade também o levou a questionar-se sobre como se aprende. A partir do século XVII, surgiram muitas teorias de aprendizagem que procuravam esclarecer esse aspecto e orientar as Escolas, bem como seus professores.

O que é uma teoria de aprendizagem, afinal ?

Considera-se que todo o professor tem uma teoria de aprendizagem, talvez ele não se dê conta disso, mas, com certeza, acredita em algo e faz uso de suas crenças na sala de aula, conquanto sua base de teorias psicológicas entra em ação.

De um modo geral, uma teoria é uma forma de sistematizar determinada área do conhecimento, de tentar explicá-la, prever situações e resolver problemas. Usada em prol da educação, no processo de aprendizagem, ela vai se chamar teoria de aprendizagem (MOREIRA, 1999). Subjacentes às teorias, temos sistemas de valores e princípios, que se podem chamar de filosofias ou visões de mundo.

No caso das teorias de aprendizagem, são, pelo menos três, as filosofias subjacentes:

- a comportamentalista ou behaviorista;
- a humanista;
- a cognitivista (construtivista).

Na filosofia comportamentalista, o interesse está voltado para o comportamento e às atitudes do sujeito. O comportamento é o que rege os objetivos e a avaliação é feita em cima das observações comportamentais do educando.

Dentro da filosofia humanista, o aprendiz é visto como pessoa, sua realização não é, só na área cognitiva, mas envolve pensamentos, sentimentos e ações. Na filosofia construtivista, o enfoque é exatamente o contrário da comportamentalista, ou seja, há uma atenção especial à cognição, refletindo sobre como o educando conhece o mundo.

2.2 A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA (TAS) DE AUSUBEL E COLABORADORES

A teoria da aprendizagem significativa proposta por David P. Ausubel e continuada, interpretada e complementada por Joseph D. Novak (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980) e D. Bob Gowin (1981 apud MOREIRA, 2006) tem, como idéia mais importante, considerar aquilo que o aprendiz já sabe. Ao dizer isso, Ausubel quer enfocar a estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, as idéias e o conteúdo que ele tem a respeito de determinado assunto. De posse dessa informação é possível fazer um mapeamento das idéias prévias do aluno, com o objetivo de ensiná-lo de acordo, identificando os conceitos organizadores básicos e utilizando recursos que facilitem a aprendizagem de maneira significativa. Segundo Ausubel:

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que as idéias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as idéias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição. (AUSUBEL et. al., 1980, p. 34)

Aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação interage com uma estrutura do conhecimento, já existente e específica (conceito subsunçor), produzindo uma nova informação que adquire um novo significado, inclusive para os subsunçores preexistentes. Ou seja, há uma interação não arbitrária e não literal que contribui para a diferenciação, a elaboração e a estabilidade da própria estrutura cognitiva, fazendo com que o indivíduo adquira um corpo de conhecimento claro, estável e organizado, que passa a ser a principal variável independente, na aquisição de novas informações da mesma área.

De acordo com Ausubel (MOREIRA, 2006, p.168), existem três variáveis importantes, da estrutura cognitiva, que devem ser levadas em conta na facilitação da aprendizagem significativa e da retenção:

➢ a disponibilidade, na estrutura cognitiva do aprendiz, de idéias-âncora, especificamente relevantes, em nível ótimo de inclusividade, generalidade e abstração;

Ausubel refere-se a elas como “idéias de esteio” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.141). São idéias que já estão na estrutura cognitiva do aprendiz, prontas, por assim dizer, para serem correlacionadas a outras idéias.

➢ a discriminação de conceitos e princípios, similares ou diferentes (mas potencialmente confundíveis), usados no material de aprendizagem;

Ausubel e colaboradores (1980) quer dizer que, se uma idéia nova a ser aprendida tem pouca força dissociativa, não é facilmente discriminável em relação a uma idéia que já está estabelecida na estrutura cognitiva do aprendiz, pois ela tende a não ser retida pelo aprendiz.

➢ a estabilidade e clareza das idéias-âncora.

Ausubel quer dizer que, se as idéias-âncora não forem consistentes e estáveis na estrutura cognitiva do aprendiz, elas podem, facilmente, ser substituídas e, até mesmo, criar um relacionamento inadequado com as novas idéias.

Porém, a estrutura cognitiva do aprendiz pode, por sua vez, ser influenciada de duas maneiras:

➢ pela apresentação de conceitos com maior poder explanatório e propriedades integradoras;

➢ pela utilização de métodos adequados e uma organização seqüencial apropriada.

O papel do professor, nessa tarefa de facilitação da aprendizagem significativa, envolve quatro aspectos, que são:

➢identificar os conceitos mais relevantes, os que têm um nível intermediário de generalidade e inclusividade e os menos inclusivos, realizando um “mapeamento” da estrutura conceitual, preocupando-se com a qualidade e não com a quantidade;

➢ identificar quais são os subsunçores (conceitos, proposições e idéias claras, precisas, estáveis) que o aluno deveria ter na sua estrutura cognitiva e que são relevantes à aprendizagem significativa do conteúdo;

➢ diagnosticar o que o aluno já sabe, isto é, saber distinguir entre o que é importante, relevante para a aprendizagem e aquilo que o aluno já tem disponível na sua estrutura cognitiva;

➢ ensinar através de recursos e princípios que auxiliem o aluno a assimilar a matéria e organizem a sua própria área de conhecimento, pela aquisição de significados claros, estáveis e transferíveis.

Ausubel e colaboradores (1980) sugerem que, o professor, ao organizar o ensino, segundo a sua teoria, deverá, em primeiro lugar, identificar os conhecimentos prévios dos alunos, depois, então, poderá dar atenção a outros aspectos, os quais ele chama de princípios e que dizem respeito à organização eficiente do conteúdo, não esquecendo das variáveis, que são importantes para a estrutura cognitiva do aprendiz:

➢ a diferenciação progressiva (idéias, mais gerais e inclusivas, devem ser apresentadas no início da instrução e, progressivamente diferenciadas através de detalhes e especificidades);

➢ a reconciliação integrativa (explorar relações entre conceitos e proposições, prestando atenção em aspectos similares e/ou diferenças que permitam reconciliar inconsistências reais ou aparentes) ;

➢ a organização seqüencial (prestar atenção para que cada novo tópico possa ser relacionado com idéias já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz);

➢ a consolidação (o novo tópico não deve ser introduzido, antes que o precedente esteja estável e organizado);

Ressalte-se que, para promover os dois primeiros aspectos, o referido autor sugere a utilização de organizadores prévios. Segundo Moreira:

> Organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido em si. Contrariamente a sumários que são, em geral apresentados ao mesmo nível de abstração, generalidade e inclusividade, simplesmente destacando certos aspectos do assunto, organizadores são apresentados em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade. Segundo o próprio Ausubel, no entanto, a principal função de um organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o material possa ser aprendido de forma mais significativa, ou seja, organizadores

> prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que eles funcionam como “pontes cognitivas” (MOREIRA, 1999, p. 155).

Por exemplo, para a promoção da diferenciação progressiva, a sugestão é de que tanto os conteúdos quanto as unidades de ensino estejam hierarquizadas, em ordem decrescente de inclusividade. Para a promoção da reconciliação integrativa, os organizadores prévios podem auxiliar o aprendiz a diagnosticar as relações entre as idéias que ele já tem na sua estrutura cognitiva e as idéias a serem aprendidas, funcionariam como uma ponte.

Enfim, esses são alguns dos aspectos citados, na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel e colaboradores, importantes para tentar alcançar uma aprendizagem de real significado para o aluno.

2.3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (TCC) DE GERARD VERGNAUD

Concomitante com a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel (1980), considera-se relevante citar a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1993), pois, em muitos aspectos, as teorias são complementares.

Para Vergnaud, existe a premissa de que o conhecimento está organizado em campos conceituais. E, segundo ele:

> Campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, apud MOREIRA, 2004, p. 8).

A teoria dos campos conceituais é uma teoria psicológica cognitivista que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento das competências complexas, sobretudo, às que dependem da ciência e da técnica. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entende-se por “conhecimentos”, tanto as habilidades quanto as informações expressas.

As palavras-chave da teoria dos campos conceituais são: *campo conceitual, conceito, situação, esquema e invariante operatório (teorema-em-ação ou conceito-em-ação).*

Campo conceitual é um conjunto de situações, problemas, relações, conteúdos, operações de pensamento e procedimentos que o indivíduo dispõe ou acessa para dar sentido a uma determinada unidade (assunto), para compreender o real.

Vergnaud (1993), para definir campo conceitual, levou em consideração o fato de que:

- um conceito necessita de mais do que uma situação para ser formado;
- numa única situação, não se analisa só um conceito, ela envolve vários conceitos;
- para apropriar-se de um conceito ou dos aspectos que envolvem uma situação o indivíduo pode levar muito tempo.

Vemos que Vergnaud utiliza os termos conceito e situação, mas o que são esses termos para Vergnaud?

Conceito é, para Vergnaud, a reunião de três conjuntos:

- o conjunto de situações que vão dar sentido ao conceito, que ele simboliza por *S*;
- o conjunto de invariantes operatórios (objetos, propriedades e relações), que o indivíduo vai utilizar para analisar e compreender as situações do primeiro conjunto, que ele simboliza por *I*;
- o conjunto das representações simbólicas (linguagem natural, símbolos, gráficos, diagramas), que o indivíduo vai utilizar para representar as relações nas situações. Vergnaud representa esse conjunto por *R*;

Para o desenvolvimento de um conceito e o seu uso, ao longo da aprendizagem, necessita-se considerar-se os três conjuntos, simultaneamente.

Situação é, para Vergnaud, uma combinação de tarefas, às quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias. O desempenho em cada subtarefa tem importância para o desempenho global, mas, se houverem dificuldades, elas, necessariamente, não precisam ser somadas ou multiplicadas. Destaca que, num certo campo conceitual, existe uma grande variedade de situações e os conhecimentos dos alunos são moldados pelas situações que encontram e que, progressivamente, dominam. Por conseguinte, as situações é que dão sentido aos conceitos.

O sentido é uma relação do sujeito com as situações e com os significantes: os esquemas. Por exemplo, o sentido da adição, para um individuo, é o conjunto de esquemas que ele pode utilizar para resolver problemas que dizem respeito à adição (gráficos, tabelas, símbolos).

Esquema é uma forma de o indivíduo dar conta da situação, ou seja, é a organização das habilidades sensório-motoras e intelectuais que ele utiliza para compreender determinada situação.

Há diversos esquemas: os perceptivo-gestuais, como o de contar objetos ou de fazer um gráfico; esquemas verbais, como o de elaborar um discurso e esquemas sociais, como o de seduzir uma pessoa ou o de gerenciar uma situação conflitante.

Para Vergnaud, um esquema está sempre associado a uma situação. Ele sugere, inclusive, que se fale em interação esquema-situação. O desenvolvimento cognitivo de um indivíduo vai estar diretamente relacionado à diversidade e ao número de esquemas que ele possuir. Logo, a escola deve propiciar um ambiente, onde seja possível o desenvolvimento, a diversificação e o aprimoramento desses esquemas.

Além disso, Vergnaud chama de ingredientes dos esquemas, as especificações que permitem facilitar a compreensão do que seja um esquema, como:

- metas e antecipações (esquema dirigido a uma classe de situações nas quais o indivíduo descobre a finalidade de sua atividade e, às vezes, submetas);
- regras de ação (buscam informação e controle das atividades; por analogia, o indivíduo observa as seqüências das atividades);
- invariantes operatórios (são os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação que dirigem o indivíduo ao reconhecimento do que é pertinente à situação);
- possibilidade de inferência-raciocínio (permitem prever as regras e realizar antecipações, a partir das informações e dos invariantes operatórios de que o indivíduo dispõe).

Portanto, um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pois é através das situações e dos problemas que ele adquire sentido para o indivíduo. É importante considerar esse processo de elaboração pragmática, se pretende-se dimensionar a função adaptativa do conhecimento. Pode-se distinguir dois momentos:

- classes de situações em que o sujeito já dispõe das competências necessárias para o tratamento de determinada situação;
- classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências, o que faz com que haja um tempo de reflexão, exploração e elaboração de novas competências almejando o sucesso de determinada situação.

Em ambos os momentos, o conceito de esquema (organização invariante do comportamento de uma classe de situações dada) interessa, mas não funciona de modo igual. Geralmente, no primeiro caso, o esquema é único, cujas características são comportamentos mais amplos e automáticos; e, no segundo caso, são observados vários esquemas sendo utilizados de forma que devam ser combinados e recombinados e possam, até, entrar em competição uns com os outros.

Para Vergnaud (1993), as próprias competências matemáticas são sustentadas por esquemas organizadores do comportamento e, podemos dizer, como Piaget, que os esquemas estão no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas: assimilação e acomodação.

O funcionamento cognitivo de um sujeito ou de um grupo de sujeitos, numa situação dada, baseia-se no repertório dos esquemas disponíveis, formados, anteriormente, de cada um dos sujeitos, individualmente e que o reconhecimento de invariantes operatórios (conhecimentos em ação) e de inferências (indispensáveis ao funcionamento do esquema) é a chave da generalização do esquema. O esquema é uma função temporalizada de argumentos que permite gerar diferentes seqüências de ações e tomadas de informações em função dos valores das variáveis de cada situação.

Os *invariantes operatórios* são designados pelas expressões *"conceito-em-ação" e "teorema-em-ação";* são os componentes essenciais dos esquemas e determinam as diferenças entre eles.

Quanto aos conceitos-em-ação mais importantes, desenvolvidos pelos alunos, Verganus sugere aqueles que envolvam a grandeza e a dimensão, o valor unitário, a razão, a fração, a função, a variável, taxa constante, dependência e independência, quociente e produto de dimensões. Ressalta que há uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Conceitos são ingredientes dos teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos.

É importante que o aluno explicite suas concepções prévias, pois elas contêm teoremas-em-ação e conceitos-em-ação que, uma vez explicitados, podem evoluir para conhecimentos científicos. Se o aluno não explicitar suas concepções, isso não significa que ele não as tenha, as concepções continuam lá, implícitas. É função do ensino e, mais objetivamente do professor, ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos, a partir de seus conhecimentos implícitos.

A tese subjacente à teoria dos campos conceituais é a de que um bom desempenho didático baseia-se, necessariamente, no conhecimento das dificuldades das tarefas cognitivas, dos obstáculos, do repertório de procedimentos e das representações possíveis; o que, em muito se assemelha à teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, quando sugere que uma das tarefas do professor é a de conhecer a estrutura cognitiva do aluno, seus conhecimentos prévios (subsunçores), "mapeando-os" para então, organizar as atividades facilitadoras da aprendizagem.

2.4 ANÁLISE DAS DUAS TEORIAS: A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA (TAS) DE AUSUBEL E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (TCC) DE GERARD VERGNAUD

Analisando as duas teorias, assumidas na pesquisa, vemos que:

- a teoria de Ausubel é uma teoria de aprendizagem, de sala de aula, em que acontece a aquisição do conhecimento, em situação formal de ensino, enquanto que, a teoria de Vegnaud é uma teoria psicológica, que se propõe a localizar e estudar as continuidades e rupturas entre conhecimentos de seu ponto de vista conceitual;
- a teoria de Ausubel preocupa-se com a aquisição de conceitos explícitos e formalizados, chegando a propor princípios programáticos, como a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora e a consolidação;
- o que para Ausubel são campos organizados de conhecimento, para Vegnaud são campos conceituais;
- a teoria dos campos conceituais de Vergnaud não é uma teoria de ensino de conceitos explícitos e formalizados, mas subjacente, como já citado

anteriormente, tem a idéia de que os conhecimentos-em-ação podem evoluir para conhecimentos científicos com a mediação do professor.

Assim, Vergnaud (1993), através da sua teoria dos campos conceituais, fornece um referencial muito rico para compreender, explicar e investigar o processo da aprendizagem significativa de Ausubel. Para Vergnaud (1993) não basta copiar e repetir, é necessário refletir sobre as ações e, através delas, superar as dificuldades que forem encontradas, pouco a pouco; logo o processo de aprendizagem acontece aos poucos e a formação de um conceito pode durar vários anos.

3 METODOLOGIA

3.1. METODOLOGIA DE PESQUISA

Para investigar se uma metodologia baseada na TAS e na TCC poderia contribuir na construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual da trigonometria, optou-se por uma metodologia qualitativa. Essa escolha é justificada por levar em consideração a compreensão do fenômeno, numa realidade em que a pesquisadora também era a professora. Segundo Moraes e Galiazzi:

> Podemos constatar que toda a pesquisa pretende uma ampliação da compreensão ou da capacidade de explicação dos fenômenos que investiga. A compreensão geralmente é associada às pesquisas qualitativas; (MORAES; GALIAZZI, 2007,p.156).

Além de observar, compreender e refletir sobre o ambiente da pesquisa, era necessário transformá-lo, no sentido de promover melhorias de aprendizagem. Temos, aí, características de uma pesquisa-ação, pois caminham juntas a prática investigativa, a prática reflexiva e a prática educativa, ou seja, o próprio investigador era, também o agente da pesquisa e suas crenças e seus pressupostos teóricos podem influenciar nos resultados observados.

Os instrumentos de coleta de dados foram construídos e utilizados ao longo da pesquisa com fundamentação na TAS e na TCC e analisados, tendo como referência, a Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2007). São eles: o registro oral e escrito dos conhecimentos prévios dos alunos, o registro das observações feitas em sala de aula, o registro escrito dos desempenhos dos alunos, explicitados durante as situações de aula e avaliações formais.

A análise textual discursiva tem como meta produzir novas compreensões sobre os fenômenos a partir da análise dos dados e informações de natureza qualitativa. Ela valoriza a descrição e a interpretação do fenômeno, pretende resignificá-lo, a partir de teorias a priori, como foi o caso. A partir da TAS e da TCC direcionaram-se todas as etapas da pesquisa, inclusive a construção e reconstrução das situações, em função das análises realizadas.

As situações foram planejadas pela autora, com o propósito de favorecer o desenvolvimento do campo conceitual da trigonometria, embasado nas idéias de Ausubel e colaboradores, de que, se o professor almeja uma aprendizagem significativa, é necessário identificar os conhecimentos prévios dos alunos e propor materiais, potencialmente significativos, que levem em conta esses conhecimentos, e que, também, possam contribuir para que os alunos tenham a predisposição para aprender, por meio de aspectos motivadores, como participação efetiva nas atividades propostas, atividades práticas relevantes, construção de materiais para dar sentido aos conceitos, entre outros. Nesses aspectos a teoria TCC de Vergnaud vem complementar a de Ausubel e colaboradores, quando propõe que as situações criadas pelo professor-pesquisador é que permitirão ao aluno atribuir significado aos conceitos que forem trabalhados; situações variadas levam o aluno a dar sentido e, muitas vezes, mudar o sentido dos conceitos que já tinham adquiridos ou que estão por adquirir.

As atividades descritas, nesse trabalho de pesquisa, tiveram como sujeitos uma turma de segunda série do Ensino Médio, composta por 28 alunos, de uma escola da rede particular de Novo Hamburgo, em que a autora dessa dissertação é uma das professoras de Matemática. Em atendimento ao Comitê de Ética desta Universidade, a escola foi informada da pesquisa e autorizou, respaldada pelos responsáveis de cada aluno[4], a veiculação de fotos e materiais provindos dos desempenhos dos estudantes, em sala de aula, pertinentes à pesquisa.

A escola é parte integrante de quatro unidades de ensino; duas delas atendem a turmas, desde a Educação infantil até a quinta série, nos turnos da manhã e da tarde, e ficam na mesma cidade, Novo Hamburgo, porém, em locais diferentes. A terceira unidade de ensino atende a alunos do curso técnico, no turno da noite, e fica na cidade de Igrejinha e a quarta, a turmas do Ensino Fundamental, do Ensino Médio, do Curso Técnico e do Ensino Superior, nos três turnos, sendo essa, a unidade em que a pesquisa foi realizada.

As atividades aconteceram no período de abril de 2008 até setembro de 2008, sempre nos períodos destinados à disciplina de Matemática, que eram quatro horas semanais e respeitaram o conteúdo programático da série.

[4] Na ocasião da matrícula os pais recebem informações a respeito dos procedimentos escolares, dentre eles inclui-se: "Fica autorizada a veiculação de eventuais registros ou fotografias relacionadas ao/a aluno/a ou à sua imagem, em que figuram a prática de atividades constantes no Projeto Pedagógico da Escola, visando à divulgação do trabalho realizado pela Instituição, junto ao corpo docente, discente e à comunidade".

O grupo de alunos era composto por 16 meninas e 12 meninos, com idades entre 16 e 17 anos, de uma turma da segunda série do Ensino Médio, a pesquisadora era além de professora titular de Matemática, a professora conselheira.

A seguir descreve-se a metodologia utilizada com os alunos. Por razões de extensão do material, apresenta-se nessa dissertação, somente algumas atividades, mas que poderão mostrar a essência do trabalho desenvolvido.

3.2 METODOLOGIA DO TRABALHO EM SALA DE AULA

Até o momento em que o trabalho de campo começou, as aulas de Matemática transcorriam como era habitual e como já foi descrito na Introdução.

Antes de iniciar os conteúdos de trigonometria, elaborou-se um mapa conceitual (MOREIRA, 2006) referente a esse campo conceitual (Figura 1). A confecção do mapa conceitual teve como objetivo organizar, de forma hierárquica, a estrutura conceitual do objeto de análise. Segundo Moreira:

> Mapas conceituais devem ser entendidos como diagramas bidimensionais que procuram mostrar relações hierárquicas entre conceitos de um corpo de conhecimentos e que derivam sua existência da própria estrutura conceitual desse corpo de conhecimentos (MOREIRA, 2006, p.10)

Coerente com a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, Novak[5] (1977 apud MOREIRA, 2006) propõe os mapas conceituais de forma a promover a *diferenciação progressiva,* indicando relação de subordinação entre conceitos, mas também a *reconciliação integrativa,* explorando relações entre conceitos e proposições e evidenciando semelhanças e diferenças significativas. O mapa elaborado é uma representação pessoal da autora.

A próxima etapa foi construir e aplicar um questionário (APÊNDICE A), cujo objetivo era de realizar um levantamento das concepções prévias que os alunos tinham a respeito de triângulo retângulo e de como identificar seus catetos e

[5] NOVAK, Joseph D. A theory of education. Ithaca, N. Y.: Cornell University Press, 1977. Trad./português de M. A. Moreira. Uma teoria de educação. São Paulo: Pioneira, 1981.

hipotenusa, bem como da habilidade de representá-lo com ângulos e comprimentos de lados específicos, usando transferidor e régua.

MAPA CONCEITUAL DO CAMPO CONCEITUAL DA TRIGONOMETRIA

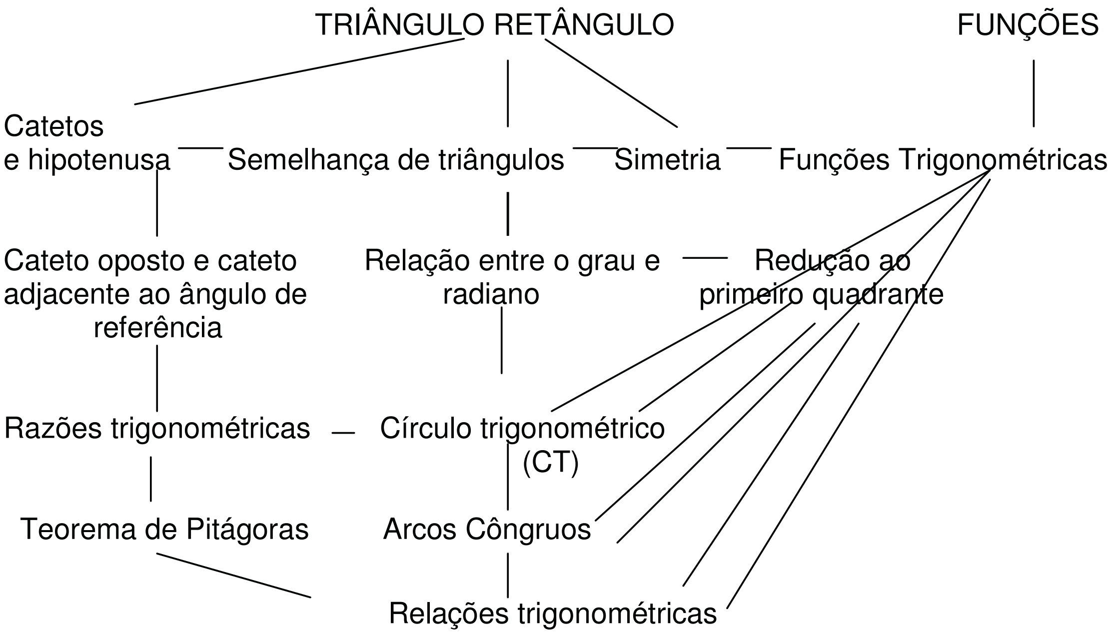


Figura 1: Mapa conceitual do campo conceitual da trigonometria a ser desenvolvido com os alunos.

Para Ausubel, a identificação do conhecimento prévio é imprescindível se o objetivo é de uma aprendizagem significativa; quanto a Vergnaud, ele considera que o conhecimento prévio é determinante e pode evoluir progressivamente dentro do domínio de um campo conceitual, mas para tanto, é necessário que o aluno possa explicitá-lo. Essa era a intenção, poder diagnosticar, obter pistas dos conhecimentos que os alunos tinham e, assim, elaborar e organizar as situações de aprendizagem dali para frente.

Antes de aplicar o questionário, foi esclarecido aos alunos que daquele momento em diante eles trabalhariam de uma forma diferenciada e que as respostas do questionário ajudariam no trabalho posterior do professor. Também foi enfatizado de que eles não precisavam se preocupar em “certo” e “errado” nos questionamentos que se seguiam, mas procurassem respondê-lo com a maior sinceridade possível. Percebeu-se, que devido aos esclarecimentos, eles ficaram mais à vontade para responder o questionário. Durante a realização do mesmo não houve mais intervenção da autora.

O tempo de duração do questionário foi de um período, ou seja, uma hora aula, que corresponde a cinqüenta minutos. As Figuras 1 e 2 ilustram alguns alunos respondendo algumas das tarefas do questionário.

Figura 2: Foto de um aluno respondendo a uma das questões do questionário.

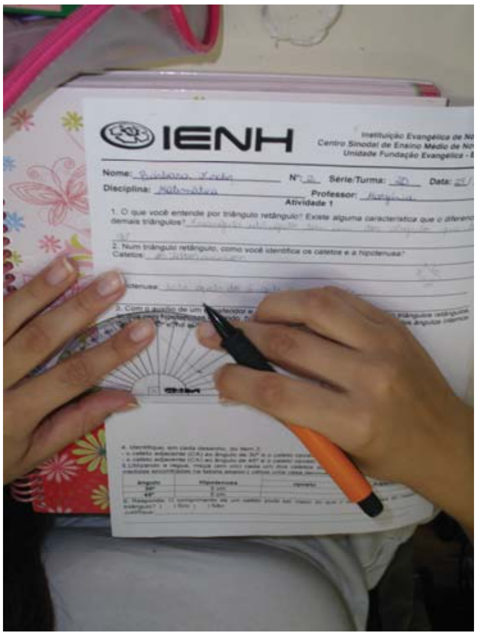


Figura 3: Foto de um aluno utilizando o transferidor.

O questionário foi respondido por vinte e oito alunos. As respostas às tarefas formuladas foram categorizadas segundo a metodologia da Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2007), criando-se categorias que são apresentadas a seguir.

3.2.1 Análise das respostas dos alunos relativas ao questionário inicial

O Quadro 1 apresenta a primeira tarefa do questionário e as categorias de respostas que foram formadas a partir dos registros dos alunos quanto a essa questão.

Percebe-se que mais da metade dos alunos identificaram o triângulo retângulo como aquele que possui um ângulo de 90°, característica essa que o diferencia dos demais triângulos. É importante ressaltar que algumas respostas incorporaram mais de uma categoria, razão pela qual a soma dos percentuais não é 100%.

1. O que você entende por triângulo retângulo? Existe alguma característica que o diferencia dos demais triângulos?	
Categorias	Número de alunos (N = 28)
I - Identificam com o ângulo de 90°.	17 (61%)
II – Divisão de um retângulo.	5 (18%)
III - Concepção difusa.	4 (14%)
IV - Lados diferentes	3 (11%)
V - Divisão de um triângulo	2 (7%)
VI - Não respondeu.	1 (3%)

Quadro 1. Categorias de respostas versus número de alunos na primeira tarefa do questionário.

Chamou a atenção o fato de cinco alunos associarem-no com a figura geométrica plana retângulo, como mostram as respostas:: *“Ele é um retângulo com ponta, que dividindo ao meio obtêm-se 2 triângulos”; ou, “Um triângulo retângulo é um triângulo mais “comprido”, com a base de um retângulo”.* Essas respostas parecem vir ao encontro de um questionamento de um dos alunos durante a realização da tarefa: *“Como pode ser triângulo e retângulo ao mesmo tempo?”* Esse comentário nos faz refletir que o adjetivo “retângulo”, que qualifica o tipo de triângulo, possa ser percebido por alguns alunos como substantivo, o que caracterizaria um conceito-em-ação utilizado por eles em situações onde o conceito “triângulo retângulo” fosse evocado.

Em nenhum dos registros foi citado ou mencionado o fato de que a denominação triângulo retângulo estivesse associada ao motivo do ângulo de 90° ser chamado de ângulo **reto** (denominação utilizada na Matemática quando o ângulo tem por medida o valor de 90°).

Também observamos concepções difusas, nas quais o aluno mostrava incoerências nas suas concepções: Por exemplo: "*É um triângulo que tem três lados com bases iguais.*"; ou, *"O triângulo tem lados iguais, 90°, 45°, 45°".* Essa última resposta foi escrita por três alunos, os quais, provavelmente, associaram o conceito de triângulo retângulo com um determinado triângulo com os ângulos internos como os referidos; de qualquer maneira, os três lados não poderiam ter comprimentos iguais.

As demais categorias, que atribuem ao triângulo retângulo a característica de ter os três lados diferentes, além de mostrar uma concepção interessante, reforçam a tendência de os alunos generalizarem situações específicas e, ao mesmo tempo, pode remeter a resposta à concepção relacionada com um retângulo, como mostra a resposta de um aluno: "*É um retângulo dividido em duas partes. Ele tem todos os lados diferentes*".

Por último, a concepção: "*O triângulo retângulo é a divisão do triângulo...[...]"* também pode ser comentada como na categoria anterior.

A diversidade de concepções verificadas nessa primeira questão já corrobora a importância de conhecermos os conhecimentos prévios dos alunos. Pode-se reconhecer alguns teoremas-em-ação:

- "Triângulo retângulo possui um ângulo de 90°" ;
- "Triângulo retângulo vem da divisão de um retângulo, daí ter lados diferentes";
- "Triângulo retângulo vem da divisão de um triângulo";

Quanto a conceitos-em-ação:

- 90º;
- Retângulo;
- Triângulo ≠ retângulo

Para Vergnaud, muitas vezes, a escola superestima o conhecimento explícito e desconsidera o conhecimento implícito, nos quais, por meio de esquemas (conceitos e teoremas-em-ação), o estudante tem a oportunidade de evoluir seu conhecimento para o conhecimento científico; para tanto, é necessário que o professor oportunize situações onde o aluno tenha a chance de manifestar-se e, sobretudo, faça uma análise do desempenho dos alunos nessas situações.

Em relação à segunda tarefa, que questionava sobre como identificar os catetos e a hipotenusa em um triângulo retângulo (Quadro 2), a construção das categorias descobriu alguns teoremas-em-ação utilizados pelos alunos: “ Os catetos são menores do que a hipotenusa” , “A hipotenusa é o lado maior” e “Os catetos formam o ângulo de 90°”. Na categoria denominada de “concepção difusa”, encontrou-se respostas que evocavam alguns esquemas referentes ao triângulo retângulo, como o teorema de Pitágoras, ainda que de forma incorreta: “Catetos: catetos ao quadrado = à hipotenusa. Hipotenusa: o quadrado dos catetos é igual a hipotenusa.” Segundo Moreira:

> Em geral, os alunos não são capazes de explicar ou mesmo expressar em linguagem natural seus teoremas e conceitos-em-ação. Na abordagem de uma situação, os dados a serem trabalhados e a seqüência de cálculos a serem feitos dependem de teoremas-em-ação e da identificação de diferentes tipos de elementos pertinentes. A maioria desses conceitos e teoremas-em-ação permanecem totalmente implícitos, mas eles podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e aí entra o ensino: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito (MOREIRA, 2004, p.17).

2. Num triângulo retângulo, como você identifica os catetos e a hipotenusa ?	
Categorias	Número de alunos (N=28)
I - Identificam os catetos como os menores lados e a hipotenusa como o maior lado.	15 (53%)
II - Identificam os catetos como os lados que formam o ângulo de 90° e a hipotenusa unindo os catetos.	7 (25%)
III - Concepção difusa.	5 (14%)
IV - Não respondeu.	1 (4%)

Quadro 2. Categorias de respostas versus número de alunos na segunda tarefa do questionário.

A tarefa 3 envolveu o domínio simultâneo da representação da medida angular e da medida da hipotenusa e, além disso, a habilidade de manusear o transferidor para construir as figuras planas. Sobre essa habilidade, alguns alunos comentaram, referindo-se ao transferidor:

- “ Professora eu não sei usar isso.”
- “ Como é que eu uso?”
-“ A gente não sabe medir.”

Além dessa dificuldade, as respostas demonstraram que o controle das medidas de duas variáveis não é uma tarefa simples para a maioria dos alunos. Esse fato gerou as subcategorias descritas na Quadro 3.

<table>
<tr><td colspan="3">3. Com o auxílio de um transferidor e de uma régua, faça o desenho de dois triângulos retângulos, ambos com hipotenusa medindo 5,0 cm de comprimento: em um deles, um dos ângulos internos deve ser 30º e, no outro, um dos ângulos internos deve ser 45º.</td></tr>
<tr><td>Categorias</td><td>Subcategorias</td><td>Número de alunos (N=28)</td></tr>
<tr><td>I - Representaram corretamente os dois triângulos retângulos, respeitando as medidas angulares e a medida da hipotenusa propostas pelo enunciado.</td><td></td><td>10 (35%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II - Representaram incorretamente os dois triângulos retângulos.</td><td>II A – A medida da hipotenusa não estava correta e a medida do ângulo estava correta.</td><td>4 (14%)</td></tr>
<tr><td>II B – Ora as medidas dos ângulos, ora a da hipotenusa estavam incorretas.</td><td>5 (18%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III- Representaram incorretamente um dos dois triângulos retângulos.</td><td>III A - Representaram incorretamente aquele cuja medida para ângulo interno era de 30° e corretamente aquele cuja medida para ângulo interno era de 45°</td><td>7 (25%)</td></tr>
<tr><td>III B - Representou corretamente aquele cuja medida para ângulo interno era de 30° e incorretamente aquele cuja medida para ângulo interno era de 45°</td><td>1(4%)</td></tr>
<tr><td>IV - Não fez o desenho</td><td></td><td>1 (4%)</td></tr>
</table>

Quadro 3. Categorias de respostas versus número de alunos na terceira tarefa do questionário.

Com relação à identificação dos catetos opostos e adjacentes da tarefa 4, o Quadro 4 apresenta as categorias que foram formadas a partir das respostas dos alunos. Dentre os alunos que representaram corretamente os triângulos, solicitados na questão anterior, alguns conseguiram identificá-los, outros acusaram erros de fontes diversas. Uma delas parece ser o de não terem os conceitos de cateto oposto e de adjacente bem esclarecido, como demonstram alguns comentários verbalizados durante a realização do questionário:

- " O que é cateto adjacente e cateto oposto?"

- " O que é oposto?"

- " O adjacente é o que está ao lado e a hipotenusa é o maior?"

- "É o oposto ao ângulo?"

Ressalte-se que essas observações foram anotadas durante a realização da tarefa.

<table>
<tr><td colspan="4">4. Identifique, em cada desenho, do item 3:
- o cateto adjacente (CA) ao ângulo de 30º e o cateto oposto (CO) ao ângulo de 30º;
- o cateto adjacente (CA) ao ângulo de 45º e o cateto oposto ao ângulo de 45º (CO);</td></tr>
<tr><th>Categorias</th><th>Subcategorias</th><th>Subcategorias</th><th>Número de alunos (N=28)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">I - Representaram corretamente os dois triângulos retângulos, respeitando as medidas angulares e a medida da hipotenusa propostas pelo enunciado.</td><td>I A - Identificaram corretamente os catetos adjacentes e opostos em cada um dos triângulos.</td><td></td><td>7 (25%)</td></tr>
<tr><td>I B - Não identificaram os catetos adjacentes e opostos de cada um dos triângulos</td><td></td><td>3 (11%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II - Representaram incorretamente um dos dois triângulos retângulos.</td><td>II A - Representaram incorretamente aquele cuja medida para ângulo interno era de 30° e corretamente aquele cuja medida para ângulo interno era de 45°.</td><td>II A i - Identificaram corretamente os catetos adjacentes e opostos do triângulo</td><td>7(25%)</td></tr>
<tr><td>II B - Representou corretamente aquele cuja medida para ângulo interno era de 30° e incorretamente aquele cuja medida para ângulo interno era de 45°.</td><td>II B i - Identificou incorretamente os catetos adjacentes e opostos.</td><td>1 (4%)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">III - Representaram incorretamente os dois triângulos retângulos.</td><td rowspan="2">III A – A medida da hipotenusa não estava correta e a medida do ângulo estava correta.</td><td>III A i – Não identificaram os catetos opostos e adjacentes aos ângulos.</td><td>2 (7%)</td></tr>
<tr><td>III A ii – Identificaram os catetos opostos e adjacentes, apesar de a representação estar incorreta.</td><td>2 (7%)</td></tr>
<tr><td>III B – Ora as medidas dos ângulos, ora a da hipotenusa estavam incorretas.</td><td>III B i - Não identificou os catetos opostos e adjacentes aos ângulos.</td><td>1 (3%)</td></tr>
<tr><td></td><td>III B ii - Identificaram os catetos opostos e adjacentes, apesar de a representação estar incorreta.</td><td>4 (14%)</td></tr>
<tr><td>IV - Não fez o desenho.</td><td></td><td></td><td>1(4%)</td></tr>
</table>

Quadro 4. Categorias de respostas versus número de alunos na quarta tarefa do questionário.

Em outras categorias, pôde-se notar que a maioria dos alunos dispunha, de forma correta, dos conceitos requisitados, mas tinham representado os triângulos de forma incorreta.

Seguem as representações (Figuras 4 e 5) de dois alunos que identificaram corretamente os catetos oposto e adjacente, mas desenharam os triângulos incorretamente (medidas dos lados).

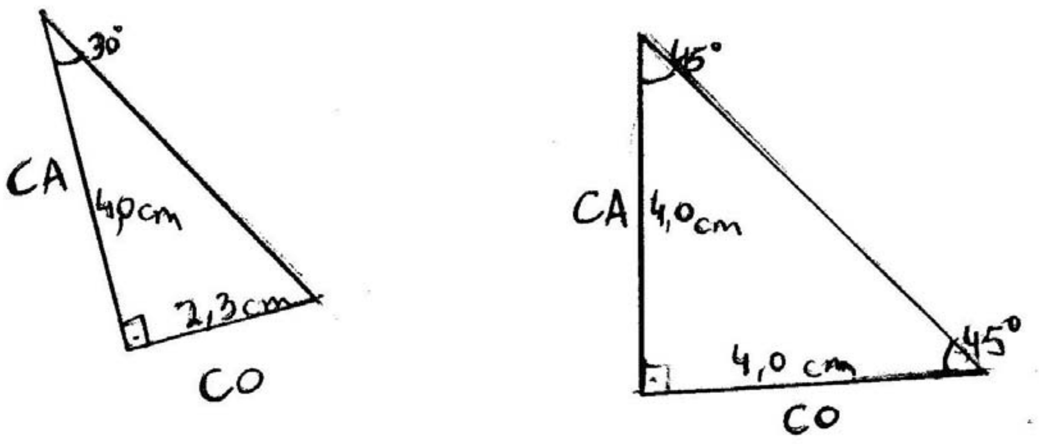


Figura 4 : As medidas angulares estão corretas, mas as medidas da hipotenusa são, respectivamente, 4,4 cm e 5,2 cm.

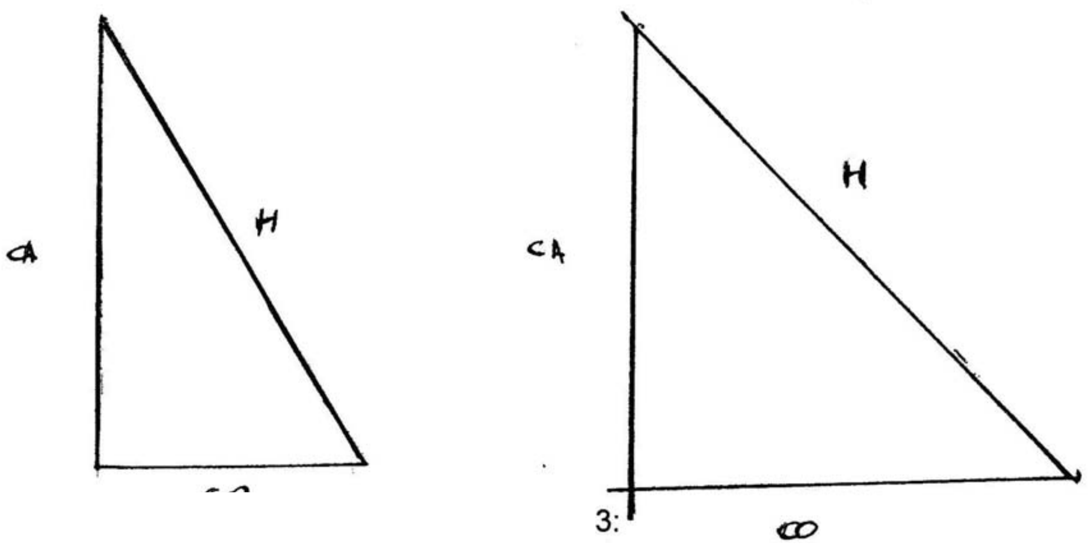


Figura 5 : As medidas angulares estão corretas, mas as medidas da hipotenusa são, respectivamente, 7 cm e 8,5 cm.

Segundo o mapa conceitual da autora (Figura 1), os conceitos de cateto oposto e de cateto adjacente eram os mais inclusivos depois dos conceitos de triângulo retângulo e funções; esse último não foi abordado no presente questionário.

A tarefa 5 solicitava que fossem medidos, com régua, os comprimentos dos catetos opostos e adjacentes aos ângulos de 30° e 45°, de cada triângulo representado nas questões anteriores. Portanto, dependia do sucesso nas questões precedentes. Apenas 25% dos alunos completaram-no adequadamente.

Quanto a possibilidade de um cateto ter comprimento maior do que a hipotenusa (tarefa 6 – Quadro 5), a maioria negou ser essa uma característica de um triângulo retângulo. Como mostram algumas das respostas dos alunos: “Não sei justificar, mas sei que é impossível o cateto ser maior” e “ A hipotenusa sempre vai ser a maior medida”. “Se o cateto for maior que a hipotenusa não é um triângulo retângulo”. Alguns alunos justificaram com o enunciado do teorema de Pitágoras e, aparentemente dois alunos que não responderam ser possível o cateto ser maior do que a hipotenusa, não entenderam ou interpretaram mal a tarefa.

Segundo Vergnaud, os conhecimentos implícitos dos esquemas não são facilmente explicitados. Esta questão retrata a dificuldade de justificar o aparentemente “óbvio” para os alunos: “ a hipotenusa é o lado maior”, respondido por 14 deles.

> Vergnaud considera que os esquemas necessariamente se referem a situações, a tal ponto que, segundo ele, dever-se-ia falar em interação esquema-situação ao invés de interação sujeito-objeto da qual falava Piaget. Decorre daí que o desenvolvimento cognitivo consiste sobretudo, e principalmente, no desenvolvimento de um vasto repertório de esquemas (VERGNAUD apud MOREIRA, 2004, p.12).

.

<table>
<tr><td colspan="3">6. Responda: O cateto pode ser maior do que a hipotenusa?</td></tr>
<tr><td>Categorias</td><td>Subcategorias</td><td>Número de alunos (N=28)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I - Não</td><td>I A – Justificaram afirmando que a hipotenusa é o maior lado.</td><td>14 (50%)</td></tr>
<tr><td>I B – Não souberam justificar</td><td>5 (18%)</td></tr>
<tr><td>I C – Invocaram o teorema de Pitágoras</td><td>4 (12%)</td></tr>
<tr><td>I D -Não justificou</td><td>1 (4%)</td></tr>
<tr><td>II- Sim</td><td>IIA - Esse é diferencial do triângulo retângulo.</td><td>2 (8%)</td></tr>
<tr><td>III- Não responderam</td><td>Não responderam</td><td>2 (8%)</td></tr>
</table>

Quadro 5. Categorias de respostas versus número de alunos na sexta tarefa do questionário

Depois de feita a análise sobre as concepções prévias que os alunos tinham a respeito do triângulo retângulo, prestou-se alguns esclarecimentos sobre o mesmo, que se faziam necessários, em função das categorias evidenciadas. Foram abordados:

- o motivo de o triângulo retângulo ter essa denominação: noventa graus é denominado ângulo reto;
- os catetos são os lados do triângulo que formam o ângulo de noventa graus e que a hipotenusa é o lado do triângulo que fica na frente do ângulo de noventa graus ou que une os dois catetos;
- como usar corretamente o transferidor para construir e medir ângulos;
- o cateto oposto e o cateto adjacente dependem do ângulo de referência;
- o teorema de Pitágoras, que diz que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos;
- o nome do assunto a ser estudado é, trigonometria: um pouco da sua história foi relatada (APÊNDICE B). A história da trigonometria vai realizar nesse momento da aprendizagem a função de organizador prévio. Segundo Ausubel e colaboradores (1980), o organizador prévio é um elemento motivador, serve de ponte entre aquilo que o aluno já sabe e o que ele virá a aprender, pois permite a ligação entre a nova informação e os subsunçores relevantes que já estão na estrutura cognitiva do aprendiz. Além disso, eles conseguem perceber que a Matemática, como ciência, não é fruto de um só homem, num só tempo.

A análise das concepções prévias, conforme já foi comentado, serviu de referência para a elaboração das situações que foram propostas daí em diante e que são descritas a seguir. A primeira delas chamou-se de S*ituação 1* e teve o objetivo de introduzir a *definição das razões trigonométricas*.

Para a situação 1 (APÊNDICE C) utilizaram-se trinta triângulos retângulos feitos de material E.V.A., confeccionados pela pesquisadora, com as características apresentadas no Quadro 6.

Esses trinta triângulos foram distribuídos aleatoriamente aos alunos da turma. Num primeiro momento, eles trabalharam individualmente; depois, foram reunidos em grupos, da seguinte maneira: a pesquisadora perguntou quem tinha o triângulo retângulo de ângulo interno de dez graus, vinte graus, vinte e cinco graus e assim por diante, até que todos encontrassem o seu grupo de trabalho. Para realizarem as razões propostas tinham que utilizar novamente os conceitos de catetos e hipotenusa e de cateto oposto e cateto adjacente ao ângulo de referência.

A partir das conclusões obtidas nos grupos passou-se a categorizar as respostas dos alunos.

Ângulos	Hipotenusa	Cor
1) 10º e 80º	10 cm	Branco
	20 cm	Branco
	30 cm	Branco
2) 20º e 70º	10 cm	Rosa
	20 cm	Rosa
	30 cm	Rosa
3) 25º e 65º	10 cm	Roxo
	20 cm	Roxo
	30 cm	Roxo
4) 30º e 60º	10 cm	Amarelo
	20 cm	Amarelo
	30 cm	Amarelo
5) 35º e 55º	10 cm	Azul
	20 cm	Azul
	30 cm	Azul
6) 37º e 53º	10 cm	Rosa
	20 cm	Rosa
	30 cm	Rosa
7) 40º e 50º	10 cm	Branco
	20 cm	Branco
	30 cm	Branco
8) 45º e 45º	10 cm	Roxo
	20 cm	Roxo
	30 cm	Roxo
9) 62º e 28º	10 cm	Azul
	20 cm	Azul
	30 cm	Azul
10) 75º e 15º	10 cm	Amarelo
	20 cm	Amarelo
	30 cm	Amarelo

Quadro 6. Tabela que demonstra como foram confeccionados os trinta triângulos, em material E.V.A .

3.2.2 Análise das respostas obtidas a partir da situação 1

Esta situação previa que os alunos fossem capazes de (re)construir os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, como razões trigonométricas. A palavra (re)construir, aqui citada, quer fazer referência ao fato de que, esses conceitos já foram trabalhados na oitava série do Ensino Fundamental e, talvez, alguns dos alunos já conhecessem. Inclusive, alguns professores iniciam o conteúdo de trigonometria, diretamente no círculo trigonométrico, por considerar esses conceitos já aprendidos.

A utilização de triângulos semelhantes confeccionados em material de fácil manuseio era uma forma de estimulá-los a utilizarem os conhecimentos anteriores por meio de ações concretas, como medir ângulos, utilizando o transferidor e medir os lados utilizando a régua, realizando aproximações sempre que necessário. Outro aspecto que a situação procurou privilegiar foi o trabalho em grupo, pois Vergnaud acredita que a interação social tem papel importante na formação de um conceito.

Durante a realização das tarefas individuais e em grupos foi constatado um alto nível de concentração e envolvimento por parte dos alunos, o que surpreendeu positivamente a pesquisadora. Eles pareciam preocupados em realizar com competência as tarefas propostas, como mostram as fotos das Figuras 6, 7, 8 e 9.

Figura 6: Foto do aluno medindo um dos ângulos internos do triângulo retângulo.

Figura 7: Foto de um aluno medindo um dos lados do triângulo.

Figura 8: Foto dos três triângulos semelhantes sendo agrupados por um dos grupos

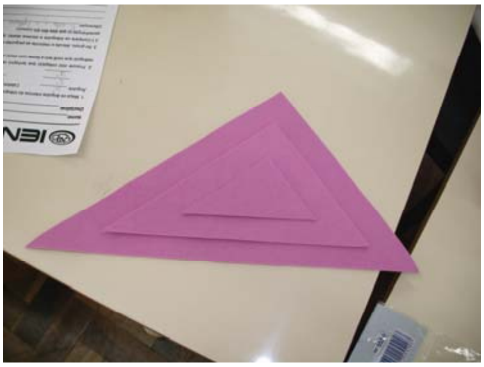


Figura 9: Foto dos três triângulos semelhantes sendo agrupados, de outra maneira, por um dos grupos

A comparação dos triângulos do mesmo grupo e a demonstração da mesma foi objeto das tarefas 3 e 4 (Quadro 7).

3. No grupo, discuta e responda as perguntas abaixo: 3.1.Compare os triângulos e escreva abaixo, quais são as suas diferenças e quais são as suas semelhanças (o que eles têm em comum). 3.2. Faça um desenho (não necessariamente no tamanho real), que demonstre as conclusões acima, referentes à comparação entre os triângulos.	
Categorias	Número de grupos (N=10)
Diferenças: I- Identificam que a diferença está no tamanho (medida) da hipotenusa e dos catetos.	10 (100%)
Semelhanças: I- Identificam que a semelhança está na medida dos ângulos internos.	10 (100%)

Quadro 7. Categorias de respostas versus número de grupos relativas à tarefa 3.1 e 3.2 da situação 1

As conclusões obtidas nas tarefas 3.1 e 3.2 foram amplamente satisfatórias. Com relação à tarefa 3.2 percebe-se que todos os grupos ao realizarem a representação gráfica dos três triângulos, mantiveram a coerência explicitada na tarefa 3.1, sendo que nove dos dez grupos fizeram a representação dos três triângulos superpondo-os. As Figuras 8 e 9 demonstram, por meio de material concreto, como alguns grupos representaram os triângulos. Um grupo não realizou a tarefa. Pode-se conjecturar que, ou eles não conseguiram interpretar o enunciado da tarefa, ou faltou tempo para terminá-la.

As tarefas quatro e cinco continham uma série de anotações sobre as medidas já realizadas em cada triângulo retângulo e a solicitação de efetuar algumas divisões. Não foram realizadas categorizações dessas duas tarefas porque a tarefa seis faria um retorno à elas, no sentido de procurarem identificar o que estava acontecendo com as divisões e o motivo disso.

O Quadro 8 demonstra que oito dos dez grupos identificaram que o resultado das divisões permanecia o mesmo e isso se devia ao fato de que todos os triângulos tinham o mesmo ângulo e dois grupos não responderam à tarefa. Talvez o tempo possa ter sido um fator interveniente, talvez não conseguissem chegar a um consenso no grupo.

6. Observe e discuta com o seu grupo as prováveis razões do que foi encontrado.	
Categorias	Número de grupos (N=10)
I- Identificam que o resultado das divisões permanecia o mesmo e isso se déia ao fato de que todos os triângulos têm o mesmo ângulo	8 (80%)
II- Não responderam.	2 (20%)

Quadro 8. Categorias de respostas versus número de grupos relativas à tarefa 3.2 da situação 1

Essa situação privilegiou o uso de idéias e conceitos que já haviam sido trabalhados com os alunos, idéias âncora ou subsunçores, como se refere Ausubel e colaboradores (1980), e o uso de material concreto pode ser considerado como um material potencialmente significativo. Também favoreceu interação social, que segundo Vergnaud (1993) é uma das formas de promover a explicitação das idéias dos alunos.

Para encerrar essa situação, discutiram-se, com toda a turma, as conclusões obtidas pelos grupos e definiram-se as razões seno, cosseno e tangente para um triângulo retângulo, bem como os ângulos chamados de ângulos notáveis , além de os valores das razões trigonométricas para esses ângulos. Cada aluno fez as devidas anotações, no seu caderno.

Com a intenção de fixar os conceitos (re)construídos, pois as ações dos alunos foram pautadas em reflexões individuais, mas principalmente, em grupo, foram propostas atividades de resolução de problemas do livro-texto adotado pela escola (DANTE, 2007). Segundo Ausubel, a repetição de procedimentos também é importante no processo de aprendizagem significativa. Para Vergnaud, a proposta de situações variadas favorece a conceitualização.

No intuito de encaminhar-se a *Situação 2*, que previa uma atividade prática, a construção do *astrolábio*, foi solicitado, por grupo de quatro alunos, os seguintes materiais, que deveriam ser trazidos na seguinte aula:

- uma caneta esferográfica “bic” sem o refil, para servir de ponto de mira;
- um transferidor de meia-volta ou volta inteira;
- um peso, poderia ser a própria borracha, para dar prumo;
- um pedaço de cordão ou fio onde seria amarrado o peso;
- fita métrica ou trena para realizar as medições.

Essa situação tinha como um dos objetivos, a identificação, dentre as razões trigonométricas estudadas, aquela que seria conveniente para determinar a altura da cesta de basquete, localizada no pátio da escola.

Antes de iniciarem a situação seguiram-se algumas informações históricas sobre o instrumento que iriam confeccionar, o *astrolábio*. Segundo Hogben (1946), o *astrolábio* é um instrumento que já era conhecido há dois milênios antes da era cristã, pelos sacerdotes do mundo mediterrâneo, ele é uma espécie de teodolito rudimentar e foi muito usado para observar as estrelas e os corpos celestes até a invenção do telescópio. Afirma que:

> “Podemos obter um teodolito rudimentar ou astrolábio, para medir o ângulo que uma estrela (ou um objeto qualquer) faz com o horizonte (altura), ou com a vertical (distância zenital), fixando um pedaço de tubo metálico paralelamente à base de um transferidor de madeira, adquirível em qualquer papelaria. Isto feito, amarre um fio de prumo no centro de transferidor. (Para fazer o fio de prumo poderá utilizar uma chumbada. Qualquer linotipista dará um pedacinho de chumbo a quem lhe pedir delicadamente). A divisão tangenciada pela corda quando se visa o objeto com o tubo, é a sua distância zenital (Z),e a altura (h) é 90°- Z .” (HOGBEN, 1946, p. 61)

Falou-se, também, um pouco a respeito do teodolito. Instrumento utilizado na engenharia e por agrimensores para a demarcação de terras. A Figura 11 ilustra o exemplo de um teodolito rudimentar, utilizado desde a idade antiga. O astrolábio acoplou-se à outro transferidor na base formando assim o teodolito.

Após as informações sobre o *astrolábio*, passou-se para a sua construção

Exemplo de astrolábio a ser construído, pelos alunos.

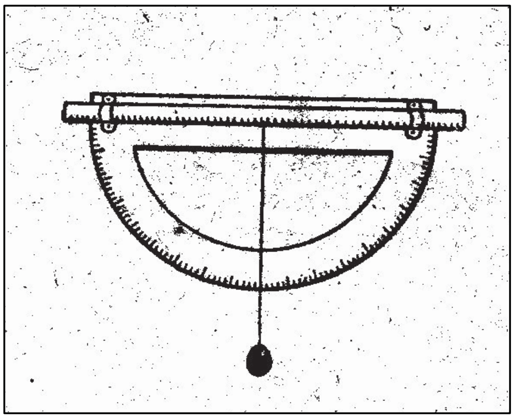
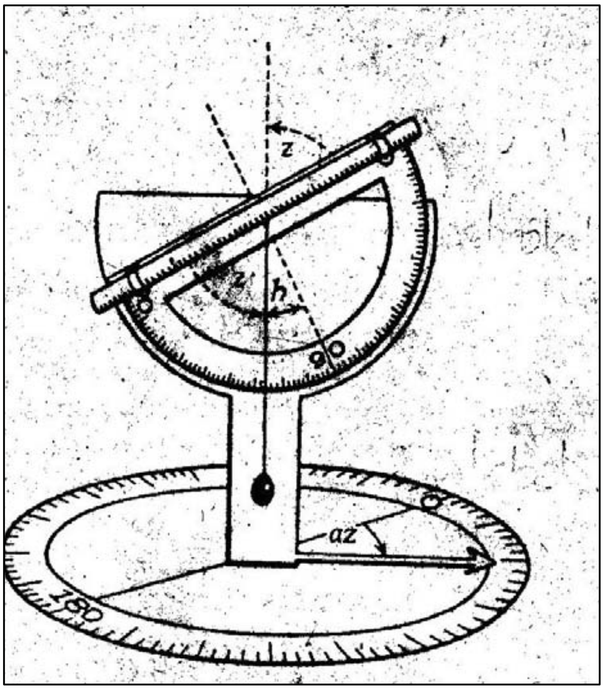


Figura 10: O astrolábio

Fonte: HOGBEN, 1946, pág.61

Em primeiro lugar, os alunos deveriam fixar o peso numa extremidade do cordão e a outra extremidade deveria ser fixada no centro do transferidor. Depois, fixar o suporte que continha o objeto refil de tinta da caneta “bic” no transferidor, na linha horizontal 0° - 180°, de forma que servisse de ponto de mira (Figura 10).



.

Figura 11: Um teodolito rudimentar (formado pelo astrolábio e a alidade[6])

Fonte: HOGBEN, 1946, pág. 61

[6] Alidade é o nome do instrumento utilizado para medir ângulos na horizontal. (HOGBEN, 1946, p. 61)

Foi dado, então, um conjunto de informações sobre o seu uso. O astrolábio dá a direção de subida da mirada. Por exemplo: quando a pessoa está olhando na linha do horizonte o ângulo visualizado é de zero grau, quando a pessoa olha algum objeto acima da linha do horizonte, o astrolábio vai indicar esse ângulo de direção da subida da mirada.

De posse dessas informações, os grupos dirigiram-se para o pátio da escola e tiveram como desafio medir a altura da cesta de basquete, utilizando o astrolábio e a trena ou fita métrica.

Posicionados nos grupos já definidos em sala de aula, eles discutiram o que seria preciso para a realização de tal desafio. Fizeram conjecturas a respeito de como colocar em prática os conceitos aprendidos.

Foi muito interessante ouvir a discussão entre eles, pois eles já sabiam a respeito das razões trigonométricas e agora teriam que definir qual delas utilizar. Estavam "ancorando" a nova situação a ser resolvida em conhecimentos anteriores. Primeiro, verificaram que somente o ângulo não seria o suficiente, necessitariam de outra medida, além da medida angular. Perceberam que essa outra medida poderia ser obtida pela distância do observador até a cesta de basquete. Suas conjecturas levaram-nos a ver que, dentre as razões estudadas, a razão tangente, seria a razão conveniente para realizar tal desafio. A interação social foi importante para a definição dos procedimentos a serem realizados pelo grupo. A explicitação das idéias, no grupo, mostrou como cada grupo estava pensando em realizar a situação. Segundo Vergnaud (1993), a situação que promove uma discussão oral, favorece a explicitação da idéias.

> A atividade da linguagem favorece evidentemente o cumprimento da tarefa e a resolução do problema enfrentado. Sem isto ela não interviria. Tudo se passa como se a atividade da linguagem favorecesse a descoberta das relações pertinentes, a organização temporal da ação e o seu controle (VERGNAUD, 1993, p.19).

Realizaram a medida da distância entre os pés do aluno que estava observando a cesta de basquete até a base da mesma, no solo. Verificaram o ângulo com que o aluno mirava a cesta de basquete e cuja leitura foi feita através do astrolábio, percebendo que a altura do aluno também deveria ser considerada, no cálculo, uma vez que o triângulo retângulo originado não começava do solo e sim do olho do observador até o topo da cesta de basquete. Nesse, momento, percebe-se que o esquema gráfico, utilizado por alguns grupos, teve a sua importância para a interpretação do problema a resolver. Vergnaud classifica esse esquema como perceptivo-gestual e considera que os esquemas são um modo de organização do indivíduo tanto para as habilidades sensório-motoras como as habilidades intelectuais. Nos esquemas encontramos os conhecimentos-em-ação (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação), elementos que o indivíduo utiliza para tornar sua ação operatória. Algumas fotos dessa atividade estão apresentadas nas Figuras 12, 13, 14, 15 e 16.

A partir daí fizeram os cálculos correspondentes e observaram que teriam que usar a calculadora para obter o valor da tangente do ângulo, pois o ângulo não era um valor dentre aqueles denominados de ângulos notáveis. E esse valor era um dos elementos indispensável para concluírem a tarefa.

Tanto a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa puderam ser evidenciadas, pois dentre as razões conhecidas, eles descartaram duas e permaneceram com aquela que lhes parecia mais factível à esse desafio, utilizando o ângulo de mirada e a distância horizontal do observador até o objeto

Figura 12: Aluno medindo a altura do colega até o olho.

Figura 13: Aluno medindo, no chão, a distância da base da cesta de basquete até o seu pé.

O esquema gráfico (Figura 16) também foi utilizado e ajudou-os a interpretar e representar a situação.

O passo seguinte foi o de entregar um relatório para a pesquisadora contendo: título (a ser discutido pelo grupo); objetivos da tarefa; material utilizado, procedimentos e conclusão. O relatório tinha como objetivo, mais uma vez, envolver todos os alunos do grupo na sua confecção, a começar pela escolha do título para a atividade, e rever, em conjunto, todas as etapas que se seguiram até a conclusão da mesma.

Figura 14: Aluno utilizando o astrolábio e observando o topo da cesta de basquete para ver a direção de subida da mirada

Figura 15: Aluno mirando o topo da cesta de basquete por meio do astrolábio

Observou-se, através dos relatórios, que todos os grupos utilizaram a relação trigonométrica tangente para calcular a altura da cesta de basquete.

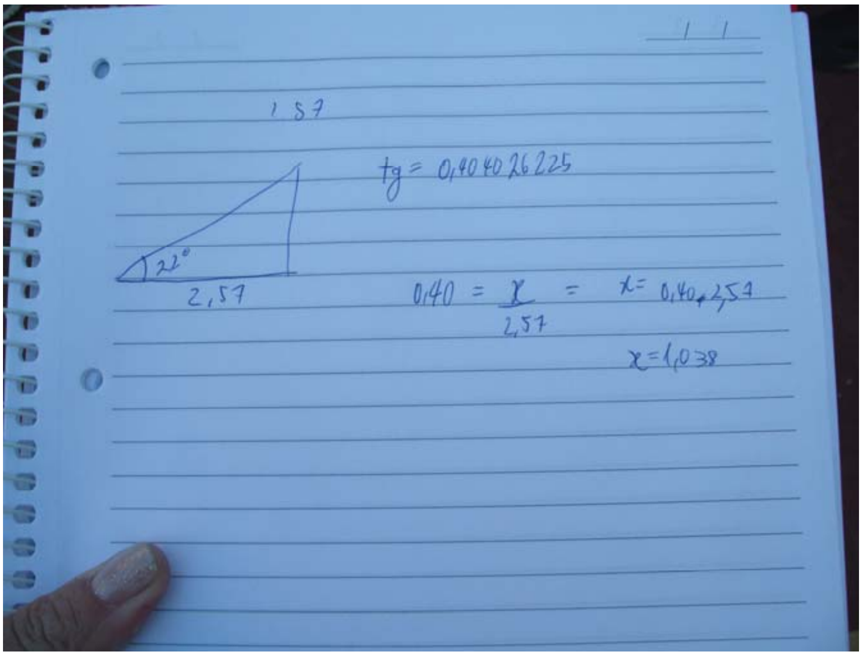


Figura 16: Exemplo de cálculo efetuado na atividade com o astrolábio

Essa situação culminou com a discussão dos relatórios em sala de aula e a conseqüente conclusão, da turma, de que a definição da razão tangente de um ângulo e o uso do astrolábio permite o cálculo não só da altura da cesta de basquete, mas da altura de qualquer outro objeto. Vergnaud (1993), afirma que é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.

Além disso, a situação prática contribuiu para a contextualização dos conceitos. Aproveitou-se o momento para dialogar a respeito da atividade e de outros assuntos pertinentes ao uso da trigonometria. Também vieram à tona assuntos envolvendo o uso do teodolito na construção de rodovias (alguns alunos citaram já terem-no visto na duplicação da BR-101), a tarefa do agrimensor antes e depois do GPS, a inclinação de ruas e estradas (no bairro da Escola existe uma rua onde não é permitida a passagem de caminhões devido à sua inclinação e por ser considerada patrimônio histórico), a altura e largura dos degraus de uma escada (quando é que fica “pesado” para subi-la), a movimentação dos aviões em pleno ar, sem referências terrestres para se localizarem, exigindo uma orientação por altitudes e latitudes e assim por diante.

Promoveram-se também exercícios de fixação do assunto sobre as razões trigonométricas no livro-texto e por meio de questões de vestibular. Combinou-se uma avaliação a respeito do assunto.

3.2.3 Análise dos dados obtidos a partir da primeira avaliação

Antes de verificarmos os resultados com a primeira avaliação é necessário esclarecer que elas ainda aconteceram de uma forma tradicional. Isso se deve a alguns intervenientes no decorrer da pesquisa. Quando a direção da escola liberou a realização da pesquisa, ficou enfatizado de que não poderia haver, no decorrer da mesma, fatos que interferissem no andamento regular da escola. Considerando que o trabalho era desenvolvido para duas das quatro turmas de segunda série do Ensino Médio, estava implícito que o trabalho desenvolvido com estas séries deveria ter o mesmo padrão com respeito à avaliação e preparação para provas de vestibular que as demais.

A avaliação (APÊNDICE D), continha 10 questões envolvendo as razões trigonométricas. Ocupou o tempo de duas horas-aula. O resultado foi categorizado e está descrito abaixo.

Em relação à questão 1 (Quadro 9) observa-se que 10 alunos apresentaram erro na questão.

Categorias	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	17 (63%)
Apresentaram erro na questão	10 (27%)

Quadro 9. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 1 da primeira avaliação

Ao analisarem-se esses erros, observa-se que nove alunos demonstraram dificuldade na interpretação. A Figura 17 exemplifica essa situação. Um outro erro detectado foi a utilização de um valor equivocado para o seno de 45° (Figura 18).

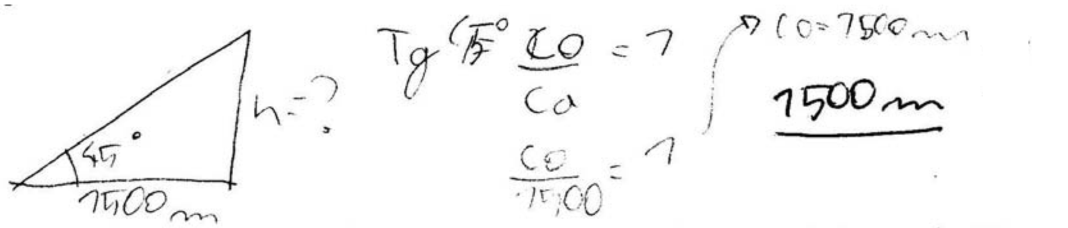


Figura 17: O aluno utilizou o valor de 1500 m como o cateto horizontal.

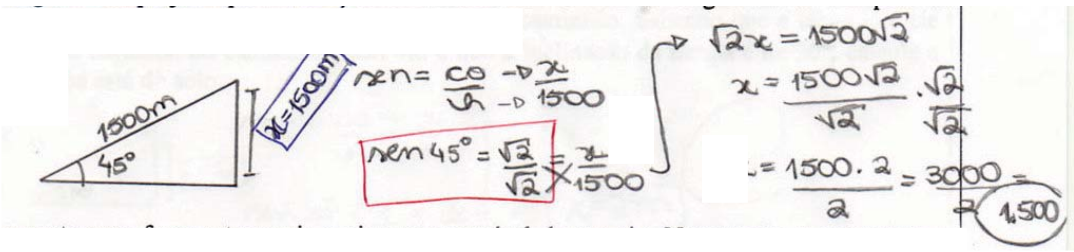


Figura 18: O aluno utilizou um valor de equivocado para seno de 45°.

Segundo Costa, (1999):

> Se nos detivermos na análise de conteúdo de um problema, já teremos motivos de sobra para nos preocuparmos. Pois a interpretação que um aluno dá ao enunciado proposto por um "especialista" será coerente com o seu universo de conhecimento; a representação do aluno dependerá de uma decodificação subjetiva (COSTA, S.1999, p. 67).

Então, é importante observar que esses erros podem não ter nada a ver com os conceitos aprendidos sobre a trigonometria, mas sim, serem cometidos devido a uma dificuldade de interpretação e representação, que como já foi citado, são muito particulares e carregam consigo uma bagagem também muito subjetiva.

A análise dos demais erros (Quadros 10 até 18) demonstram que os tipos de erros (Figuras 19 até 30) cometidos apresentam essa característica, de dificuldade de interpretação e representação (apesar de ter-se sugerido uma representação gráfica para cada problema, nem todos os alunos fizeram-na).

Categorias	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	8 (30%)
Apresentaram erro na questão	19(70%)

Quadro 10. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 2 da primeira avaliação

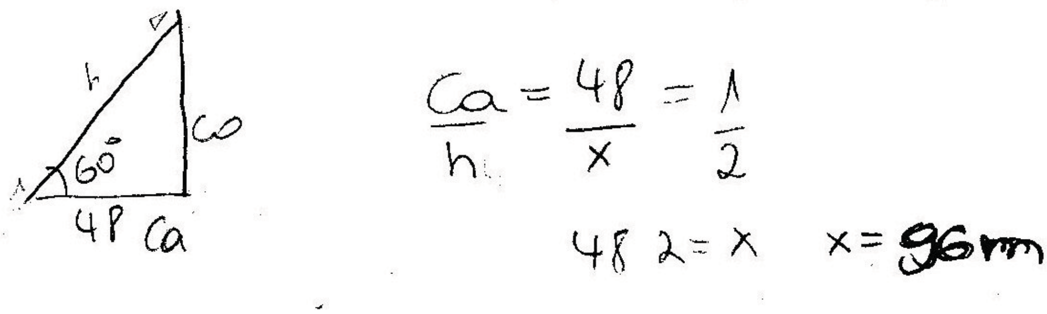


Figura 19: O aluno utilizou a relação incorreta, porque visualizou o ângulo de 60° ou a largura do rio no lugar errado.

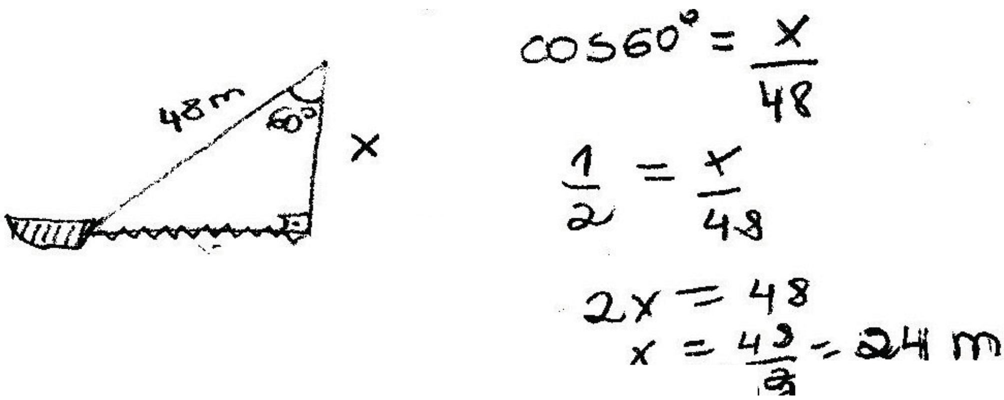


Figura 20: Utilizou a relação incorreta porque trocou o cateto de 48 m pela hipotenusa.

Categorias	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	22 (81%)
Apresentaram erro na questão	5 (19%)

Quadro 11. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 3 da primeira avaliação.

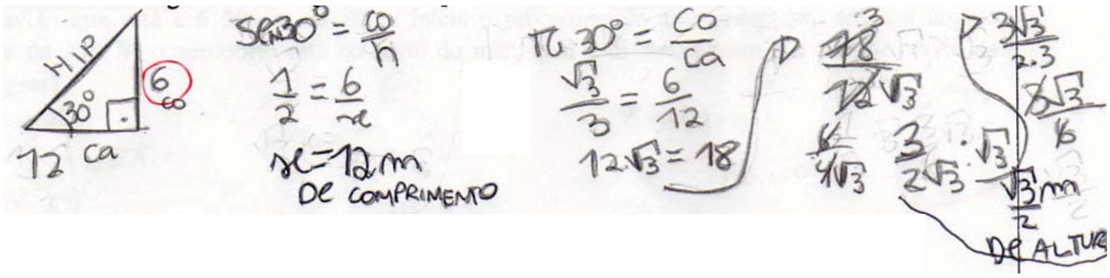


Figura 21: O aluno resolveu corretamente em relação à sua representação

Categorias	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	16 (59%)
Apresentaram erro na questão	11(41%)

Quadro 12. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 4 da primeira avaliação.

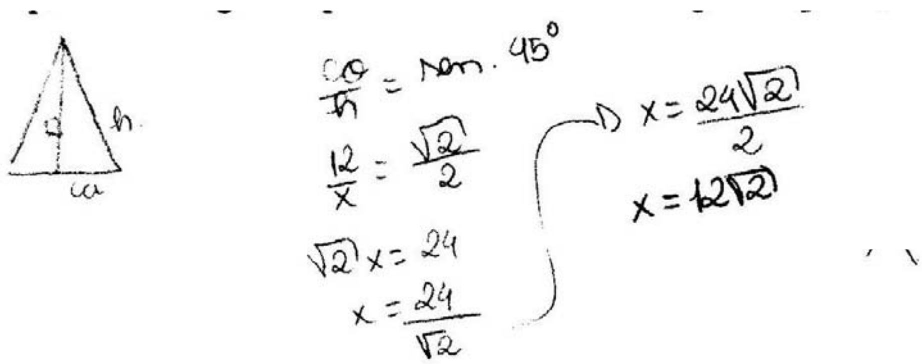


Figura 22: O aluno não percebeu o ângulo de 60°.

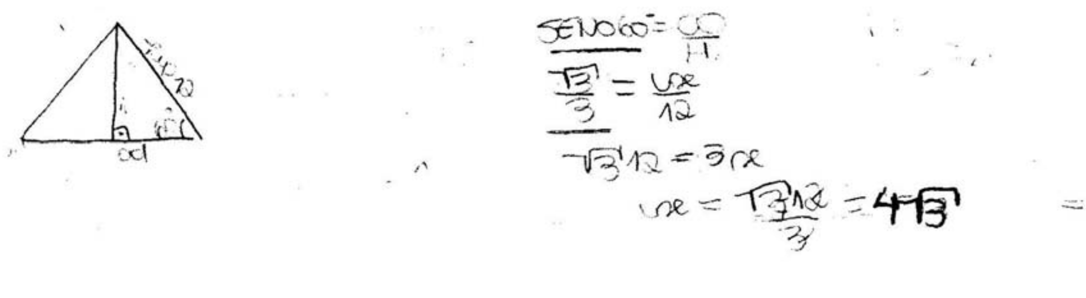


Figura 23: Visualizou a altura e o ângulo de 60°, mas fez erro de cálculo.

Categorias	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	23 (85%)
Apresentaram erro na questão	4 (15%)

Quadro 13. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 5 da primeira avaliação.

Figura 24: O aluno não soube representar os dados.

Categorias	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	22 (81%)
Apresentaram erro na questão	5(19%)

Quadro 14. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 6 da primeira avaliação.

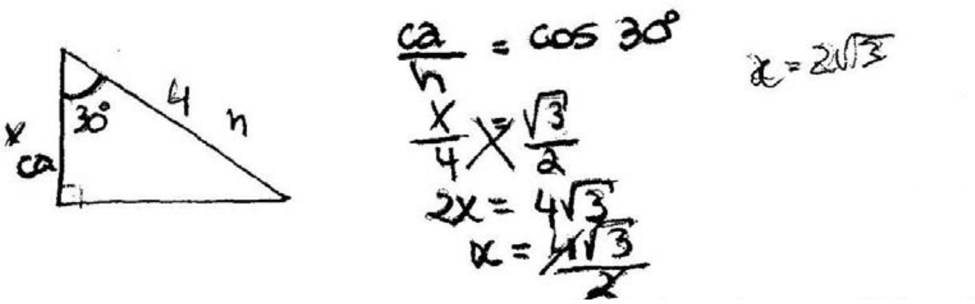


Figura 25: O aluno resolveu corretamente em relação à sua representação.

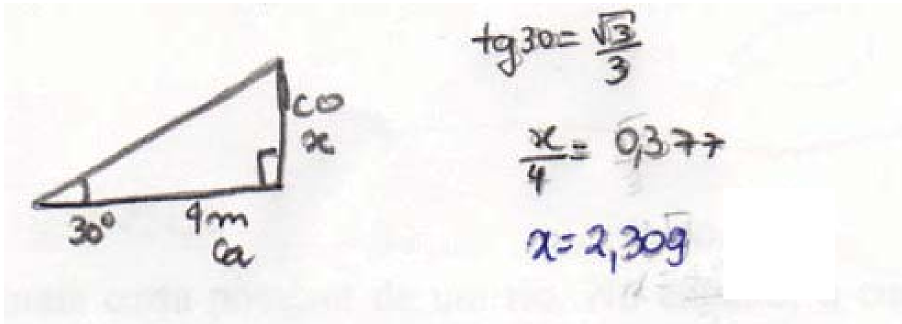


Figura 26: O aluno resolveu corretamente em relação à sua representação.

Categorias	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	20 (74%)
Apresentaram erro na questão	7(26%)

Quadro 15. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 7 da primeira avaliação

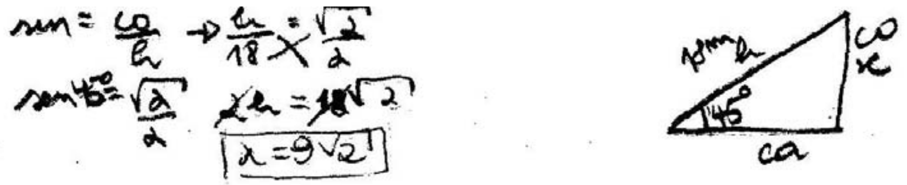


Figura 27: O aluno resolveu corretamente em relação à sua representação.

Categorias	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	18 (67%)
Apresentaram erro na questão	9(33%)

Quadro 16. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 8 da primeira avaliação.

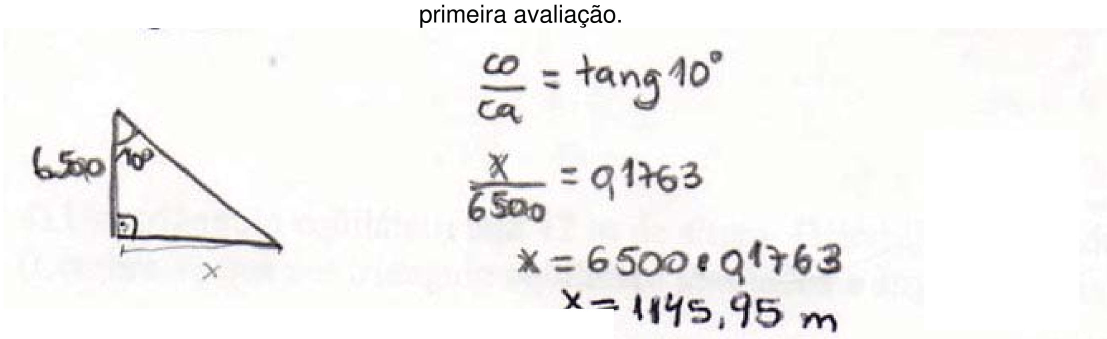


Figura 28: O aluno resolveu corretamente em relação à sua representação.

Categorias	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	23 (85%)
Apresentaram erro na questão	4 (15%)

Quadro 17. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 9 da primeira avaliação.

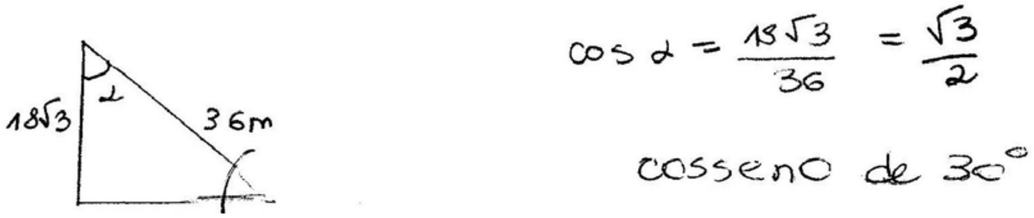


Figura 29: O aluno resolveu corretamente em relação à sua representação.

Questão 10	Número de alunos (N=27)
Acertaram completamente a questão	20 (75%)
Apresentaram erro na questão	7(26%)

Quadro 18. Categorias das respostas versus número de alunos relativas à questão 10 da primeira avaliação.

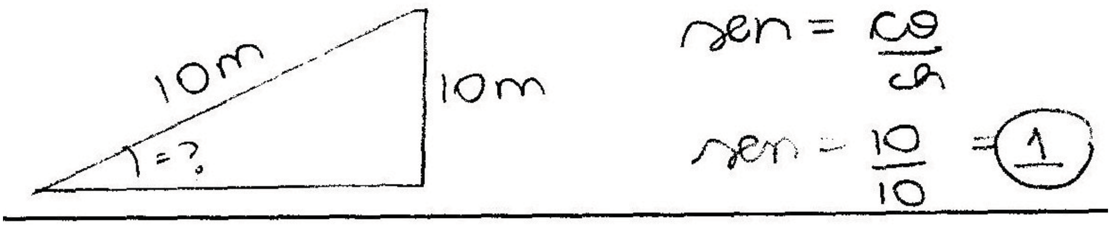


Figura 30: O aluno resolveu corretamente em relação à sua representação.

Considera-se assim, que os resultados da avaliação foram, em geral, satisfatórios. Após a realização da mesma, os alunos receberam as avaliações, puderam discutir entre eles a respeito da resolução da questão e, se necessário, corrigi-la. Desse modo, a avaliação foi assumida por todos que nela estavam envolvidos, forneceu subsídios para uma reflexão daquilo que devia ser melhorado e fortaleceu o ensino e a aprendizagem do assunto em questão.

Já era tempo de partir para a relação entre o grau e o radiano. É o que Ausubel e colaboradores (1980) chamam de consolidação, ou seja, um novo tópico não deve ser introduzido, antes que o anterior esteja estável e organizado.

Elaborou-se, então, uma situação, chamada de *Situação 3,* cujo objetivo era estabelecer uma *relação entre o grau e o radiano* antes de introduzirmos o círculo trigonométrico.

Essa situação aconteceu em dois momentos e contou com a participação de 25 alunos da turma. No primeiro momento, foi distribuído, aleatoriamente, um círculo para cada aluno e uma folha que continha as tarefas da situação (APÊNDICE E). Os círculos foram confeccionados de material E.V.A., de diâmetros e cores variados. Além disso, receberam um pedaço de cordão e uma régua. As Figuras 31 e 32 registram alguns momentos da execução das duas primeiras tarefas, nas quais eles tinham que medir o comprimento da circunferência e do diâmetro e depois fazer a razão entre ambos.

No segundo momento, reunidos em grupos segundo a mesma cor de círculo, realizaram as tarefas seguintes. Ficou combinado que assim que terminassem as tarefas três e quatro, os grupos sinalizariam, para, em conjunto discutir as respostas

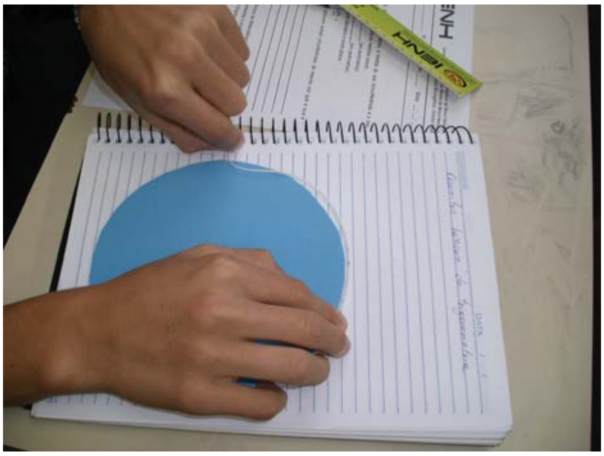
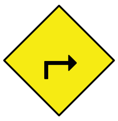


Figura 31: Aluno medindo com o pedaço de cordão o comprimento da circunferência

Figura 32: Aluno conferindo o valor da medida da circunferência na régua.

Logo a seguir, em conjunto, realizamos a tarefa 5. Procurou-se contextualizar a situação através do movimento de um carro numa curva. Alguns lembraram das placas de sinalização ao longo de uma rodovia, por exemplo, quando a curva é muito acentuada à direita, aparece a seguinte placa  , o que significa um aviso ao motorista.

A curva feita pelo carro fez com que pensassem no movimento sobre a circunferência, ou seja, se é dada uma volta completa, percorre-se 2π rad. Se for dada meia volta, percorre-se π rad e assim sucessivamente. Para cada arco temos um ângulo correspondente e vice-versa, assim puderam completar as equivalências da tarefa.

Discutiu-se a regra de três disponível na folha das situações, concluindo que ela valeria para qualquer situação de equivalência a ser solicitada. (Tarefas 5, 6 e 7)

Como etapa final dessa situação, os alunos resolveram exercícios do livro texto.

3.2.4 Análise dos dados obtidos a partir da situação 3

Lembrando que o momento de sala de aula é muito rico e deve ser devidamente explorado e observado pelo professor, deve-se comentar que as tarefas aconteceram num clima de concentração e tranqüilidade. Tinha-se a impressão de que já estavam acostumados com a metodologia de trabalho e sentiam-se, cada vez mais, participantes do processo de ensino-aprendizagem.

Em relação à primeira e à segunda tarefa (Quadro 19) observa-se que 96% dos alunos realizaram as medidas do comprimento da circunferência e do diâmetro com relativa precisão, obtendo um valor que se aproxima do número pi (π).

1. Você recebeu um círculo. Meça, em centímetros, a medida da sua circunferência e o seu diâmetro, utilizando o pedaço de cordão e anote as medidas abaixo:
Medida da circunferência: ____________________(em centímetros)

2. Divida a medida do comprimento pelo diâmetro e anote abaixo:

$$\frac{\text{medida da circunferência}}{\text{diâmetro}} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\ \text{cm}}{\text{cm}} =$$

Categorias	Número de alunos(N=25)
I- Medida do comprimento da circunferência coerente com a circunferência recebida.	24 (96%)
II – Medida do comprimento da circunferência incorreta.	1 (4%)

Quadro 19. Categorias de respostas versus número de alunos relativas às tarefas 1 e 2 da situação 3.

Essa situação permitiu que todos os alunos comprovassem (tarefas 3 e 4) que, apesar dos círculos terem tamanhos diferentes, os resultados da divisão do comprimento da circunferência pelo diâmetro eram “parecidos”, com valores entre 3 e 3,45, o que foi identificado como “pi”, cujo valor é aproximadamente “3,14”, lembrando de que ele já havia aparecido também na disciplina de Física (Ciência) e na de Matemática de oitava série.

Mais uma vez, privilegiou-se, por meio de manuseio de material concreto e da interação social, as ações de medir, comparar, calcular, formular e compartilhar hipóteses ao longo das tarefas. Segundo Moreira:

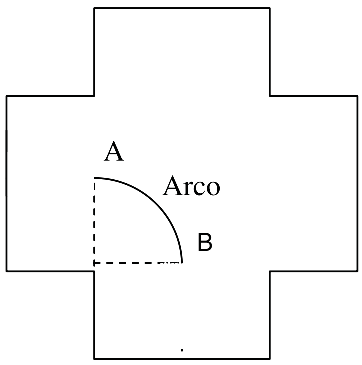
> O papel do professor como mediador, provedor de situações problemáticas frutíferas, estimuladoras da interação sujeito-situação que leva à ampliação e à diversificação de seus esquemas de ação. Ou seja, ao

> desenvolvimento cognitivo, deixa mais evidente que a teoria de Vergnaud tem também forte influência vygostkyana (MOREIRA, 2004, p. 23)

Em relação à tarefa 5, observou-se que as equivalências para os valores de 2π e de π foram mais evidentes e de fácil visualização, enquanto que os valores de $\frac{\pi}{4}$ e de $\frac{\pi}{2}$ geraram certa hesitação em responder e cálculos por parte de alguns alunos, mas isso não apareceu na categorização das respostas (Quadro 20), pois como já disse, nesse momento, as equivalências foram completadas em conjunto.

5. Considere que o desenho abaixo representa o cruzamento entre duas ruas e um carro desloca-se de A para B. Relacione o arco ao ângulo percorrido e complete as equivalências:

Equivalências:



$\frac{\pi}{4} = \_\_\_\_\_\_\_\_^\circ$

$\frac{\pi}{2} = \_\_\_\_\_\_\_\_^\circ$

$\pi = \_\_\_\_\_\_\_\_^\circ$

$2\pi = \_\_\_\_\_\_\_\_^\circ$

Categorias	Número de alunos (N=25)
I- Completaram corretamente, escrevendo respectivamente 45°, 90°, 180° e 360°.	24 (96%)
II- Completou escrevendo respectivamente 0,78 , 1,57 , 3,14 e 6,28.	1 (4%)

Quadro 20. Categorias de respostas relativas à tarefa 5 da situação 3.

Como sugestão, a ordem das equivalências, nessa tarefa, poderia ser alterada e ficar assim :2π, π, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4}$.

No Quadro 21 apresentam-se os resultados da tarefa 6. A maioria dos alunos identificou as duas possibilidades, que o movimento de deslocamento do carro pode ser expresso por meio do grau ou por meio do radiano. Ressalte-se que apesar de estarem nos grupos, cada um deveria responder, por escrito, na sua folha, podendo discutir no grupo a questão. As categorias II, III e IV indicam que os alunos perceberam que há duas formas de indicar o deslocamento angular, mas têm dificuldades de expressar-se.

6. Logo, o deslocamento angular do carro pode ser expresso de duas maneiras, quais são elas?	
Categorias	Número de alunos (N=25)
I- Responderam que podemos usar o grau e o radiano.	18 (72%)
II – Responderam 90°= $\frac{\pi}{2}$ rad.	3 (12%)
III – Ângulo radianos.	1 (4%)
IV – Respondeu que o arco e o grau são medidos em radianos.	1 (4%)
V – Não responderam.	2 (8%)

Quadro 21. Categorias de respostas versus número de alunos relativas à tarefa 6 da situação 3.

Como a intenção era trabalhar a déia de radiano como uma das unidades de medida que se usa quando temos que nos deslocar sobre a circunferência e não apenas a idéia de deslocamento angular, propôs-se, para serem resolvidas, algumas tarefas que provocariam a fixação dessa relação. Observa-se (Quadros 22 até 25) que a turma apresentou um resultado muito satisfatório na realização das tarefas.

7.1. Um carro, ao realizar uma curva, o faz sob um ângulo de 30°, qual é o deslocamento em radianos que ele realiza?	
Categorias	Número de alunos (N=25)
I- Responderam $\pi/6$.	24 (96%)
II – Não respondeu.	1 (4%)

Quadro 22. Categorias de respostas versus número de alunos relativas à tarefa 7.1 da situação 3.

7.1.1.Se o raio da circunferência que subtende essa curva for de 6m, qual é o comprimento do arco, realizado, ou seja, a distância percorrida pelo carro?	
Categorias	Número de alunos (N=25)
I- Responderam 3,14 m	22 (88%)
II – Responderam 2π m.	3 (12%)

Quadro 23. Categorias de respostas versus número de alunos relativas à tarefa 7.1.1 da situação 3.

7.2. Um carro, ao realizar uma curva, o faz sob um ângulo de 60°, qual é o deslocamento em radiano que ele realiza?	
Categorias	Número de alunos (N=25)
II – Responderam. $\pi/3$ rad.	22 (88%)
III – Não responderam.	3 (12%)

Quadro 24. Categorias de respostas versus número de alunos relativas à tarefa 7.2 da situação 3.

7.2.1Se o raio da circunferência que subtende essa curva for de 6m, qual é o comprimento do arco realizado, ou seja, a distância percorrida pelo carro ?	
Categorias	Número de alunos (N=25)
I- Responderam 2π= 6,28 m.	24 (96%)
II – Não respondeu.	1(4%)

Quadro 25. Categorias de respostas versus número de alunos relativas à tarefa 7.2.1 da situação 3.

A *Situação 4* (APÊNDICE F) foi planejada para que os alunos pudessem dar *significado ao raio unitário e à representação das funções trigonométricas no Círculo Trigonométrico (CT).* O conceito de função deveria ser o subsunçor nessa atividade.

Essa situação foi composta de três momentos e contou com a participação de 26 alunos.

No primeiro momento, individualmente, os alunos completaram as tarefas 1 e 2, que retomaram as razões trigonométricas.

O segundo momento foi conduzido pela pesquisadora, discutindo as respostas anteriores e reforçando a idéia já obtida anteriormente de que “o ângulo é que importa no cálculo das razões trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente”.

A comparação entre as respostas individuais garantiu a compreensão de que o comprimento da hipotenusa (raio do círculo) era indiferente.

Propôs-se, então, que dessem sugestões para o valor desse raio, de preferência uma sugestão que facilitasse os cálculos. Hesitaram um pouco, mas de repente, veio a sugestão do valor *um*, pois ao dividir por *um* o valor do seno e do cosseno não se alterariam. Combinou-se que, a partir desse momento, o raio do círculo teria o valor de *uma unidade*, e essa uma unidade significava qualquer valor. Parece que houve assimilação dessa lógica, pois as respostas às tarefas que se sucederam demonstram isso.

O CT estava redesenhado na tarefa 3, precisava-se reinterpretá-lo à luz das novas informações e realizar algumas combinações em conjunto, que seriam anotadas junto ao CT:

➢ a partir de agora, consideraríamos que o raio do CT é *unitário* (apesar de que poderia assumir qualquer valor, porque isso não iria interferir nas razões trigonométricas);

➢ o sistema cartesiano de eixos x e y dividiria o CT em quatro partes, chamadas daqui em diante de quadrantes;

➢ o sentido angular adotado, por convenção, é anti-horário;

➢ cada quadrante receberia uma denominação e teria limites definidos:

• o primeiro quadrante compreenderia ângulos entre 0° e 90°;

• o segundo quadrante compreenderia ângulos entre 90° e 180°;

• o terceiro quadrante compreenderia ângulos entre 180° e 270°;

• o quarto quadrante compreenderia ângulos entre 270° e 360°.

Os alunos foram anotando, cada um na sua folha, o que estava sendo apresentado.

Também completamos, no CT, a medida do ângulo correspondente em radianos, pois já era conhecida a equivalência entre o grau e o radiano.

A seguir, os alunos completaram a tabela da tarefa 3, na qual pretendia-se que visualizassem as razões trigonométricas nos eixos, expandindo a idéia de razão para a idéia de função.

Tentava-se aplicar a diferenciação progressiva proposta por Ausubel: a partir de um tema geral, particularizá-lo, atribuindo-lhe nova conotação, neste caso, introduzindo as funções trigonométricas.

O terceiro momento foi a construção, por parte do aluno, de seu próprio CT para ser utilizado sempre que necessário. Para tanto, já havia sido solicitado que trouxessem para essa aula, uma “bailarina”[7], dois canudinhos de refrigerante, uma folha de papel transparente (parecido com capa de classificador), uma folha de papel para desenho (mais rígida para ser a base ao material), cola, tesoura e dois percevejos.

Eles receberam uma folha com um círculo desenhado e subdividido em seções angulares (Apêndice G), além de outra folha com um molde (APÊNDICE H).

Seguiram-se orientações para confeccionar p “CT prático”. As Figuras 33 até 40 mostram algumas das etapas sendo desenvolvidas.

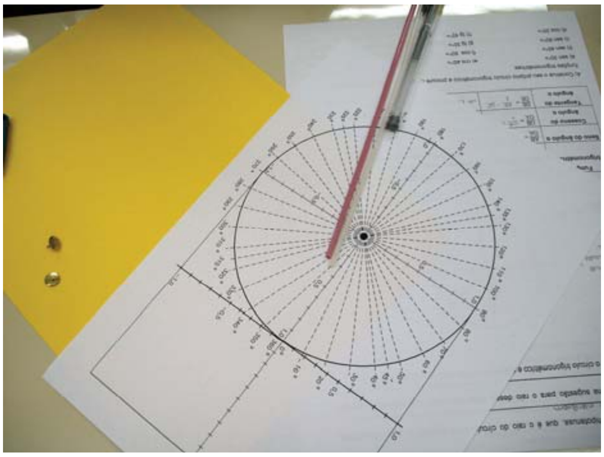


Figura 33: Confecção do Círculo Trigonométrico (CT) por um aluno. Etapa 1.

[7] Bailarina é um tipo de colchete utilizado para agrupar folhas por meio de um furo.

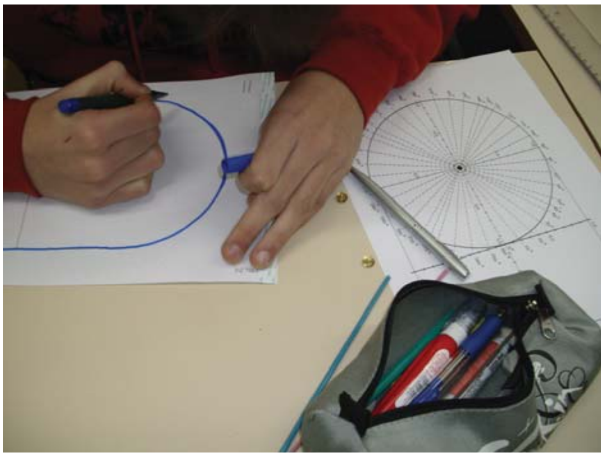
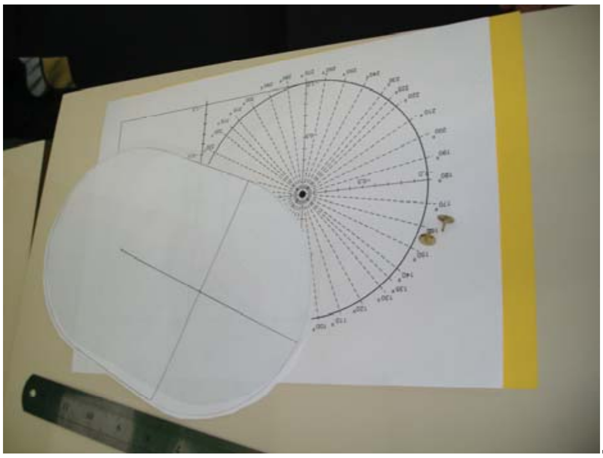


Figura 34: Confecção do Círculo Trigonométrico (CT) por um aluno. Etapa 2.



.

Figura 35: Confecção do Círculo Trigonométrico (CT) por um aluno. Etapa 3.

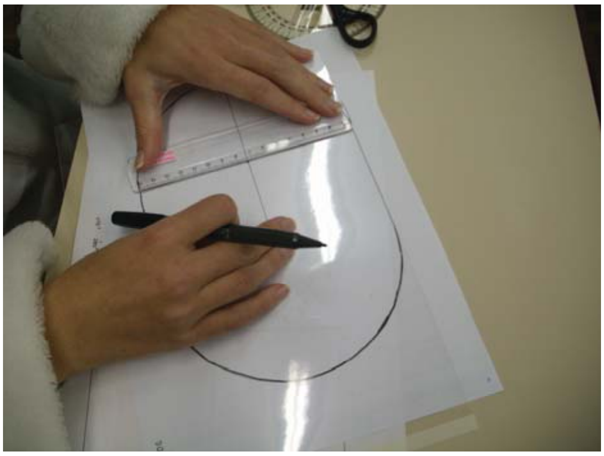


Figura 36: Confecção do Círculo Trigonométrico (CT) por um aluno. Etapa 4.

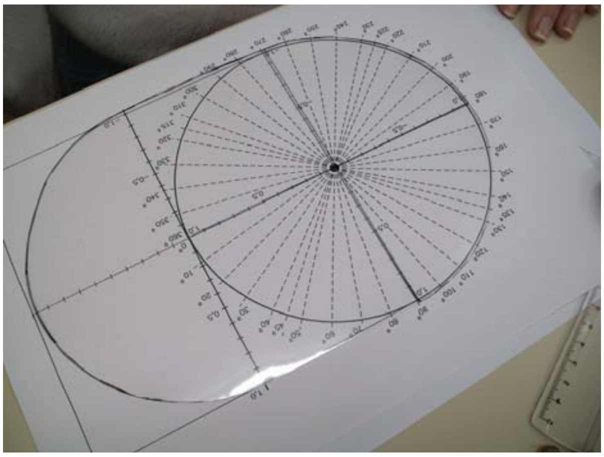


Figura 37: Confecção do Círculo Trigonométrico (CT) por um aluno. Etapa 5.

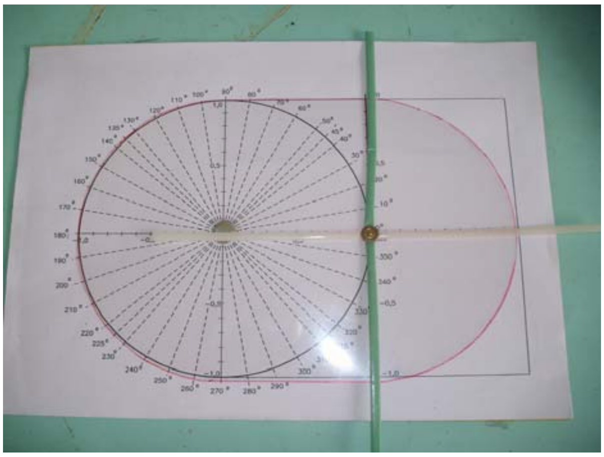


Figura 38: Círculo Trigonométrico (CT) concluído. Etapa 6.

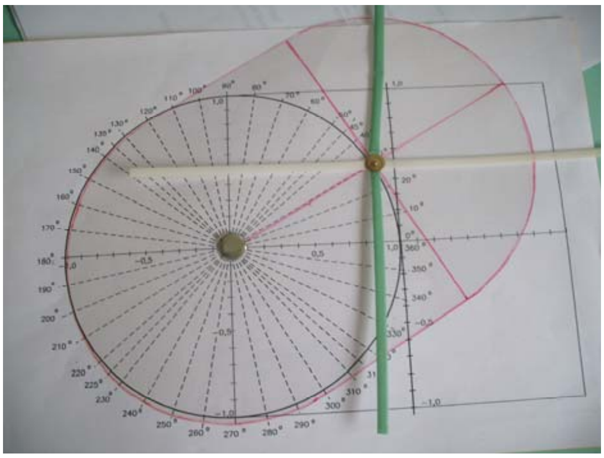


Figura 39: Círculo Trigonométrico (CT) concluído, mostrando um ângulo de trinta graus

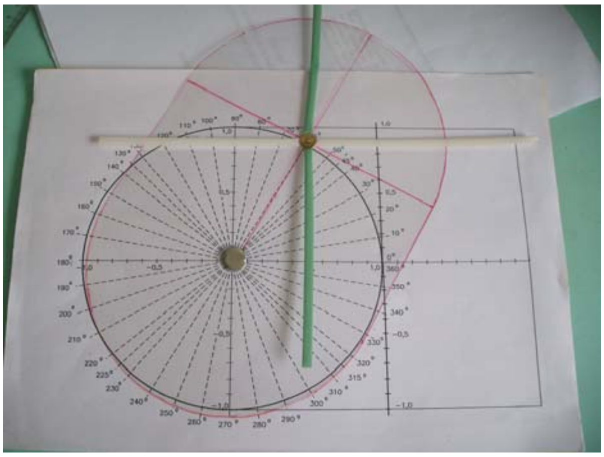


Figura 40: Círculo Trigonométrico (CT) concluído, mostrando um ângulo de sessenta graus

De posse do seu CT, cada aluno foi convidado a aprender como manuseá-lo e a enxergar os valores, por aproximação, realizando, a tarefa quatro e escrevendo esses valores na sua folha. Quando terminaram a tarefa, alguns alunos logo visualizaram que o material confeccionado permitia ir além do primeiro quadrante, pois girava, podendo dar várias voltas. Aproveitou-se o momento e falou-se nos arcos côngruos e o que isso significava: puderam experimentar que a diferença era o número de voltas efetuadas. Essa definição foi complementada pela representação dos arcos côngruos em graus e em radianos.

A situação foi enriquecida com a realização de exercícios do livro-texto e outros fornecidos pela professora, sempre utilizando o CT num primeiro momento e depois aprendendo a usar a calculadora também.

Na aula seguinte aos exercícios combinou-se uma avaliação (APÊNDICE I) sobre a localização dos ângulos no CT e os arcos côngruos.

A seguir,discutiu-se os resultados obtidos na situação 4,recém apresentada.

3.2.5 Análise dos dados obtidos a partir da situação 4

A situação 4 foi desenvolvida em 4 períodos de aula.

Na realização das tarefas 1 e 2, de forma individual, pretendia-se fazê-los retomar os conceitos de razões trigonométricas no triângulo retângulo.

A organização seqüencial, enfatizada por Ausubel e colaboradores (1980), previa a existência provável desses subsunçores na estrutura cognitiva dos alunos; por outro lado, a oportunidade de vivenciarem outras situações-problema vinha ao encontro das orientações da TCC de Vergnaud (1993).

Os alunos foram unânimes em preencher corretamente a tabela e responder que o ângulo era o responsável pelo resultado das razões trigonométricas e de que o tamanho da hipotenusa não poderia interferir no cálculo dessa razão. De onde emergiu um teorema-em-ação, “ângulos de mesma medida originam valores específicos para as razões seno, cosseno e tangente” ou “ as razões trigonométricas dependem do ângulo em questão”. Se os triângulos tinham tamanhos diferentes, isso não importava, o que importava era possuírem o mesmo ângulo de referência. Quatro alunos sugeriram o valor 1.

Quando questionados sobre o valor conveniente para o raio, a maioria respondeu que qualquer valor seria conveniente (Quadro 26).

2.3) Logo, você tem uma sugestão para o raio desse círculo (um valor que seria conveniente) ?	
Categorias	Número de alunos (N=26)
I – Valores arbitrários.	15 (58%)
II- 1 unidade.	4 (15%)
III– Referiu-se ao segmento OE do desenho que estava na folha.	1 (3%)
IV – Não responderam.	6 (24%)

Quadro 26. Categorias de respostas relativas à tarefa 2.3 da situação 4.

O segundo momento privilegiou a seqüência das tarefas e ao reconfigurar o CT, anotando as combinações feitas, os resultados apontados na Quadro 27 mostram que a maioria dos alunos identificou o eixo y como o eixo do seno, o eixo x como o eixo do cosseno e o eixo paralelo a y como o eixo da tangente. Pode-se inferir que realizaram a diferenciação progressiva, evoluindo de um conhecimento geral para um mais específico, a idéia de função trigonométrica. Além disso, o CT era a partir de agora, um esquema gráfico onde poderiam ancorar novos conhecimentos.

No terceiro momento, privilegiou-se a construção de material próprio, o CT e estimulou-se o seu uso. Os resultados anotados na tarefa 4 foram tabulados (Quadro 28) e observa-se que alguns mostram imprecisão de medida, apesar da tarefa ter sido cumprida. Enfatiza-se que a aprendizagem deve ir além da sua dimensão conceitual, sua meta também deve ser a dimensão de procedimentos e atitudes.

Definição das funções trigonométricas(escreva, com suas próprias palavras onde você pode visualizar as funções trigonométricas no círculo acima)			
Seno do ângulo	$\frac{AB}{OA} =$	Categorias	Número de alunos (N=26)
		I – Visualizaram o seno no eixo y.	18 (69%)
		II - Visualizaram no eixo x.	3 (12%)
		III – Difusa	2 (7%)
		IV – Não responderam.	3 (12%)
Cosseno do ângulo	$\frac{OB}{OA} =$	CATEGORIAS	N° DE ALUNOS
		I – Visualizaram o cosseno no eixo x.	18 (69%)
		II – Incoerência nas suas concepções	5 (19%)
		III – Não responderam.	3 (12%)
Tangente do ângulo	$\frac{AB}{OB} =$	CATEGORIAS	N° DE ALUNOS
		I – Visualizaram a tangente no eixo das tangentes.	20 (76%)
		II – Difusa.	3 (12%)
		III – Não responderam.	3 (12%)

Quadro 27. Categorias de respostas relativas à tarefa 3 da situação 4.

4) Construa a sua própria circunferência trigonométrica e procure identificar os valores das seguintes funções trigonométricas: (arredondar para duas casas decimais)		
Tarefa 4	Respostas	Número de alunos (N=26)
sen 30°	0,5	24 (92%)
	Não respondeu	2 (8%)
sen 45°	0,7	24 (92%)
	Não responderam	2 (8%)
sen 60°	0,9	19 (73%)
	0,85	3 (11%)
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1 (4%)
	1	1(4%)
	Não respondeu.	2 (8%)
cos 30°	0,9	18 (69%)
	0,85	2 (8%)
	0,8	3 (11%)
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1 (4%)
	Não respondeu	2 (8%)
cos 45°	0,7	20 (76%)
	0,9	2 (8%)
	0.8	2 (8%)
	Não respondeu.	2 (8%)
cos 60°	0,5	23 (88%)
	0,4	1 (4%)
	Não respondeu.	2 (8%)
tg 30°	0,6	23 (88%)
	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1 (4%)
	Não respondeu.	2 (8%)
tg 45°	1	24 (92%)
	Não respondeu.	2 (7%)

Quadro 28. Tabulação das respostas versus número de alunos para a tarefa 4 da situação 4.

3.2.6 Análise dos dados obtidos a partir da segunda avaliação

A segunda avaliação (APÊNDICE I) continha 6 questões, sendo que apenas a primeira e a segunda tiveram as respostas tabuladas (Quadro 29) porque as demais não seriam necessárias para a seqüência prevista na Figura 1.

Questão	Acertaram completamente a questão (N= 27)	Apresentaram erro na questão (N= 27)
1	22 (81%)	6 (22%)
2	26 (96%)	1 (4%)

Quadro 29. Categorias de respostas versus número de alunos relativas às questões 1 e 2 da segunda avaliação.

Como é importante, numa avaliação formativa, a função do erro, podemos observar pelos exemplos (Figuras 41 até 44) que a maioria dos erros cometidos sugerem falta de atenção e não de compreensão.

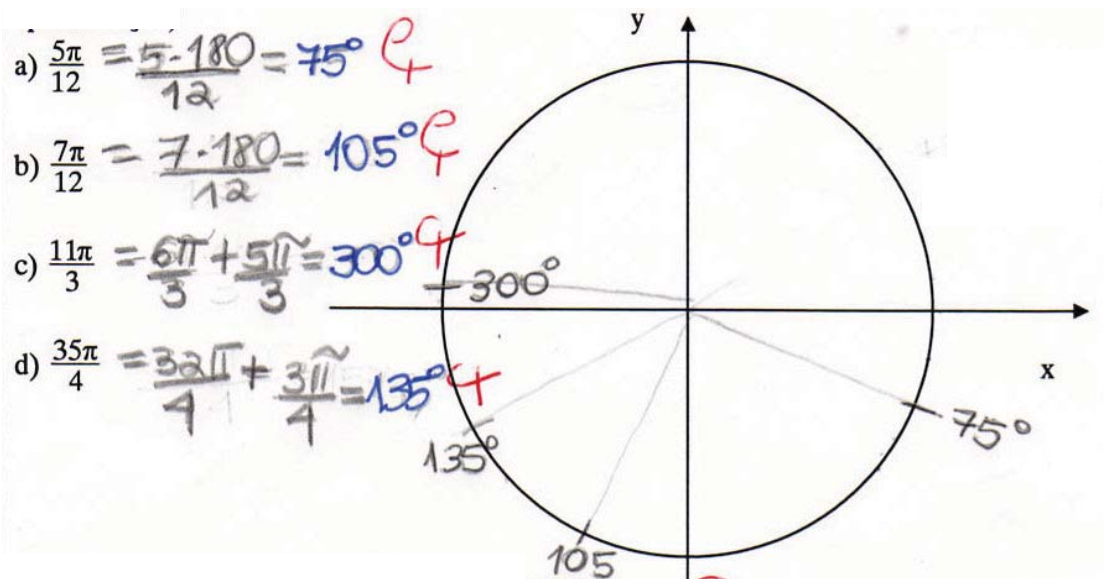


Figura 41: O aluno localizou os ângulos em posições erradas por ter medido no sentido horário.

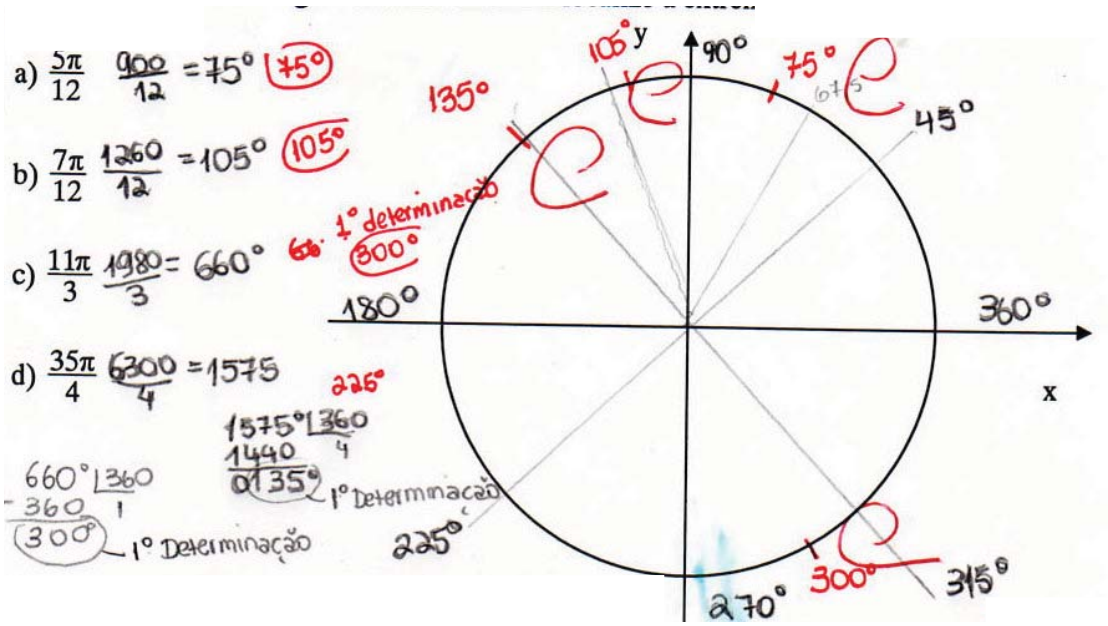


Figura 42: Provavelmente falta de atenção do aluno na localização do ângulo de 75°.

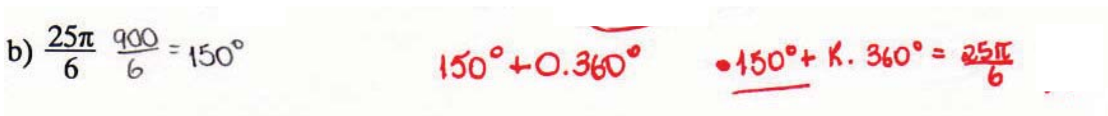


Figura 43: O aluno cometeu um erro de cálculo.

Figura 44: O aluno cometeu um erro de cálculo.

Da mesma forma que na primeira avaliação, a devolução da segunda foi acompanhada de uma discussão.

Depois da avaliação sobre localização dos ângulos no CT e os arcos côngruos, seguiu-se para a S*ituação 5,* cujo principal objetivo era a *tarefa de redução ao primeiro quadrante, utilizando o CT* construído na *Situação 4*.

Essa situação foi elaborada para ser realizada no quadro e não teve tarefas individuais, sendo coordenada pela pesquisadora, como se relata a seguir.

O manuseio e a visualização dos valores do seno, cosseno e tangente para ângulos do primeiro quadrante, no CT, já deveriam ser os subsunçores para a maioria dos alunos e agora pretendia-se provocar a visualização desses valores para ângulos localizados em outros quadrantes. Entra em cena a idéia de função trigonométrica, pois se verifica que, para cada ângulo há um valor diferente de seno, cosseno e tangente, em cada quadrante.

Desafiou-se que visualizassem o seno e o cosseno de ângulos tais como, 120°, 135° e 150°, todos situados, por enquanto, no segundo quadrante. Deixou-se a tangente para depois.

Apesar de ser uma aula com um caráter mais expositivo, os diálogos entre pesquisadora e alunos foram mantidos.

Quando questionados a respeito do que estavam observando, eles afirmaram que se o ângulo fosse maior do que 90° poderíamos enxergar os valores do seno, do cosseno e da tangente nos eixos correspondentes, y, x e eixo das tangentes, mas que, em alguns desses valores, a questão do sinal deveria ser analisada. Demonstraram, pelas suas palavras, de que como se tem um sistema de eixo cartesiano associado ao CT, os lados assumem medidas algébricas, logo o sinal deve ser considerado.

Então, no quadro, solicitou-se que completassem os seguintes valores, sempre consultando o CT:

sen 30° =	sen 45° =	sen 60°=
sen 150° =	sen 135° =	sen 120° =
sen 210°=	sen 225° =	sen 240°=
sen 330° =	sen 315°=	sen 300°=

Consultados sobre a repetição dos resultados, os alunos foram unânimes em dizer que os valores eram iguais, mas tinham sinais diferentes, o que era visível. Continuei questionando, a respeito do motivo de isso ter acontecido, se eles tinham alguma idéia.

Como estavam trabalhando com o material concreto, o CT, alguns visualizaram que o triângulo retângulo, elemento principal de toda a nossa análise estava invertido, como que fosse sua imagem num espelho e agora, no segundo quadrante faltava trinta graus para chegar ao valor de cento e oitenta graus. Algo parecido acontecia no terceiro quadrante, só que agora tinha trinta graus a mais do que cento e oitenta graus e no quarto quadrante faltavam trinta graus para trezentos e sessenta graus, no que diz respeito a ângulo de 150°, 210°, 330°, respectivamente. A Figura 45 foi desenhada no quadro e ilustra o fato.

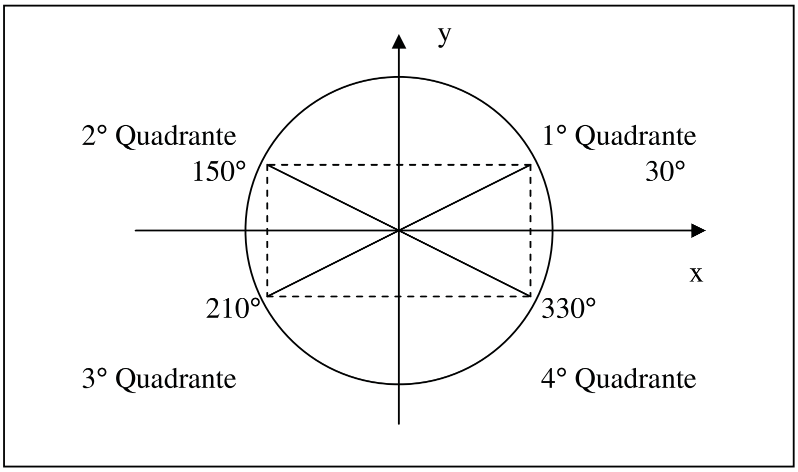


Figura 45: O CT com a visualização dos triângulos retângulos “invertidos” para o ângulo de 30°, mostrando, em cada quadrante o ângulo correspondente.

Ou seja, eles perceberam, (talvez não todos, pois essa atividade foi realizada em conjunto, sem uma anotação individual), que os triângulos eram iguais em cada quadrante, mas tinham a posição invertida, isso causava valores iguais para a função seno, mas como havia um sistema cartesiano associado ao CT, os sinais deviam ser considerados dependendo do quadrante em que o ângulo se encontrava.

Foram feitas em conjunto as seguintes operações:

cos 30° =	cos 45° =	cos 60°=
cos 150° =	cos 135° =	cos 120° =
cos 210°=	cos 225° =	cos 240°=
cos 330° =	cos 315°=	cos 300°=

Os alunos, quando chamados a tentar explicitar oralmente o que estavam percebendo, faziam as mesmas observações que antes, só que agora deixando claro que devemos visualizar o cosseno no eixo x, por isso o sinal não sofre as mesmas alterações de antes.

Antes de ir para a função tangente, escreveu-se em conjunto, uma regra que pudesse nos orientar toda vez que o ângulo estivesse noutro quadrante que não o primeiro e a regra ficou assim estabelecida:

➢ Se o ângulo está no segundo quadrante:

• verificamos o sinal da função naquele quadrante;

• procuramos ver quantos graus faltam para completar cento e oitenta graus e daí sabemos de qual ângulo no primeiro quadrante ele tem o mesmo valor. Surgiu a expressão "*primo segundo de*". Exemplo: 150° é primo segundo de 30°.

➢ Se o ângulo está no terceiro quadrante:

• verificamos o sinal da função naquele quadrante;

• procuramos ver quantos graus passaram dos cento e oitenta graus e daí sabemos de qual ângulo no primeiro quadrante ele tem o mesmo valor. Surgiu a expressão "*primo terceiro de*". Exemplo: 210° é primo terceiro de 30°.

➢ Se o ângulo está no quarto quadrante:

• verificamos o sinal da função naquele quadrante;

• procuramos ver quantos graus faltam para completar trezentos e sessenta graus e daí sabemos de qual ângulo no primeiro quadrante ele tem o mesmo valor. Surgiu a expressão "*primo quarto de*". Exemplo: 330° é primo quarto de 30°.

Em seguida, analisou-se o que acontecia com a função tangente e os alunos verificaram que a função tangente sofria as mesmas regras para ser reduzida à valores do primeiro quadrante que as funções seno e cosseno, mas que havia um eixo, denominado eixo das tangentes para que os valores fossem visualizados. Percebeu-se que os valores, para outros quadrantes, da função tangente foram mais difíceis de serem visualizados por parte de alguns alunos, mesmo utilizando o material concreto, necessitavam do auxílio da pesquisadora, principalmente os ângulos de 90° e 270°.

Fez-se um resumo dos sinais das funções trigonométricas, em cada quadrante, para auxiliar sempre que necessário.

Para encerrar essa situação e utilizarmos as conclusões obtidas passamos a realizar alguns exercícios do livro-texto envolvendo os valores das funções seno, cosseno e tangente, num primeiro momento sem o envolvimento em expressões matemáticas. Realizamos, também, exercícios de vestibular sobre o assunto.

Combinou-se uma avaliação individual, como forma de refletir e diagnosticar as melhorias necessárias.

3.2.7 Análise dos dados obtidos a partir da terceira avaliação

Os resultados da terceira avaliação (APÊNDICE J) foram amplamente satisfatórios.

Na primeira questão, que envolvia o cálculo de valores das funções seno, cosseno e tangente para ângulos específicos, três alunos apenas, cometeram erros, dois na questão 1i e um na questão 1r, conforme mostram as Figuras 46 e 47. Os erros da questão demonstram que os estudantes parecem ter ficado confusos, quando tiveram que determinar o valor do cosseno de zero grau. Não se considera esse erro como um erro de conceito, pois o valor da função cosseno foi envolvido em demais itens da questão 1 e eles acertaram. Subentende-se que se o conceito de função cosseno estivesse confuso teria aparecido erro em outros itens da questão 1. Já o erro cometido pelo aluno na questão 1r parece ter sido de falta de atenção ou de transformação.

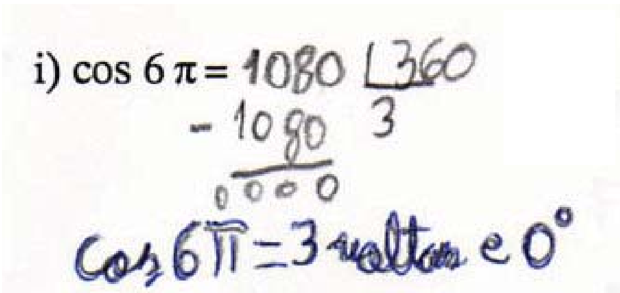


Figura 46: O aluno provavelmente confundiu o valor 0° com o valor zero da função.

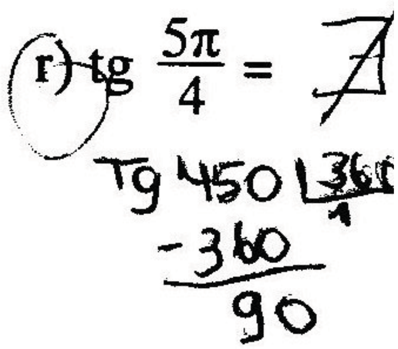


Figura 47: O aluno errou por falta de atenção.

Na segunda questão, que envolvia o cálculo dos valores das funções seno, cosseno e tangente em expressões matemáticas, observou-se que sete alunos apenas, erraram: 2 alunos, a questão 2e; 1 aluno, a questão 2h; 1 aluno, a questão 2i e 3 alunos a questão 2m. As Figuras 48 a 51 ilustram os erros evidenciados e pode-se observar que os erros são de sinal, de valores ou de operações com resultados incorretos.

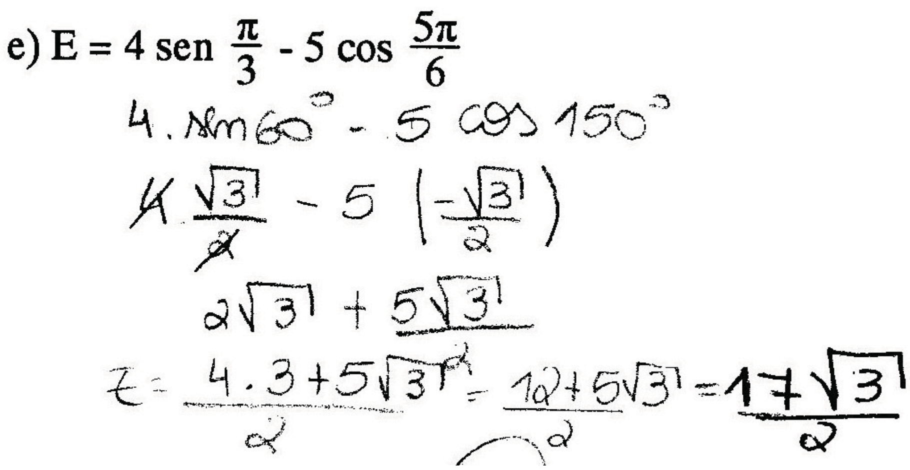


Figura 48: O aluno cometeu um erro de cálculo.

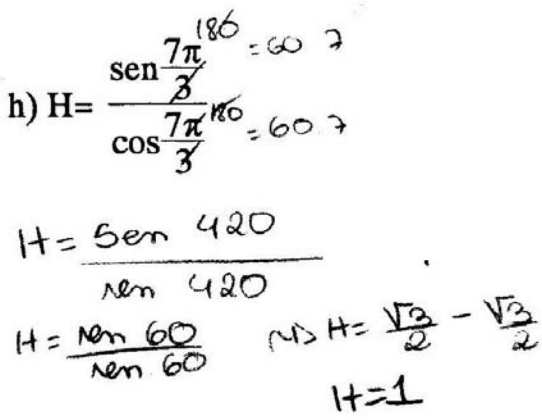


Figura 49: Exemplo do erro cometido por um aluno na questão 2h da terceira avaliação.

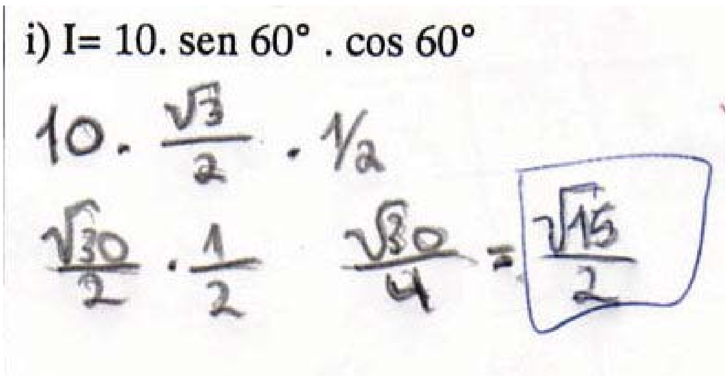


Figura 50: Exemplo do erro cometido por um aluno na questão 2i da terceira avaliação.

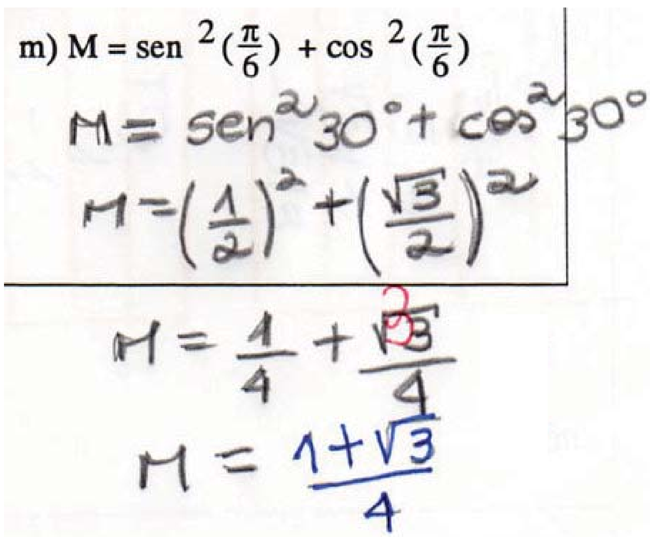


Figura 51: Exemplo do erro cometido por um aluno na questão 2m da terceira avaliação.

Essa avaliação também foi entregue aos alunos e eles tiveram um tempo para analisar o que tinha ocorrido. Segundo Cury:

> Com base nas sugestões para o uso dos erros, destaco a idéia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas (Cury, 2007, p. 80)

Depois da terceira avaliação passou-se para a realização de uma aula prática sobre construção de gráficos. Chamou-se essa situação de *Situação 6* e foi usado o próprio material, construído nos grupos, que ficou exposto na sala de aula durante o tempo restante em que o conteúdo estava sendo trabalhado. O objetivo dessa situação era a *visualização dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente* nos eixos coordenados. Essa situação subdividiu-se em três momentos.

Num primeiro momento, os alunos tinham como desafio construir uma tabela, no seu caderno, onde os valores de x variariam de quinze em quinze graus e a partir desses valores eles determinariam o seno de cada ângulo, por aproximação, visualizando no CT ou com o uso da calculadora científica. Depois, fariam o mesmo procedimento para a função cosseno e por último para a função tangente. O motivo de subdividir o eixo x de quinze em quinze graus era o fato de conseguir uma aproximação melhor, eliminando a possibilidade de enxergar uma reta, mas sim visualizar as curvas. Ressalte-se que combinamos que no eixo x deveriam anotar os valores em radianos, realizando as equivalências já aprendidas. Em seguida, utilizando o papel milimetrado fizeram a representação gráfica das curvas. Alguns chegaram a citar a semelhança da senóide e da cossenóide com o resultado gráfico do exame médico denominado eletrocardiograma. A representação da curva tangentóide não foi muito tranqüila para todos, pois o seu delineamento é bem diferente das demais, mas conseguiram realizar a tarefa, com a mediação da pesquisadora.

No segundo momento, agora já reunidos em grupos de quatro alunos tinham a tarefa de realizar a transposição dos gráficos visualizados para o papel pardo, em tamanho 50 cm x 100 cm. Para isso, foi solicitado que trouxessem tesoura, cola e fios de lã ou linha, régua e calculadora científica, sendo que o papel pardo foi fornecido pela professora. As figuras 52 a 56 ilustram algumas das tarefas realizadas individualmente e nos grupos.

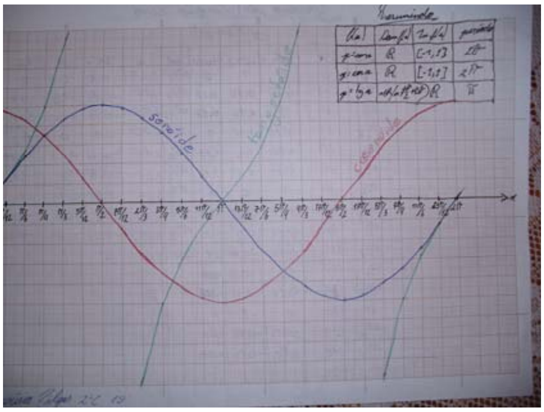


Figura 52: Foto da senóide, cossenóide e tangentóide feita por um aluno.

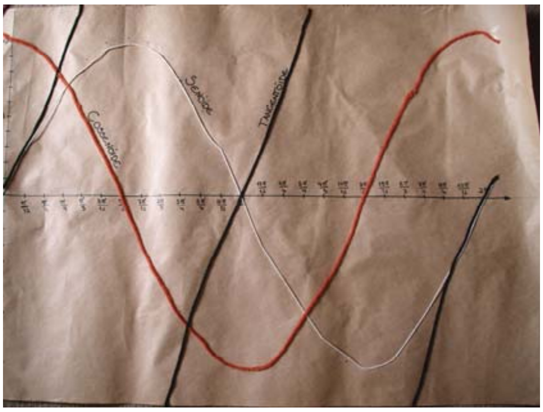


Figura 53: Foto da senóide, cossenóide e tangentóide feita no grupo.

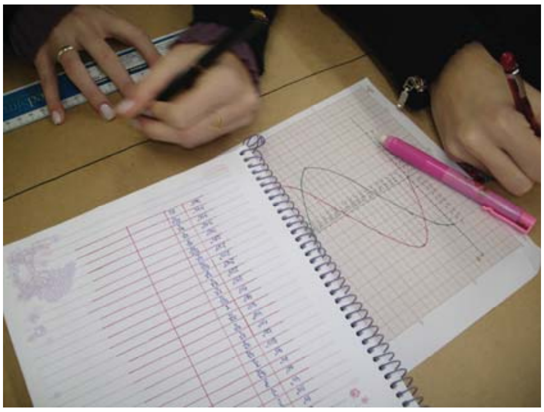


Figura 54: Foto da senóide, cossenóide e tangentóide sendo transposto para o papel pardo. Confecção do eixo OX.

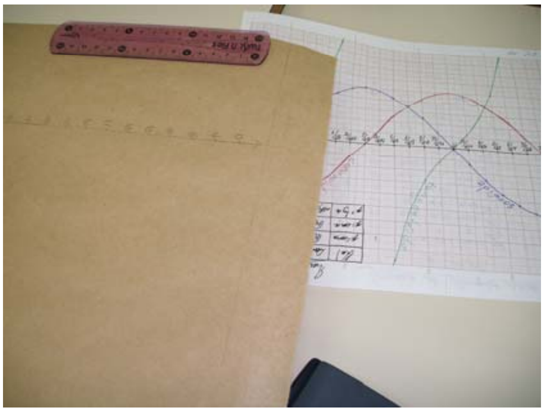


Figura 55: Foto da senóide, cossenóide e tangentóide sendo transposto para o papel pardo. Confecção do eixo OY

Figura 56: Foto da senóide, cossenóide e tangentóide sendo transposta para o papel pardo.

Quando os grupos terminaram a representação gráfica, relembramos as definições de domínio, imagem e período, e definimos o que acontecia em cada curva. Afixamos o material na sala de aula, em local visível, contendo todas essas informações.

No terceiro momento, pela necessidade de discriminar-se um pouco mais a análise gráfica, reavaliaram-se, em conjunto, os gráficos realizados nos grupos. Convém lembrar o fato de que os alunos já tinham, a partir de agora, um esquema gráfico da curva em questão, como ancoradouro. Deveria ficar mais fácil a sua discriminação. Segundo Ausubel et al. (1980):

> Uma variável, obviamente importante, que afeta a aprendizagem e a retenção de material novo, logicamente significativo é a disponibilidade na estrutura cognitiva de idéias de esteio especificamente relevantes num

> nível de inclusividade apropriado a oferecer uma possibilidade de relacionamento e esteio ótimos. (AUSUBEL et al., 1980, p. 141)

Propôs-se, no quadro, que ampliássemos os valores de x para além de uma volta e viu-se que as curvas da senóide e cossenóide e tangentóide, repetiam valores, sendo assim denominadas, de curvas periódicas. O significado da palavra período foi questionado. Alguns alunos responderam exemplificando o período como o tempo de execução de alguma tarefa ou trabalho. Por exemplo, o período da aula era de cinqüenta minutos, o período de algumas revistas variava entre quinze até trinta dias, e assim, houve uma associação da palavra período com fatos do cotidiano. Fez-se a associação com as curvas e vimos que o valores marcados no eixo x, que eram necessários, para que as curvas aparecessem por completo, eram de 2π rad para a senóide e cossenóide e de π rad para a tangentóide.

A questão da imagem também necessitava sofrer maiores discriminações, apesar de já ter sido analisada.

Devido ao fato de que a construção das representações gráficas dispendiam muito tempo quando feitas à mão e que o trabalho no computador é um elemento motivador, fomos trabalhar a próxima situação, chamada de Situação 7, no ambiente *Moodle.* O objetivo dessa situação era visualizar, graficamente, as mudanças causadas na imagem da senóide e da cossenóide, sendo que se relata apenas a situação realizada com a senóide. Utilizou-se o software *Graphmática* de distribuição livre na internet (APÊNDICE L).

Devido ao número limitado de computadores, os alunos trabalharam em duplas e exploraram o ambiente *Moodle*, realizando a entrega da tarefa *on-line* no próprio ambiente. Nem todos conheciam o ambiente, mas conseguiram trabalhar sob a orientação da pesquisadora.

Segue-se a categorização das respostas às tarefas propostas (APÊNDICE M).

3.2.8 Análise dos dados obtidos a partir da situação no Ensino a Distância (EAD)

Pode-se observar, pelas categorias evidenciadas (Quadros 30 a 34), das funções solicitadas que a maioria das duplas de alunos conseguiu concluir que o período e o domínio ficaram iguais e que a imagem sofria alterações, sendo que alguns grupos chegaram a citar a causa dessa alteração. Afirmaram que quando há algum número junto com a função senóide, realizando operações matemáticas, ela sofre alterações.

Convém esclarecer que a entrega das tarefas foi *on-line*, e alguns grupos tiveram dificuldades técnicas, sendo assim, foram entregues 8 relatórios.

2) Observe os gráficos e discuta com o seu colega se há semelhanças/diferenças entre eles. Em caso afirmativo, quais são essas semelhanças/diferenças ?	
Semelhanças	Número de relatórios (N=8)
I - O domínio e o período	7 (75%)
I I–Não respondeu	1(25%)

Quadro 30. Categorias de respostas versus relatórios entregues relativas à tarefa 2 da situação 7.

2) Observe os gráficos e discuta com o seu colega se há semelhanças/diferenças entre eles. Em caso afirmativo, quais são essas semelhanças/diferenças ?	
Diferenças	Número de relatórios (N=8)
I – A imagem	7 (87,5%)
I I–Identificou que é o número que precede ou antecede o seno quem causa a diferença	1(12,5%)

Quadro 31. Categorias de respostas versus número de relatórios entregues relativas à tarefa 2 da situação 7.

3) Invente uma nova função, uma nova senóide, escreva-a na tabela acima, procurando testar as semelhanças/diferenças observadas. Escreva a conclusão que o grupo chegou.	
Semelhanças	Número de relatórios (N=8)
I – Concluíram que o domínio e o período não mudam e que quem muda é a imagem	6(75%)
I I- Concluíram que o domínio e o período não mudam e que quem muda é a imagem e ainda citaram que é o número que está junto com a função que causa essa mudança	2(25%)

Quadro 32. Categorias de respostas versus relatórios entregues relativas à tarefa 4 da situação 7.

5) Observe os gráficos e discuta com o seu colega se há alguma semelhança entre eles. Em caso afirmativo, qual é essa semelhança?	
Semelhanças	Número de relatórios (N=8)
I – Concluíram que o domínio e o período ficam iguais	8 (100%)

Quadro 33. Categorias de respostas relativas à tarefa 5 da situação 7.

6) Invente um novo exemplo, procurando testar a semelhança observada , escreva-o abaixo e escreva abaixo a conclusão obtida.	
Semelhanças	Número de grupos de relatórios (N=8)
I - Identificaram que o período e o domínio ficam iguais e a imagem muda	5 (72,5%)
III – Identificaram que o período e o domínio ficam iguais, que a imagem muda e diagnosticam quem muda a imagem	2 (25%)
II - Identificou que o período e o domínio ficam iguais	1 (12,5%)

Quadro 34. Categorias de respostas relativas à tarefa 6 da situação 7.

Com o objetivo de complementar essa parte do conteúdo realizamos exercícios do livro-texto e questões de vestibular que exigiam interpretações gráficas; assim, os alunos tiveram oportunidade de colocar em prática o que tinham aprendido e se necessário, questionar possíveis dúvidas. Observou-se que essa análise gráfica não foi muito fácil para alguns alunos, pois ela abrange a assimilação de muitos aspectos: a idéia de imagem, de domínio, de período, os eixos cartesianos, entre outros.

Na seqüência de conteúdos e respeitando a hierarquia estabelecida pelo mapa conceitual confeccionado para o trabalho em sala de aula, precisávamos ainda das definições das funções secante, cossecante e cotangente e as relações entre elas.

Para atingir esse objetivo elaborou-se uma nova situação (APÊNDICE N), *Situação 8*, cujo objetivo era o de *definir no CT as funções secante, cossecante e cotangente e as relações entre elas.*

A pesquisadora desenhou, no quadro, o CT e sobre ele colocou os três triângulos retângulos descritos na tarefa 1, pertinentes para obter, a partir das suas semelhanças, as definições das funções secante, cossecante e cotangente. Os três triângulos foram confeccionados de material E.V.A. e numa escala maior do que a descrita na tarefa.

Em seguida, procurou-se representar por meio de esquema gráfico, utilizando o próprio CT, desenhado na tarefa 1, a definição das novas funções trigonométricas. Sugeriu-se que usassem cores diferentes para representá-las. Assim o CT, agora, estava completo, já se sabia onde localizar cada uma das seis funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente. Nosso esquema gráfico estava mais especificado e a próxima etapa era o estabelecimento das relações entre essas funções.

No CT, com o esquema gráfico completo e a partir da visualização dos triângulos retângulos, reescrevemos as relações trigonométricas..

Discutiu-se no grande grupo as relações e esclarecemos possíveis dúvidas.

O próximo momento foi verificar como usar as relações trigonométricas. Passou-se a ver a sua aplicabilidade. Vimos que elas apareciam em cálculos, por exemplo, em que a partir de uma função conhecida poderia obter-se as demais, na simplificação de expressões matemáticas e na prova de identidades. Foram realizados exemplos no quadro e depois fizemos exercícios no livro-texto e questões de vestibular sobre o mesmo assunto.

A descrição dessa situação encerra o relato pertinente à essa dissertação por considerar-se que os subsídios fornecidos para a análise da metodologia utilizada já foram suficientes. Enfatiza-se, no entanto, que durante as demais aulas, ainda sobre o assunto de trigonometria, que foram as equações e inequações trigonométricas, continuou-se a metodologia de situações de aprendizagem, por considerar-se que elas estimulavam a participação, a criatividade, o raciocínio hipotético, a argumentação e a interação social, algumas das evidências para ter-se uma aprendizagem significativa.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral desta pesquisa era propor uma metodologia de ensino baseada na TAS de Ausubel e na TCC de Vergnaud, que pudesse contribuir para a construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual da trigonometria. Os objetivos específicos auxiliaram na delimitação das etapas da pesquisa.

A pesquisa envolveu três etapas. A primeira com a elaboração e uso de um instrumento para conhecer as concepções prévias dos alunos sobre elementos de trigonometria.

Partindo do pressuposto que os conhecimentos prévios são chamados de “subsunçores” ou “idéias âncora” e que a sua organização hierárquica, não estática, forma a estrutura cognitiva do aluno, identificou-se os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao conceito mais inclusivo que se considerou pertinente ao conteúdo de trigonometria, o de triângulo retângulo. Essa coleta de dados realizou-se a partir de um questionário e permitiu obter pistas sobre os conhecimentos-em-ação que estavam sendo utilizados pelos alunos, naquele momento. Ressalte-se que alguns conhecimentos prévios surpreenderam pelo aspecto, surpreendente, com que se manifestaram. Vergnaud (1993) e Moreira (2004) salientam que as concepções prévias dos alunos contêm teoremas e conceitos-em-ação, muitas vezes determinantes no progressivo domínio de um campo conceitual, podendo auxiliar ou prejudicar a aprendizagem, e cabe ao professor, por meio de um mapeamento, realizar esse diagnóstico e orientar as situações de aprendizagem.

> A construção do conhecimento pelo aprendiz não é um processo linear, facilmente identificável, Ao contrário, é complexo, tortuoso, demorado, com avanços e retrocessos, continuidades e rupturas. O conhecimento prévio é determinante no progressivo domínio de um campo conceitual, mas pode também, em alguns casos, ser impeditivo (MOREIRA, 2004, p. 21).

Esse levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos orientou a etapa seguinte e forneceu subsídios para organizar e elaborar situações de aprendizagem próprias.

A segunda etapa diz respeito à elaboração e aplicação das situações de aprendizagem, estimulando o desenvolvimento cognitivo dos alunos, nesse campo conceitual. Essa foi a etapa mais longa do processo de pesquisa e iniciou com alguns esclarecimentos preliminares, que já foram citados no decorrer da dissertação e que se faziam necessários em função do diagnóstico anterior.

Considerando que o conhecimento está organizado em campos conceituais, onde o aluno desenvolve esquemas (conceitos e teoremas-em-ação) para evoluir dentro de um processo de conceitualização, que é o conhecimento, ao se trabalhar com situações de aprendizagem dá-se a oportunidade para que esses esquemas sejam visualizados e progridam para conhecimentos científicos.

Sendo assim, as situações foram programadas e procuraram privilegiar:

- a diferenciação progressiva, com a apresentação de idéias mais inclusivas, seguidas de conceitos mais específicos. Por exemplo, o uso das razões em um triângulo retângulo para chegar no CT;
- a reconciliação integrativa, com a exploração entre conceitos ou proposições já estabelecidas, procurando as semelhanças e as diferenças entre elas. Por exemplo, a partir da semelhança de triângulos, inferir a constância na razão trigonométrica para seno, cosseno e tangente;
- a organização sequencial: cada novo tópico era relacionado com as idéias já discutidas e, presumivelmente, constantes na estrutura cognitiva dos alunos. Foi o caso na introdução dos arcos côngruos: a relação de equivalência entre o grau e o radiano já havia sido aprendida;
- a promoção da consolidação: um novo tópico não deve ser introduzido antes que o anterior não esteja estável e organizado para o aluno. A resolução de exercícios variados envolvendo os assuntos desenvolvidos era uma oportunidade para aplicar e fixar os conceitos estudados;
- o uso e o manuseio de material concreto, como forma de estimular a criatividade e as características perceptivas;
- a elaboração e a explicitação de hipóteses;
- o trabalho em grupo, como forma de incentivar a troca de idéias entre os colegas;
- a organização das aulas;
- a participação do aluno, por meio de questionamentos entre seus pares e o professor-pesquisador e estabelecendo relações com situações do cotidiano;

➢ a possibilidade de obter pistas sobre os conhecimentos-em-ação, que estavam sendo utilizados e redirecionar, o ensino e a aprendizagem, prestando esclarecimentos, sempre que necessário;

➢ momentos desafiadores, que desestabilizassem cognitivamente o aluno, desfiando-o a pensar.

Durante a realização das situações, observou-se um clima de concentração, atenção e envolvimento com as tarefas que estavam sendo realizadas. Os alunos sentiam-se participantes do processo de ensino e aprendizagem. A aula era mais dinâmica, os alunos participavam efetivamente, evitavam-se os procedimentos mecânicos e desconectados da realidade, o que propiciou alguns momentos de prazer e de satisfação em aprender. Estabeleceu-se uma relação de parceira entre a professora-pesquisadora e os alunos. Ainda, a desinibição em realizar questionamentos melhorou a auto-estima e a auto-confiança.

> O professor pode somente apresentar idéias de modo tão significativo quanto possível. A tarefa de organizar novas idéias num quadro de referência pessoal só pode ser realizada pelo aluno. Conclui-se, portanto, que idéias impostas aos alunos ou aceitas de modo passivo e não crítico não poderão ser significativas no verdadeiro sentido da palavra (AUSUBEL, 1980, p. 335).

A terceira etapa diz respeito à avaliação das competências e habilidades alcançadas, a formulação de hipóteses, a resolução de problemas e a utilização dos conhecimentos aprendidos.

Considera-se que as duas últimas etapas caminharam juntas. Se a avaliação tem a função de diagnóstico e o professor está preocupado com a formação do aluno, só tem sentido ser realizada durante o processo e não apenas no final.

E foi assim que aconteceu, houve três momentos formais de avaliação, durante o processo, mas também convém ressaltar que cada situação permitiu ao professor e ao aluno reconsiderar ou ressignificar algum conceito, quer no momento da realização das tarefas pertinentes à situação, quer durante a realização dos exercícios. A avaliação não era considerada como um processo classificatório ou discriminatório, mas sim como um momento de reavaliar o desenvolvimento cognitivo. Os erros poderiam dar indícios sobre o próprio desenvolvimento cognitivo do aluno, por isso mesmo deveriam ser identificados e esclarecidos. Após cada avaliação formal, o aluno deveria olhar o que errou e procurar buscar o motivo do erro, se necessário, com o auxílio do professor. Era estabelecido um tempo, em sala de aula, para que isso acontecesse. Observou-se que alguns dos alunos ficavam surpresos com o seu próprio erro, não entendiam como ele tinha acontecido, consideravam-no falta de atenção ou distração, pois sabiam como deveria ter sido resolvida aquela questão.

Optou-se, na tabulação das respostas das avaliações formais, por verificar-se o motivo do erro cometido. Pode-se observar que os erros nem sempre diziam respeito ao campo conceitual da trigonometria especificamente, mas sim, envolviam outros conceitos, pertinentes às operações matemáticas, representações e interpretações na resolução de problemas, como já foi citado e exemplificado pelas respectivas tabelas e figuras, ao longo dessa dissertação.

Acredita-se que o erro também é uma forma de percepção do aluno sobre a questão e traz consigo ricas informações sobre o modo como os alunos estão pensando, por isso mesmo, deve-se analisá-lo, no intuito de possibilitar o crescimento cognitivo do aluno. Cury (2007) faz-nos pensar na seguinte questão:

> Ao corrigir qualquer prova, teste ou trabalho de Matemática, muitas vezes o professor costuma apontar os erros cometidos pelos alunos, passando pelos acertos como se estes fossem esperados. Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe? Qualquer produção, seja aquela que apenas represente uma resolução-modelo, seja a que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal. Assim, analisar as produções é uma atividade que traz, para professor e para os alunos, a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes (CURY, 2007, p. 13)

Ressalte-se que a particularidade desse trabalho de pesquisa está no fato de que seu desenvolvimento aconteceu num contexto real, com alunos reais e por meio de situações próprias de ensino e aprendizagem. As limitações também foram reais, dentre elas cito uma que gostaria de amenizar, num próximo processo de pesquisa: o fator tempo, pois algumas das situações sugeridas e aplicadas dispendem muito mais tempo para serem desenvolvidas.

Como forma de finalizar, mas não encerrar a reflexão em torno da metodologia utilizada, entende-se que os resultados da pesquisa desencadearam as seguintes asserções de valor e de conhecimento:

➢ é possível afirmar que a identificação dos conhecimentos prévios e dos conhecimentos-em-ação, nas situações propostas, resulta em uma significativa mudança de postura, tanto do professor como do aluno;

➢ verifica-se que essa metodologia favorece a concentração dos alunos, sua participação, seu envolvimento, sua criatividade; a possibilidade de argumentação, o levantamento de hipóteses, a reflexão, a oportunidade de estarem mais preparados para resolver os problemas do cotidiano;

➢é possível, pela metodologia utilizada, contemplar tantos os aspectos conceituais, procedimentais e de atitude, o que só vem a enriquecer o ensino e fazer da aprendizagem, também, um momento de satisfação e prazer;

➢ a avaliação, nessa metodologia, ocorre como um momento de reflexão sobre o processo, considerando aluno e professor responsáveis pelo mesmo, sua função é fortalecer o ensino e a aprendizagem do assunto em questão, redirecionando as situações de aprendizagem, sempre que necessário.

Pelo exposto acima e pelo envolvimento dos alunos e da pesquisadora, pode-se afirmar que uma metodologia baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (TAS) e na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud provoca uma significativa mudança no processo de ensino e aprendizagem. Contribui para uma educação inovadora, mais humana, que desperta, no estudante, o interesse em participar da aula, transforma a sala de aula num rico laboratório, provocando o seu crescimento pessoal e cognitivo, considerando o aluno como um ser ativo, durante todo o processo.

A finalização dessa pesquisa é apenas um ato formal. Seus resultados projetam uma outra forma de trabalho, uma metodologia que se diferencia da metodologia tradicional, mas produz reflexos positivos e de real significado para professor e aluno, no processo de ensino e aprendizagem, e espera-se que ela sirva de inspiração para professores em geral e, em especial da área de Educação Matemática, como fonte de consulta, no caminho do seu aperfeiçoamento profissional.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes (Coord). Investigação em sala de aula e Formulação de Problemas. *In:* CADERNO DE RESUMOS DO XII ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – XII EBRAPEM, UNESP, São Paulo, 2008, p. 101- 106.

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph, D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana Ltda. 1980. 625p.

BRIGHENTI, Maria José Lorenção. **Representações gráficas**. São Paulo:EDUSC, 2003.149p.

CAMARGO, Susan Nectoux. **Ensino com enfoque na pesquisa:** repercussões na aprendizagem de trigonometria. 2004. 122f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) Faculdade de Física, PUCRS, Porto Alegre. 2004.

COSTA, Sayonara Salvador Cabral da. **Resolução de problemas e aprendizagem em Física**. 1999. 189f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, UFRGS, 1999.

COSTA, Nilce M. Lobo da. A história da trigonometria. *In:* **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, Ano 10, n. 13, p. 60- 69, 2003.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 116p.

DANTE, Luiz Roberto. **Contexto e Aplicações.** São Paulo: Ática. 2007. 624p.

KAIBER, Carmen Teresa. CONCEIÇÃO, Cristiano Pereira da. Softwares educativos e o ensino da trigonometria. *In:* **Educação Matemática em Revista – RS,** Canoas, Ano 08, n. 8, p. 37- 49, 2007.

LEITE, José Bezerra. Sugestão de material didático no ensino da trigonometria. *In:* **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, Ano 07, n. 9, p. 47- 48, jan./jul. 1986.

LIMA, Elon Lages. Sobre a evolução de algumas idéias matemáticas. *In:* **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, Ano 4, n. 6, p. 1- 8, jan./jul. 1985.

MELCHIOR, Maria Celina. **Avaliação pedagógica:** função e necessidade. Porto Alegre: Mercado Aberto, 1994.152p.

MORAES, R.; GALIAZZI, M.C. **Análise textual Discursiva.** Ijuí: UNIJUí, 2007. 223p.

MERAZZI, Denise W., OAIGEN, Edson R. Atividades nas ciências do cotidiano: valorizando os conhecimentos prévios na Educação de Jovens e adultos. *In*: RESUMO DO II ENCONTRO NACIONAL DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. Canela. 2008. p.11

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de Aprendizagem**. Porto Alegre: Pedagógica e Universitária, 1999. 195p.

________, Marco Antônio (org.). **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a investigação nesta área**. Porto Alegre: Faculdade de Física, UFRGS, 2004.

________, Marco Antônio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília: Universidade de Brasília, 2006. 186p.

________, Marco Antônio. **Mapas Conceituais e Diagrama V**. Porto Alegre: UFRGS. 2006. 103p.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - MEC, 1998. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf.> Acesso em: 18 dez.2007

SILVEIRA, Fernando Lang. Inclinação das ruas e das estradas. *In:* **Física na Escola**. São Paulo, Vol. 8, n. 2. p16-18, out.2007. Disponível em:< http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v08n2.pdf> Acesso em 17 nov. 2008.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Portugal, 1992. 395p.

VERGNAUD, Gerard. **Teoria dos campos conceituais.** *In:* NASSER, L., 1993, Rio de Janeiro. Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.

WATANABE, Renate. Seno de 30 é um meio?. *In:* **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, Ano 14, n. 30, p. 26-31, jan/abr.1996.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário inicial

1. O que você entende por triângulo retângulo? Existe alguma característica que o diferencia dos demais triângulos?____

____

2. Num triângulo retângulo, como você identifica os catetos e a hipotenusa ?

Catetos:____

Hipotenusa:____

3. Com o auxílio de um transferidor e de uma régua, faça o desenho de dois triângulos retângulos, ambos com hipotenusa medindo 5,0 cm de comprimento: em um deles, um dos ângulos internos deve ser 30º e, o outro, um dos ângulos internos deve ser 45º.

4. Identifique, em cada desenho, do item 3:

- o cateto adjacente (CA) ao ângulo de 30º e o cateto oposto (CO) ao ângulo de 30º;
- o cateto adjacente (CA) ao ângulo de 45º e o cateto oposto ao ângulo de 45º (CO);

5.Utilizando a régua, meça (em cm) cada um dos catetos dos desenhos do item 3 e anote as medidas encontradas na tabela abaixo: (utilize uma casa decimal)

ângulo	**hipotenusa**	**catetos**	
		oposto	**adjacente**
30º	5 cm		
45º	5 cm		

6. Responda: O cateto pode ser maior do que a hipotenusa? (   ) Sim (   ) Não

Justifique:____

____

____

APÊNDICE B – História da Trigonometria

Lendo a respeito da história da trigonometria, vemos que ela surgiu da necessidade de orientação do homem, frente a um universo desconhecido e pronto para ser explorado. Assim como outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação.

Alguns teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes já teriam sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônicos. Aproximadamente em 585 a. C., Tales de Mileto (nascido por volta do ano 640 a. C. e falecido cerca de 550 a. C), próspero negociante, hábil comerciante, grande político diante dos senhores da terra, engenheiro, astrônomo, famoso pela sua cultura filosófica, sendo incluído como um dos sete sábios da antiguidade, além de ter previsto o eclipse do sol, ocorrido a 28 de maio de 585 a. C., também calculou a altura da pirâmide real, o que fez com que o rei Amasis ficasse profundamente surpreendido com a aplicação prática de uma ciência abstrata. (KARLSON, 1961).

Pitágoras de Samus (nascido por volta do ano 580 a.C. e falecido cerca de 500 a. C.) era um profeta e místico, nascido em Samus, uma das ilhas do Dodecaneso, não muito longe de Mileto, lugar do nascimento de Tales, é citado também como um matemático daquela época. Fundou uma sociedade secreta com bases filosóficas e matemáticas e foram os pitagóricos, assim chamados os freqüentadores da sociedade, que demonstraram o teorema de Pitágoras (o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos). (BOYER, 1974).

Entre os gregos, encontramos, pela primeira vez, um estudo sistemático de relações entre ângulos (arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subtendem. Essas relações eram conhecidas desde o tempo de Hipócrates (460 a . C. – 377 a. C.) e é provável que Eudoxo (390 a. C. – 338 a. C.) tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra e a distância entre o sol e a lua. Na obra de Euclides (360 a. C – 295 a. C.) - Os elementos - não há nenhuma citação à trigonometria, no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. (ibid.,1974)

Notadamente, cada vez mais os astrônomos da Idade Alexandrina – Eratóstenes de Cirene (por volta de 276 – 194 a.C.) e Aristarco de Samus (por volta de 310 – 230 a. C.) envolviam-se com problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas. Aristarco (310 - 230 a.C), segundo Arquimedes (287 – 212 a.C.) propôs um sistema heliocêntrico, antecipando-se a Copérnico, porém o escrito se perdeu. No lugar disso temos dele um tratado (cerca de 260 a.C.) “Sobre os tamanhos e distâncias do sol e da lua em um Universo geocêntrico”. (Ibid., 1974).

Outro cálculo que completaria o anterior deveu-se a Eratóstenes de Cirene, contemporâneo mais jovem de Arquimedes e Aristarco, o qual calculou a medida do comprimento da Terra. Eratóstenes colocou um bastão na posição vertical, na cidade de Alexandria, mediu o comprimento de sua sombra (Figura 1) com isso calculou o ângulo formado entre o bastão e os raios solares, encontrando sete graus. Observando que os raios solares são paralelos, utilizou essa medida angular também na cidade de Siena (Figura 2) e, como sabia a distância entre Alexandria e Siena, através de uma regra de três, calculou o comprimento da Terra (Figura 3). (PERERO, 1914).

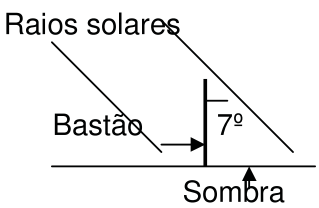


Figura 1

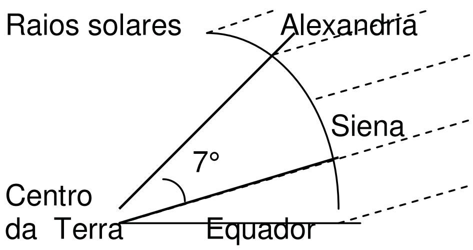


Figura 2

Cálculo de Eratóstenes
794 km - 7°
X - 360°

$$X = \frac{794 \times 360}{7}$$

X= 40 834 km
(aproximadamente)

Figura 3

No período aproximado de dois séculos e meio, de Hipócrates a Erastótenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e suas aplicações à astronomia. A partir daí, acredita-se que durante a segunda metade do segundo século a. C. foi compilada o que se supõe como a primeira tabela trigonométrica, tarefa realizada por Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.), que assim passou a ser chamado o “pai da trigonometria”. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. (EVES, 2004)

Não se sabe bem quando se passou a utilizar o círculo com 360º, mas parece que Hiparco, novamente, através de sua tabela de cordas, influenciou essa decisão. É possível que ele a tenha tomado de Hipsicles (180 a. C), que anteriormente teria dividido o dia em 360 partes, inspirado pela astronomia babilônica, em que o zodíaco fora dividido em doze “signos” ou 36 “decanatos”. Um ciclo de estações, de aproximadamente 360 dias, podia ser facilmente posto em correspondência com o sistema de signos zodiacais e decanatos, subdividindo cada signo em trinta partes e cada decanato em dez partes. Nosso sistema de medida de ângulos pode derivar dessa correspondência. Além disso, como o sistema proposicional dos babilônios para frações era superior ao sistema unitário utilizado pelos egípcios e às frações comuns gregas, era natural que Ptolomeu subdividisse seus graus em sessenta partes minutae primae, cada uma das quais era dividida em sessenta partes minutae secundae, e assim por diante. É dessas frases que provêem nossas palavras minutos e segundos e o nosso sistema sexagesimal ao trabalharmos com a trigonometria. Como Hiparco fez sua tabela não se sabe, pois suas obras se perderam, é provável que seus métodos fossem semelhantes aos de Ptolomeu. (BOYER, 1974)

Da vida de Ptolomeu sabemos pouco, sequer quando nasceu, mas que fez observações em Alexandria por volta de 127-151 a.C. e por isso supomos que nasceu pelo fim do primeiro século. O Almajesto, de Ptolomeu, sobreviveu aos estragos do tempo e lá ele cita as tabelas trigonométricas e também métodos utilizados para a sua construção. (EVES, 2004)

Deve-se lembrar que desde Hiparco até os tempos modernos não se usavam termos como razões trigonométricas, mas linhas trigonométricas. Depois do predomínio dos gregos, os hindus e os árabes utilizaram o termo linhas trigonométricas, que eram, a princípio, cordas num círculo e que Ptolomeu já havia associado a valores numéricos (ou aproximações). (BOYER, 1974).

A partir de Alexandre, o grande, houve muita comunicação entre a Grécia e a Mesopotâmia e parece claro que a aritmética e a geometria algébrica babilônica continuavam a exercer influência no mundo helenístico. Nota-se isso através dos trabalhos de Heron de Alexandria (por volta do ano 100 a. C.), conhecido pela fórmula que leva o seu nome e que calcula a área de um triângulo, através do seu semiperímetro. Heron nos mostrou que nem toda a matemática da Grécia era do tipo “clássico”. Havia dois níveis: uma era eminentemente racional, chamada geometria, e a outra era prática, chamada geodésia. (Ibid).

A matemática grega estendeu-se, aproximadamente, desde 600 a. C. até 600 d. C. e contribuiu, significativamente, para a evolução da trigonometria, que durante o primeiro milênio de sua existência, era quase que exclusivamente um adjunto da astronomia e da geografia. Somente no século XVII foram descobertas aplicações da trigonometria na refração e outras partes da Física e ela evoluiu com maior propriedade. (ibid)

A História da trigonometria faz-nos pensar no momento atual e a sua aplicabilidade em situações do cotidiano. Há diversos ramos da sociedade que usam a trigonometria, tais como: a navegação aérea, a navegação marítima, a engenharia, a arquitetura, a astronomia, a física e as ciências da saúde (em muitos diagnósticos, como exemplo, a optimetria).

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl. **História da Matemática**. Trad. De Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974. 488p.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Unicamp, 1995. 843p.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática**. Porto Alegre: Ed. Globo. 1946. 715p.

KARLSON, Paul. **A magia dos números**. Porto Alegre: Ed. Globo,1961. 605p.

PERERO, Mariano. **História e Histórias de Matemáticas.** México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994. 193p.

APÊNDICE C – Situação organizada com o objetivo de definir as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

1)Meça os ângulos internos do triângulo que você tem e anote as medidas abaixo:
Ângulos: __________ Catetos:________ Hipotenusa:________
__________ ________
____

2. Procure o(s) colega(s) que tenha(m) os mesmos valores para ângulos internos do triângulo retângulo que você tem e forme com ele(s) um grupo.

3. No grupo, discuta e responda as perguntas abaixo:

3.1.Compare os triângulos e escrevam abaixo, quais são as suas diferenças e quais são as suas semelhanças (o que eles têm em comum).
Diferenças:____
Semelhanças:____

3.2. Faça um desenho (não necessariamente no tamanho real), que demonstre as conclusões acima, referentes à comparação entre os triângulos.

4. O grupo deve escolher um dos ângulos agudos (para os três triângulos deve ser o mesmo) e anota-lo abaixo. Em seguida, identificar e anotar as medidas do cateto adjacente ao ângulo (CA) escolhido, do cateto oposto (CO) ao ângulo escolhido e da hipotenusa.

Triângulo pequeno	Triângulo Médio	Triângulo Grande
Ângulo:______	Ângulo:_____	Ângulo:______
Cateto oposto(CO):_____	Cateto oposto(CO):____	Cateto oposto(CO):______
Cateto adjacente(CA):_____	Cateto adjacente(CA):____	Cateto adjacente(CA):____
Hipotenusa:________	Hipotenusa:________	Hipotenusa:______

5. Efetuar, para cada triângulo, as razões sugeridas:

Triângulo pequeno $\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} =$ $\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} =$ $\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} =$

Triângulo médio $\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} =$ $\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} =$ $\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} =$

Triângulo grande $\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} =$ $\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} =$ $\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} =$

6. Observe e discuta com o seu grupo, procurando escrever abaixo a(s) conclusão(ões) a(s) qual(is) vocês chegaram. Conclusão(ões):____________
____

APÊNDICE D – Primeira avaliação, envolvendo as razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente.

Responda as questões abaixo, justificando a tua resposta pelo cálculo rrespondente:

1) Vamos imaginar um projétil que foi lançado formando com o solo um ângulo de 45° e que não há ação da gravidade sobre o mesmo. Depois de percorrer 1 500 m em linha reta, a que altura estava do chão?

2) Um barco parte para fazer a travessia mais curta possível de um rio. No entanto, a correnteza o arrastou para 48 m além do local previsto para a sua chegada. De onde chegou avista-se o ponto de partida sob um ângulo de 60° com a margem em que está. Qual é a largura do rio?

3) Um cabo de aço está amarrado no topo de um poste, Ele se encontra preso ao chão a 6 m do pé do poste, formando um ângulo de 30°. Qual é o comprimento do cabo de aço ? Qual é a altura do poste?

4) Um triângulo eqüilátero tem 12 m de altura. Determine a medida aproximada de seus lados.
(Lembre-se que um triângulo eqüilátero tem lados e ângulos iguais).

5) Uma escada de 6 m de comprimento está encostada em uma parede. A distância entre o pé da escada e parede é de 3m. Determine o ângulo formado entre a escada e a parede.

6) O mestre de uma obra estava descarregando areia de um caminhão. Sabendo que a tábua que ele colocou, apoiada na caçamba do caminhão , tem 4m e que a inclinação da rampa é de 30°, calcule a altura que a caçamba está do solo.

7) Uma antena de 18m de altura é presa ao chão por 4 cabos de aço. O ângulo formado por cada um deles com a ponta da antena mede 45°. Quantos metros de cabo de aço foram usados, aproximadamente, para prender essa antena?

8) Um avião que está a 6 500 m de altura inicia o procedimento de aterrissagem sob um ângulo constante de 10°. Se o aeroporto está no nível do mar, qual a distância entre o avião e o início da aterrissagem?

9) Se para prender um poste de $18\sqrt{3}$ m de altura utilizarmos um cabo de aço (esticado) com 36 m, qual será o ângulo de inclinação do cabo de aço em relação ao solo?

10) Um poste vertical projeta uma sombra de 10 m sobre o solo. Se o poste tem 10 m de altura, determine a inclinação dos raios solares em relação ao solo.

APÊNDICE E – Situação organizada com o objetivo de estabelecer a relação entre o grau e o radiano

1)Você recebeu um círculo. Meça o comprimento da sua circunferência (perímetro) e do seu diâmetro, utilizando o cordão e a régua, cuidando para obter a melhor precisão possível. Registre os valores das medidas nos espaços a seguir.
Comprimento da circunferência: ____________________(em centímetros)
Comprimento do diâmetro: _________________________(em centímetros)

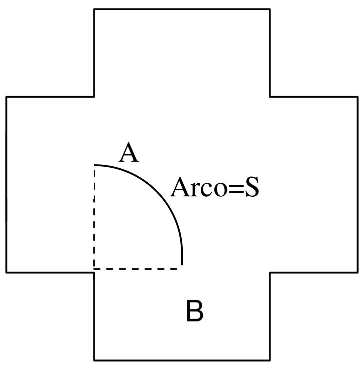
2. Divida o comprimento da circunferência pelo comprimento do diâmetro com pelo menos três casas decimais. Registre o resultado abaixo.

$$\frac{\text{medida da circunferência}}{\text{diâmetro}} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\text{cm}}{\text{cm}} =$$

3. Reúna-se com os colegas que possuem outros círculos de mesma cor que o seu. Então, compartilhem o resultado da divisão anterior.
Descreva o que observaram:____
____

4.O número encontrado é tão famoso na Matemática que até tem um nome. Como se chama? ____

5. Considere que o desenho abaixo representa o cruzamento entre duas ruas e um carro desloca-se de A para B. Relacione o arco com o ângulo percorrido e complete as equivalências:



Equivalências:

$\frac{\pi}{4}$rad = ________°

$\frac{\pi}{2}$rad = ________°

πrad = ________°

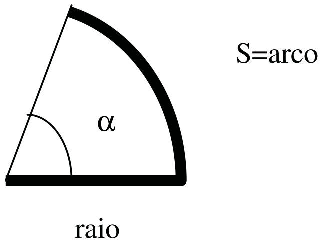
2πrad = ________°

Veja a seguinte regra de três:

comprimento	ângulo
$2\pi R$	360°
S(arco)	α

Temos: $S = \frac{\alpha.2\pi R}{360^\circ}$, como $2\pi = 360^\circ$,fica $S = \alpha.R$, ou $\frac{S}{R} = \alpha$, quando S=R, temos o **Radiano.**

Ou seja, o radiano é o deslocamento sobre a circunferência em um arco de mesma medida que o raio.



1 radiano = um arco de comprimento igual ao raio da circunferência

6. Logo, o deslocamento angular do carro pode ser expresso de duas maneiras, quais são elas?____

7. Veja os seguintes problemas:

7.1. Um carro, ao realizar uma curva, o faz sob um ângulo de 30°, descreve uma curva que subtende um ângulo de 30º. Qual o valor equivalente desse ângulo em radianos?____

7.1.1.Se o raio da circunferência que subtende essa curva for de 6m, qual é o comprimento do arco, ou seja, da distância percorrida pelo carro? _______________
____

7.2. Um carro, ao realizar uma curva, o faz sob um ângulo de 60°, qual é o deslocamento em radiano que ele realiza?________________________________
____

7.2.1.Se o raio da circunferência que subtende essa curva for de 6m, qual é o comprimento do arco realizado, ou seja, a distância percorrida pelo carro?_______
____

____

APÊNDICE F – Situação organizada com o objetivo de definir o raio unitário e as funções trigonométricas no círculo trigonométrico.

1) Observe os círculos abaixo e os triângulos retângulos nelas inscritos. Utilize a régua e meça os lados dos triângulos (com uma casa decimal), completando a tabela abaixo:

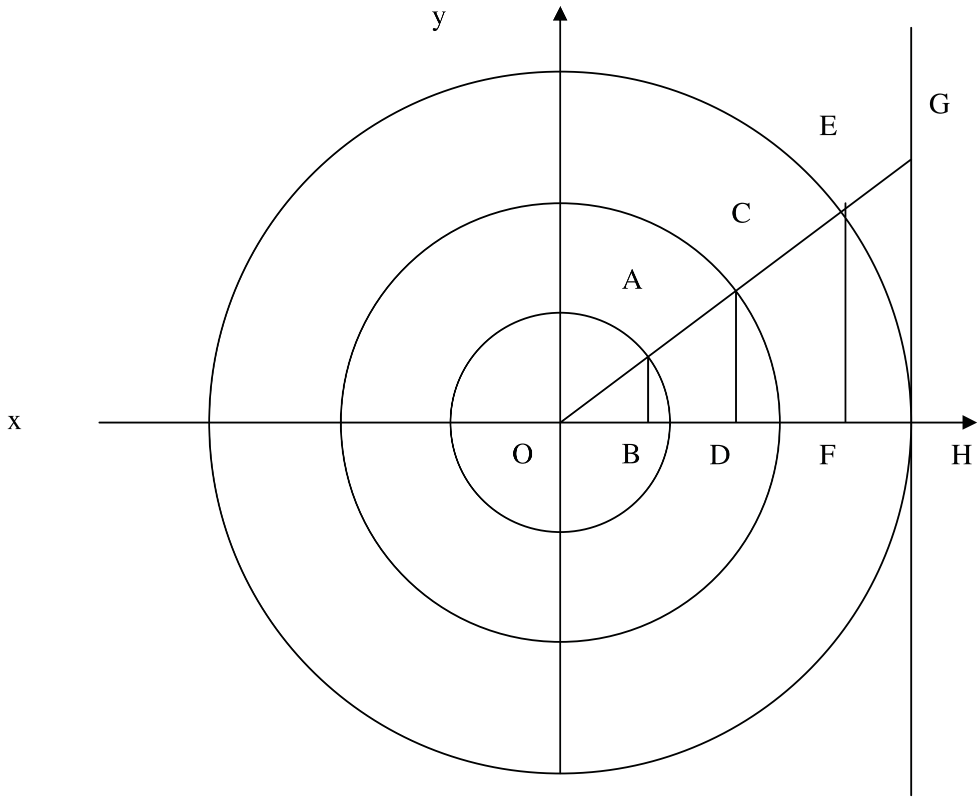


Tabela das razões trigonométricas

Razão trigonométrica	Primeiro triângulo (OAB)	Segundo triângulo (OCD)	Terceiro triângulo (OEF)	Quarto triângulo (OGH)
Seno do ângulo	$\frac{AB}{OA} =$	$\frac{CD}{OC} =$	$\frac{EF}{OE} =$	$\frac{GH}{OG} =$
Cosseno do ângulo	$\frac{OB}{OA} =$	$\frac{OD}{OC} =$	$\frac{OF}{OE} =$	$\frac{OH}{OG} =$
Tangente do ângulo	$\frac{AB}{OB} =$	$\frac{CD}{OD} =$	$\frac{EF}{OF} =$	$\frac{GH}{OH} =$

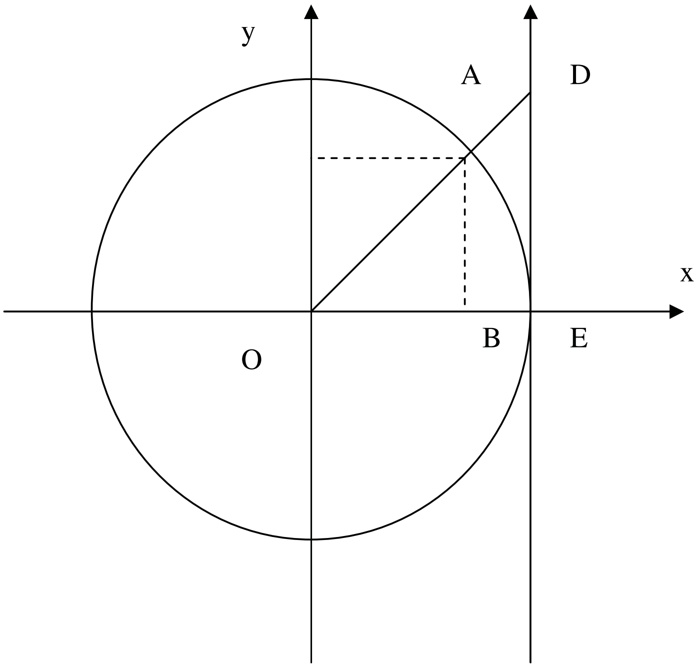
2) Responda:

2.1) Olhando para os valores acima, de que dependem as razões trigonométricas num triângulo retângulo? ____

2.2) O tamanho da hipotenusa, que é o raio do círculo, pode interferir no valor das razões trigonométricas ?____

2.3) Logo, você tem uma sugestão para o raio desse círculo (um valor que seria conveniente) ?____

3)Redesenhando o círculo trigonométrico e definindo as funções seno, cosseno e tangente.



Função trigonométrica	Razões trigonométricas	Definição das funções trigonométricas(escreva, com suas próprias palavras onde você pode visualizar as funções trigonométricas no círculo acima)
Seno do ângulo	$\frac{AB}{OA} =$	
Cosseno do ângulo	$\frac{OB}{OA} =$	
Tangente do ângulo	$\frac{AB}{OB} =$	

4) Construa a sua própria circunferência trigonométrica e procure identificar os valores das seguintes funções trigonométricas: (arredondar para duas casas decimais)

a) sen 30°=

b) sen 45°=

c) sen 60°=

d) cos 30 °=

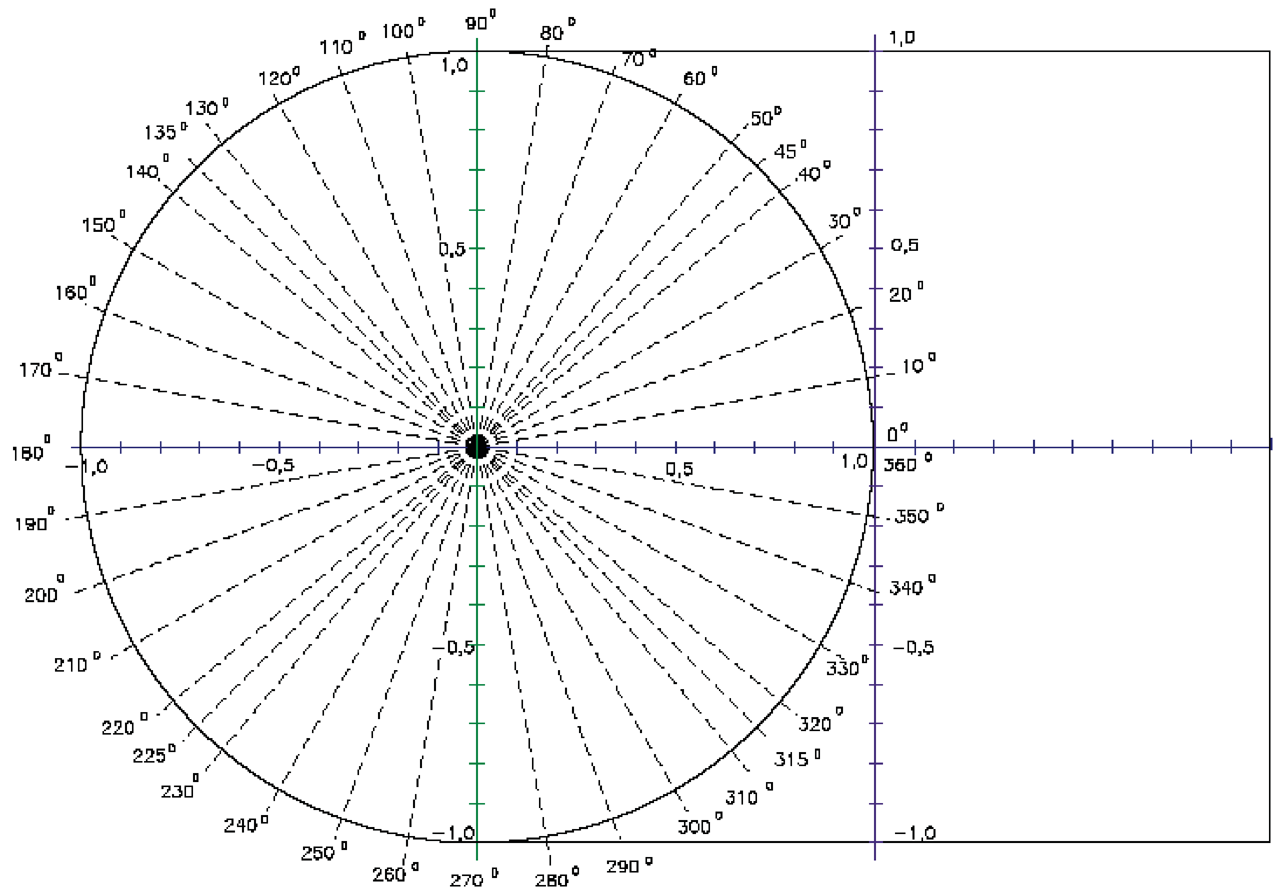
e) cos 45°=

f) cos 60°=

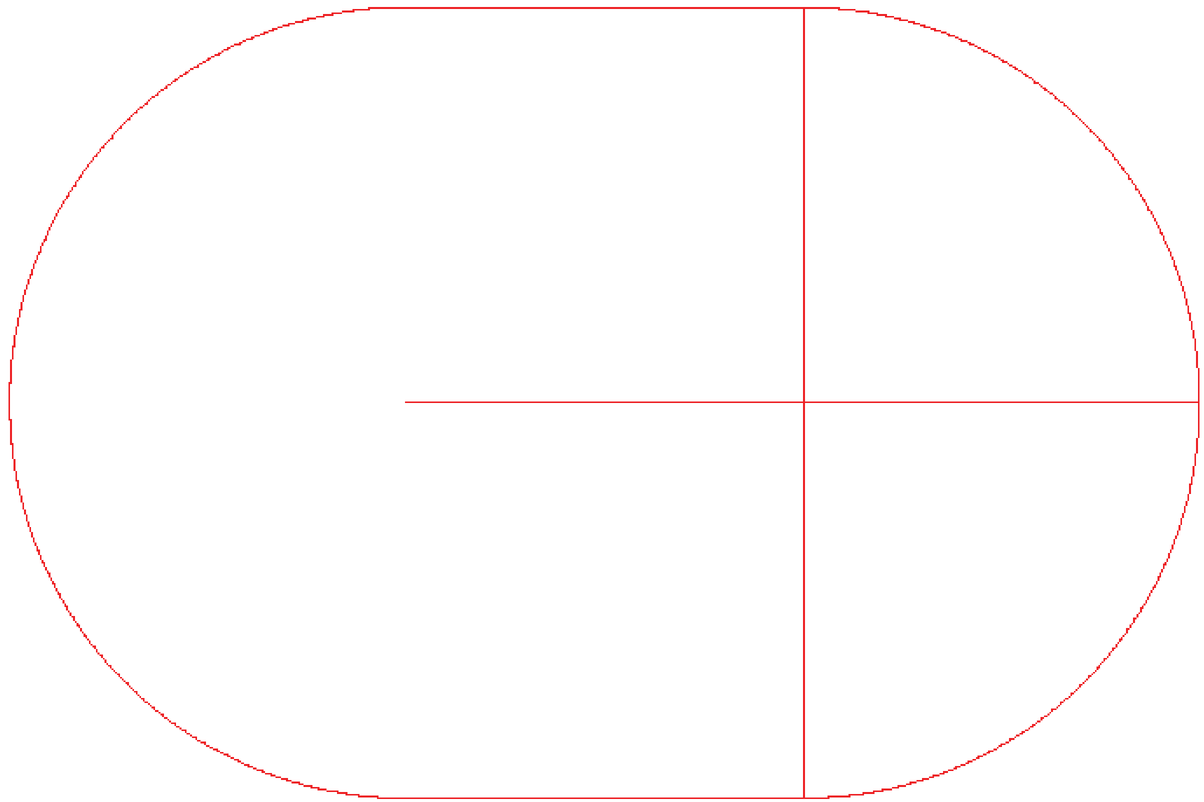
g) tg 30°=

h) tg45°=

APÊNDICE G – Círculo trigonométrico (CT)



APÊNDICE H – Folha molde para ser colocada sobre o círculo trigonométrico



APÊNDICE I – Teste para avaliar a localização dos ângulos no CT

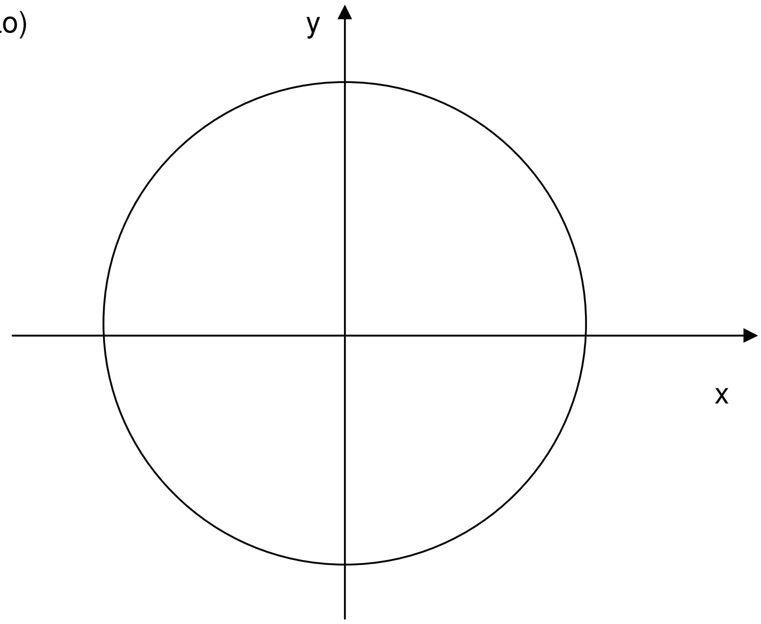
1) Observe o círculo trigonométrico abaixo e localize a extremidade do ângulo de: (marque por aproximação)

a) $\frac{5\pi}{12}$

b) $\frac{7\pi}{12}$

c) $\frac{11\pi}{3}$

d) $\frac{35\pi}{4}$



2) Escreva a expressão geral dos arcos côngruos a:

a) 1 845°

b) $\frac{25\pi}{6}$

3) Qual o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 8h 30 min ?

4) Um pêndulo tem 30 cm de comprimento e, no seu movimento, suas posições extremas formam um ângulo de 60°. Qual é o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve ?

5) Uma curva em numa linha férrea deve ser traçada em círculo. Qual é o raio que deve ser dado ao círculo para que os trilhos mudem 25° de direção numa distância de 60 π m?

6) A roda de uma bicicleta tem raio 42 cm. Qual é a distância que essa bicicleta percorre

APÊNDICE J – Teste para avaliar a localização dos valores das funções seno, cosseno e tangente no CT e o cálculo desses valores em expressões matemáticas

1) Encontre o valor de:

a) sen 1620°=

b) sen 765°=

c) sen (- 900°)=

d) sen (-2130°)=

e) sen 240°=

f) sen 150°=

g) cos (-900°)=

h) cos 450°=

i) cos $6\pi =$

j) cos 150°=

l) cos $\frac{7\pi}{2}$ =

m) cos 240°=

n) tg $\frac{25\pi}{3}$ =

o) tg 1845°=

p) tg 240°=

q) tg 150°=

r) tg $\frac{5\pi}{4}$ =

s) tg 300°=

2) Calcule o valor de cada expressão abaixo:

a) A = $\operatorname{sen}\frac{x}{2} - 3\operatorname{sen}2x + \frac{\operatorname{sen}3x}{4}$, para x= $\frac{\pi}{2}$

b) B = $\cos 3x + \cos\frac{x}{2}$, para x = $\frac{\pi}{2}$

c) C= $\operatorname{sen}3x + \cos 4x - \operatorname{tg} 2x$, para x = $\frac{\pi}{2}$

d) D = cos 510° + tg $\frac{3\pi}{4}$

e) E = 4 sen $\frac{\pi}{3}$ - 5 cos $\frac{5\pi}{6}$

f) F = sen 45° - cos 90°

g) G = 6.cos 60° + 2sen 30°

h) H= $\frac{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}}{\cos\frac{7\pi}{3}}$

i) I= 10. sen 60° . cos 60°

j) J= sen (3. 80°)

l) L = cos (60°+ 30°)

m) M = sen $^{2}(\frac{\pi}{6})$ + cos $^{2}(\frac{\pi}{6})$

APÊNDICE L – Ficha de informações sobre o software Graphmática, de livre distribuição, e utilizado no desenvolvimento da pesquisa.

Título do software: Graphmática

Disciplina(s): Matemática, Física

Conteúdo(s) envolvido(s): Funções, comportando gráficos cartesianos, polares, trigonométricos, diferenciáveis.

Resumo: É um programa que permite plotar equações, funções e derivadas de funções e calcular derivadas, integrais, minimos e máximos, zeros, intervalos

Faixa Etária: Pode ser utilizado desde as séries finais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior, variando as aplicações.

Objetivo: Construir funções gráficas a partir das notações algébricas permitindo a análise gráfica do comportamento da função.

Grau de Dificuldade: Não há grau de dificuldade. Entretanto faz-se necessário conhecer alguns parâmetros da linguagem Basic para proceder à digitação das equações. O próprio programa traz como material de apoio estas funcionalidades.

Idioma: italiano, português, espanhol, francês, coreano,japonês, inglês.

Autores: Keith Hertzer e traduzido para o português por Carlos Malaca em 1996.

Nacionalidade: inglesa

Data de Criação: 1995

Data de Atualização: Última versão 2.0f atualizada em fevereiro de 2008

Registro: kSoft, Inc. ksoft@graphmatica.com

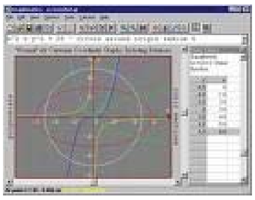
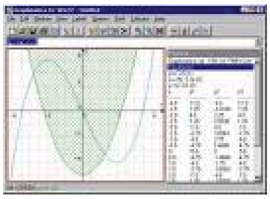
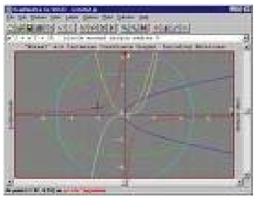
Empresa: kSoft

URL: http://www.graphmatica.com/ (em inglês)

http://graphmatica.apoioamatematica.net/ (em português)

Preço: Shareware (formato que permite usar ou testar o programa antes da eventual compra ou registo)

Designer da tela do software Grapmatica:

Tipo de Micro: Não especificado.

Plataforma: Windows 95/98/ME e NT/2000/XP ou DOS.

Espaço: 700k de memória livre.

Monitor: Não especifica.

Versão:está na 5ª versão a 2.0f a partir de fevereiro de 2008.

APÊNDICE M – Situação organizada com o objetivo de verificar graficamente as alterações da senóide por meio de uma atividade no moodle com o software graphmática.

1) Realize com o auxílio do software graphmática, o gráfico das seguintes funções e complete a tabela abaixo:

Função	Domínio	Imagem	Período
a) $y = \text{sen}x$			
b) $y = 2\text{sen}x$			
c) $y = 3\text{sen}x$			
d) $y = \frac{\text{sen}x}{2}$			
e) $y = \frac{\text{sen}x}{4}$			
f)			

2) Observe os gráficos e discuta com o seu colega se há semelhanças/diferenças entre eles.

Em caso afirmativo, quais são essas semelhanças/diferenças? _______________

____

3) Invente uma nova função, seno, escreva-a na tabela acima, procurando testar as semelhanças/diferenças observadas. Escreva a conclusão a que o grupo chegou.

Conclusão: ____

____

4) Realize com o auxílio do software graphmática, o gráfico das seguintes funções e complete a tabela abaixo:

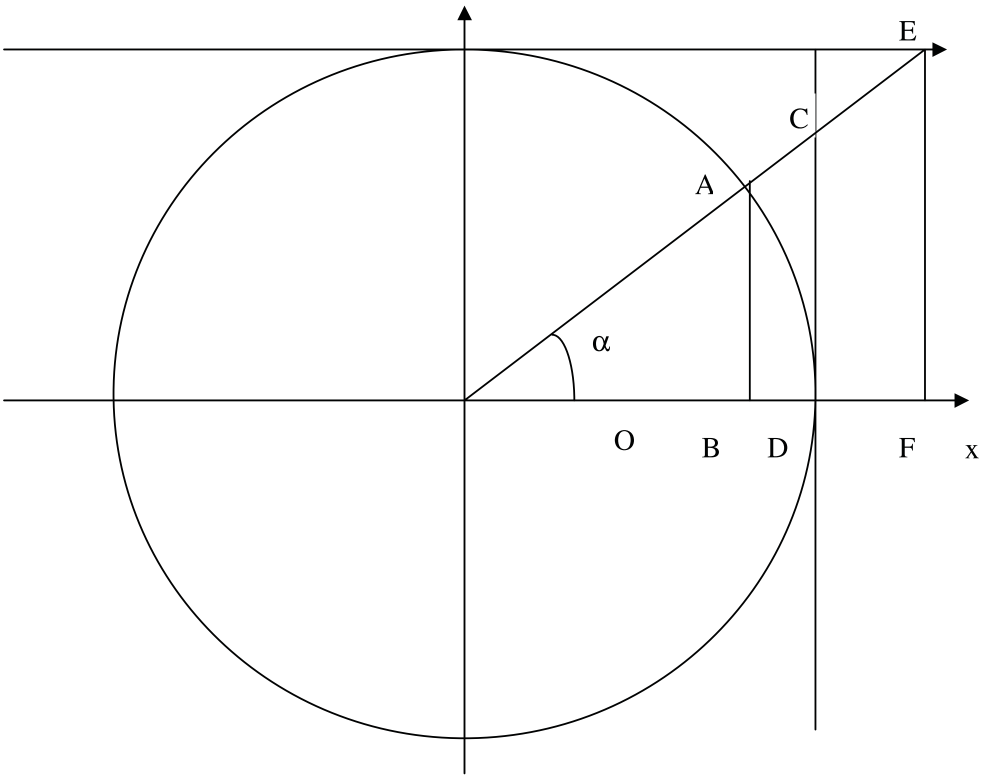
Função	Domínio	Imagem	Período
a) $y = 1 + \text{sen } x$			
b) $y = 2 + \text{sen}x$			
c) $y = 3 + \text{sen}x$			
d) $y = 4 + \text{sen}x$			
e) $y = 1 + 2\text{sen}x$			
f) $y = 1 + 3\text{sen}x$			

5) Observe os gráficos e discuta com o seu colega se há alguma semelhança entre eles.
Em caso afirmativo, qual é essa semelhança? ________________________________
____
____

6) Invente um novo exemplo, de função seno, procurando testar a semelhança observada , escreva-o abaixo e escreva abaixo a conclusão obtida.
Conclusão:____
____

APÊNDICE N – Situação para definir as funções inversas e as relações trigonométricas

1) Posicione os triângulos retângulos OAB, OCD e OEF que você recebeu na circunferência trigonométrica confeccionada em aula, conforme a figura abaixo.



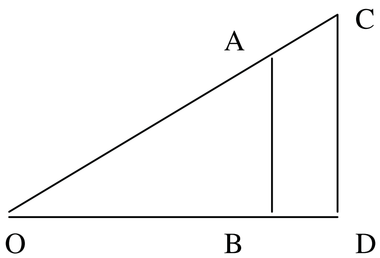
2) Observando os triângulos OAB, OCD e OEF, vemos que eles são triângulos retângulos.

Já sabemos que independente do tamanho do triângulo, os valores do seno, cosseno e tangente para um determinado ângulo permanecem iguais, pois os lados respectivos aumentam e diminuem na mesma proporção e as razões (divisões) permanecem iguais. Você lembra como esses triângulos retângulos eram chamados?_______Como?____

É isso mesmo, **triângulos semelhantes** são aqueles que têm ângulos iguais e lados correspondentes proporcionais.

Para os triângulos semelhantes OAB e OCD, podemos escrever que:

AO = 1 , OD = 1 , OB = cos α , AB = sen α e $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$



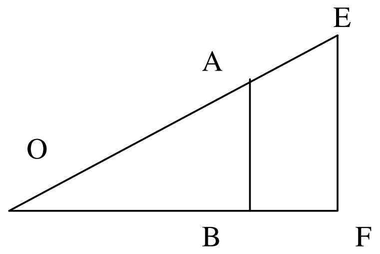
$$\frac{1}{OC} = \frac{OB}{1}$$

$$\frac{1}{OC} = \cos\alpha$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = OC = \text{secante } \alpha = \sec \alpha$$

Para os triângulos OAB e OFE, que também são semelhantes, podemos escrever que:

AO=1, EF =1, OB = cos α, AB = sen α e $\underbrace{\frac{OA}{OE}} = \frac{AB}{EF} = \frac{OB}{OF}$



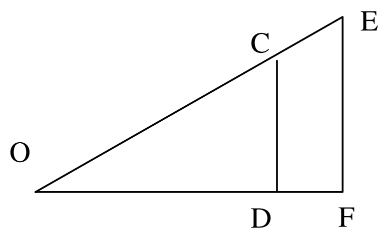
$$\frac{1}{OE} = \frac{AB}{1}$$

$$\frac{1}{OE} = \text{sen}\ \alpha$$

$$\frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = OE = \text{cossecante}\ \alpha = \csc\alpha$$

Para os triângulos OCD e OEF, que também são semelhantes, podemos escrever que:

OD =1, EF = 1, CD = tan α e $\frac{OC}{OE} = \frac{CD}{EF} = \frac{OD}{OF}$



$$\frac{CD}{1} = \frac{1}{OF}$$

$$\frac{\tan\ \alpha}{1} = \frac{1}{OF}$$

$$OF = \frac{1}{\tan\ \alpha} = \text{cotangente}\ \alpha = \text{cotg}\ \alpha$$

Além disso, para cada triângulo pode ser aplicada a relação de Pitágoras (hipotenusa ao quadrado igual à soma dos quadrados dos catetos).

No triângulo OAB fica: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

No triângulo OCD fica: $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

No triângulo OEF fica: $1 + \text{cotg}^2\alpha = \csc^2\alpha$

Resumindo as relações trigonométricas são:

1. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$
3. $1 + \text{cotg}^2\alpha = \csc^2\alpha$
4. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
5. $\csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$
6. $\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
7. $\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$

Z72e Zimmer Klein, Marjúnia Édita

O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais / Marjúnia Édita Zimmer Klein ; orientadora Sayonara Salvador Cabral da Costa. – Porto Alegre, 2009.

120f. : il.

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Faculdade de Física. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

1. Trigonometria – Aprendizagem. 2. Matemática – Ensino Médio. I. Costa, Sayonara Salvador da. II. Título.

CDU 514.116:371.3

Catalogação: Angela Saadi Machado CRB 10/1857