

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA  
MESTRADO EM ECONOMIA DO DESENVOLVIMENTO

ALESSANDRO DONADIO MIEBACH

**O CICLO DE CRESCIMENTO DE GOODWIN: UM MODELO DE  
DINÂMICA ECONÔMICA NÃO LINEAR**

Porto Alegre

2011

ALESSANDRO DONADIO MIEBACH

**O CICLO DE CRESCIMENTO DE GOODWIN: UM MODELO DE  
DINÂMICA ECONÔMICA NÃO LINEAR**

Dissertação apresentada como requisito para a  
obtenção do grau de mestre pelo Programa de  
Pós-Graduação em Economia da Pontifícia  
Universidade Católica do Rio Grande do Sul

Orientador: Prof. Dr. Adalmir Antonio Marquetti

Porto Alegre

2011

## Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M631c Miebach, Alessandro Donadio

O ciclo de crescimento de Goodwin: um modelo de dinâmica econômica não linear / Alessandro Donadio Miebach. – Porto Alegre, 2011.

87 f.: gráf. tab.

Dissertação (Mestrado em Economia. Área de concentração: Economia do Desenvolvimento) – Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia, PUCRS.

Orientador: Dr. Adalmir Antonio Marquetti.

1. Economia. 2. Desenvolvimento Econômico. 3. Ciclos de Negócios. 4. Modelo de Goodwin. 5. Instabilidade Estrutural I. Marquetti, Adalmir Antonio. II. Título.

CDD 330.4

Bibliotecária Responsável: Elisete Sales de Souza, CRB 10/1441

## **Alessandro Donadio Miebach**

### **“O CICLO DE CRESCIMENTO DE GOODWIN: UM MODELO DE DINÂMICA ECONÔMICA NÃO LINEAR”**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia, pelo Mestrado em Economia do Desenvolvimento da Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

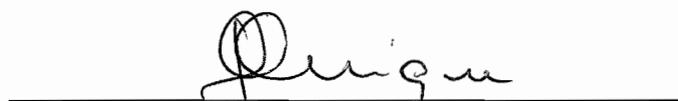
Aprovada em 31 de março de 2011, pela Banca Examinadora.

#### **BANCA EXAMINADORA:**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Adalmir Antonio Marquetti  
Presidente da Sessão

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Gustavo Inácio de Moraes

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Eduardo Augusto Maldonado Filho

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Luiz Eduardo Ourique

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Adriane Vieira pelo carinho, apoio e compreensão durante o mestrado.

Aos meus pais, João Juergen Clemente Miebach e Maria Angela Donadio Miebach, e minhas irmãs, Bárbara Donadio Miebach e Carla Donadio Miebach, pelo estímulo e por estarem sempre prontos a ajudar.

Ao Banco do Brasil S.A. pela concessão de bolsa de aperfeiçoamento, que viabilizou a realização deste mestrado.

Aos colegas de trabalho Marino e Spanholi pelo apoio no início do percurso. Aos colegas Crippa e Valdinei por viabilizarem o tempo para a realização deste trabalho. Ao colega Luiz Gustavo, pela generosidade em um momento importante. Ao colega José Renan pela amizade. A todos os colegas de trabalho pelo convívio fraternal.

Ao amigo Márcio Severo Martins pelo estímulo e pelo brilhantismo de suas sugestões.

Aos amigos Eduardo, Bins, Guto, Jorge e Telmo, pela permanente amizade e disponibilidade.

Ao meu orientador e professor, Adalmir Antonio Marquetti, pela generosidade, estímulo, convívio e amizade ao longo de todo este processo.

Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Economia (PPGE), pelos ensinamentos ao longo do curso.

Aos familiares e amigos que convivem comigo.

Muito Obrigado.

## RESUMO

Este estudo analisa o ciclo de crescimento de Goodwin (ou modelo de Goodwin) em sua formulação original, através da apresentação de suas propriedades e características. O modelo de Goodwin é semelhante ao modelo presa-predador de Lotka-Volterra, concebido originalmente para o estudo da dinâmica de duas populações: uma de presas e a outra de predadores. As propriedades matemáticas do modelo Lotka-Volterra encontram-se presentes no modelo de Goodwin. Este é um sistema dinâmico que é oscilatório, conservativo e apresenta instabilidade estrutural. Goodwin parte de algumas premissas simplificadoras que permitem a elaboração de um modelo de relação presa-predador para a interação dinâmica entre a taxa de ocupação da força de trabalho e a participação dos trabalhadores no produto. O modelo assim obtido apresenta como principal característica a capacidade de gerar ciclos. O modelo de Goodwin apresenta influência marxista na medida em que formaliza a idéia da ocorrência de ciclos para o caso da composição orgânica do capital constante. O principal debate teórico provocado pelo modelo de Goodwin é a questão da instabilidade estrutural. Do ponto de vista empírico, os estudos sobre o modelo indicam que este possui significação qualitativa. Entretanto, do ponto de vista quantitativo o modelo não é capaz de fornecer estimativas precisas para os valores assumidos pelas variáveis de interesse.

**Palavras-Chave:** ciclos, modelo de Goodwin, conflito distributivo, sistemas dinâmicos, instabilidade estrutural.

## **ABSTRACT**

This study presents the Goodwin's growth cycle (or Goodwin model) in its original formulation, through the presentation of its features and properties. The Goodwin model is similar to the Lotka-Volterra predator-prey model, originally conceived to study the dynamic of two populations: one of preys and another of predators. The mathematical properties of Lotka-Volterra model are present in the Goodwin model. It is an oscillatory, conservative with structural instability dynamical system. Goodwin started from some simplified premises that allow the building of a predator and prey relationship model for the dynamical interaction of the employment rate and the worker's share of product. The model obtained presents as major feature the capacity of generate cycles. The Goodwin model has a Marxist influence, the cycles occur to the case of constant organic composition of capital. The main theoretical debate caused by the Goodwin model is the issue of structural instability. From an empirical point of view, the studies about the model indicate that it posses qualitative significance. From a quantitative perspective the model is not able to provide precise estimates for the values assumed by the interest variables.

**Keywords: cycles, Goodwin model, distributive conflict, dynamic systems, structural instability.**

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>6</b>
<b>2 O MODELO DE GOODWIN: ESTRUTURA E BASES TEÓRICAS .....</b>	<b>8</b>
<b>2.1 O MODELO DE GOODWIN: ESTRUTURA.....</b>	<b>8</b>
2.1.1 RICHARD GOODWIN .....	8
2.1.2 O SISTEMA DE EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA .....	9
2.1.2.1 O MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA-VOLTERRA.....	10
2.1.2.2 AS EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA .....	11
2.1.2.3 ESTABILIDADE ESTRUTURAL.....	18
2.1.3 A ESTRUTURA DO MODELO DE GOODWIN.....	22
<b>2.2 O MODELO DE GOODWIN: BASES TEÓRICAS. ....</b>	<b>39</b>
<b>3. O MODELO DE GOODWIN – ANÁLISES E CONSIDERAÇÕES .....</b>	<b>46</b>
<b>3.1 A INSTABILIDADE ESTRUTURAL E O MODELO DE GOODWIN.....</b>	<b>47</b>
3.1.1 ESTABILIDADE ESTRUTURAL – QUESTÕES METODOLÓGICAS .....	47
3.1.2 A INSTABILIDADE ESTRUTURAL NO MODELO DE GOODWIN .....	51
<b>3.2 O TRATAMENTO EMPÍRICO DO MODELO DE GOODWIN. ....</b>	<b>56</b>
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS:.....</b>	<b>80</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>83</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Um dos temas centrais da literatura econômica é a alternância entre períodos de expansão e de retração da atividade econômica, sendo esta entendida como o nível de produção e de emprego de uma dada formação socioeconômica. O tema dos ciclos econômicos apresenta-se como um objeto relevante de estudo, pois auxilia na compreensão dos motivos que levam às alternâncias econômicas. Nos momentos de mudança de trajetória do desempenho econômico, como, por exemplo, a partir do grande pânico de 1873, após a crise de 1929, durante o período dos choques do petróleo, na década de 70 do século XX, e, atualmente, após a retração das economias centrais, em 2008, observa-se um crescente interesse na compreensão dos ciclos econômicos.

O estudo dos ciclos pode auxiliar na descrição e na análise do processo de crescimento, especialmente no longo prazo, no qual se fazem sentir mudanças de caráter estrutural nas economias, tanto sob a ótica do espaço nacional como do espaço internacional. O ciclo de crescimento de Goodwin (ou Modelo de Goodwin) é um sistema matemático dinâmico e não-linear que permite o estudo de ciclos gerados por variações nos níveis de emprego e de distribuição de renda de uma economia. Ele possibilita um novo foco de interpretação, ao analisar simultaneamente ciclos e crescimento econômico, tendo sido objeto de vários estudos. Entretanto observa-se que tais estudos abordam essa proposta de análise de maneira parcial, enfatizando pontos específicos do modelo. Existem poucos trabalhos na literatura internacional que traçam um panorama geral dos estudos produzidos a partir do modelo e apresentam uma síntese de sua aplicabilidade. Na literatura nacional, apenas um trabalho foi encontrado, porém não discutindo a aplicabilidade ou a repercussão de estudos sobre o modelo foi encontrado, demonstrando uma carência nessa área do conhecimento.

Esta dissertação possui como objetivo desenvolver uma revisão da literatura sobre a aplicabilidade do Modelo de Goodwin na economia.

Os objetivos específicos do trabalho são (a) traçar um panorama geral sobre o Modelo de Goodwin, discutindo suas origens, sua estrutura matemática e sua construção teórica, e (b) discutir a repercussão desse modelo em estudos teóricos e empíricos na economia.

O texto está estruturado em dois capítulos. O primeiro apresenta os aspectos conceituais e a estrutura matemática formal do Modelo de Goodwin, estando organizado em duas seções.

A primeira seção trata da construção teórica, efetuando a discussão formal do modelo e de sua estrutura matemática. Ela inicia com uma apresentação da trajetória intelectual de seu autor, Richard Murphey Goodwin. A seguir, discute-se da estrutura do modelo a partir de seu fundamento teórico, que é o sistema de equações de Lotka-Volterra. O sistema Lotka-Volterra é analisado dos pontos de vista biológico e matemático, incluindo-se uma apresentação dos conceitos de sistemas dinâmicos e de estabilidade estrutural. Na sequência, aborda-se especificamente o Modelo de Goodwin. Inicia-se por seu desenvolvimento matemático, que, como será demonstrado, é semelhante ao sistema Lotka-Volterra, e, a seguir, discute-se seu desenvolvimento conceitual, buscando compreender como o modelo descreve o fenômeno conjugado de ciclo e crescimento econômico.

A segunda seção aborda as vinculações teóricas que o modelo apresenta em relação ao marxismo. Inicialmente apontam-se os elementos da teoria marxista presentes no modelo. Após são apresentadas as análises que a literatura efetua a respeito dessa temática. Ao final da seção, as discussões anteriores são consideradas criticamente.

No segundo capítulo, o Modelo de Goodwin é analisado sob duas perspectivas. A primeira abrange sua análise efetuada teoricamente pela literatura econômica. Avaliam-se os estudos que abordam o modelo em sua formulação original, excluindo-se, assim, os trabalhos que propõem modificações em sua estrutura. As principais questões que a literatura levanta sobre o tema são discutidas dos pontos de vista teórico e metodológico. A análise está centrada nas implicações teóricas que a questão da instabilidade estrutural coloca ao modelo, nas propostas de correção dessa característica e nos debates que essa questão levanta.

A segunda perspectiva discute algumas tentativas de aplicação empírica do modelo. O objetivo é descrever os resultados obtidos e seu impacto sobre as interpretações do mesmo. As discussões são direcionadas ao Modelo de Goodwin sem modificações em sua estrutura formal, utilizando-se modelos modificados para fins de contraste com o original. Especial ênfase é dada à comparação entre o que prescreve o modelo e o que a evidência empírica informa.

Nas considerações finais, recuperam-se as principais discussões efetuadas no trabalho. O Modelo de Goodwin é reconsiderado, e possíveis aplicações para ele são indicadas envolvendo aspectos pedagógicos, teóricos e empíricos.

## **2 O MODELO DE GOODWIN: ESTRUTURA E BASES TEÓRICAS**

### **2.1 O MODELO DE GOODWIN: ESTRUTURA**

O ciclo de crescimento de Goodwin, também conhecido como Modelo Presa-Predador de Goodwin, ou ainda, Modelo de Goodwin, é uma proposta que busca, em um único modelo matemático, compatibilizar o tratamento do crescimento e do ciclo econômico. Para tanto, utiliza o sistema de equações de Lotka-Volterra, um sistema dinâmico não-linear. Sua publicação original data de 1967, em uma coletânea de ensaios em honra a Maurice Dobb, tratando-se de um artigo de cinco páginas

Esta seção apresenta a estrutura conceitual e matemática do modelo. Ela está dividida em três partes: a primeira constitui-se em uma apresentação da trajetória biográfica de Richard Murphey Goodwin; a segunda trata do sistema de equações de Lotka-Volterra; e a terceira aborda o ciclo de crescimento de Goodwin.

#### **2.1.1 RICHARD GOODWIN**

Richard Murphey Goodwin (1913-1996) foi um economista norte-americano, cujo interesse principal se direcionou aos problemas associados à dinâmica da economia capitalista. Goodwin foi pioneiro no uso de ferramentas matemáticas avançadas na modelagem de dinâmicas econômicas desde o início dos anos 50 (Flaschel; Landesmann, 2006). Seu trabalho baseia-se na premissa de que o capitalismo somente pode ser propriamente compreendido como um sistema não-linear, que quase sempre se encontra em um estado não estacionário, e bifurca entre um estado estável e outro não estável. Nessa perspectiva, o equilíbrio é o único lugar onde o sistema nunca se encontra (Desai; Omerod, 1998).

Richard Goodwin graduou-se em Ciência Política, em 1934, em Harvard, com uma dissertação intitulada Uma Crítica ao Marxismo, e ganhou uma bolsa de estudos para Oxford, na Grã-Bretanha. Em 1938, retornou para Harvard e recebeu seu título de doutorado em

1941, com a tese intitulada *A Oferta de Dinheiro na Inglaterra e no País de Gales*, 1919 até 1939. Permaneceu em Harvard como professor assistente até 1949, quando foi rejeitado para uma posição permanente no corpo de professores<sup>1</sup>. Em 1950, transferiu-se para Cambridge, na Grã-Bretanha, onde permaneceu como professor até 1979, quando se aposentou. Em 1980, foi para a Universidade de Siena, onde permaneceu até sua segunda aposentadoria, em 1988, aos 75 anos. Continuou ativo como orientador de alunos de pós-graduação até o fim de sua vida (Matteo; Sordi, 2009).

Desai e Omerod (1998) afirmam que o artigo de Goodwin de 1967, no qual apresenta seu modelo de ciclo de crescimento, é indubitavelmente seu maior trabalho, considerando-o uma inovação decisiva na análise da dinâmica do capitalismo.

### **2.1.2 O SISTEMA DE EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA**

A presente seção aborda o fundamento matemático elementar no qual se baseia o ciclo de crescimento de Goodwin: o sistema de equações de Lotka-Volterra. Esse sistema é conhecido como Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra, devido à sua aplicação no campo da ecologia. A análise do sistema de equações será efetuada em duas etapas: na primeira, apresenta-se o modelo sob sua perspectiva biológica; na segunda trata-se o sistema de um ponto de vista matemático.

---

<sup>1</sup> A recusa por parte de Harvard e a consequente transferência para a Grã-Bretanha tem três possíveis razões. A primeira é de natureza política, pois Goodwin era um ativista de esquerda (sendo membro do Partido Comunista Britânico até 1939) e pode ser considerado, em certa medida, uma vítima do macartismo (Desai; Omerod 1998). A segunda prende-se a uma questão de natureza acadêmica vinculada ao sistema de contratação de professores vigente em Harvard no período, apesar de Goodwin contar com o apoio de Schumpeter, Harbeler e Leontief para sua indicação. A terceira refere-se às suas poucas publicações no período (Matteo; Sordi 2009).

### 2.1.2.1 O MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA-VOLTERRA

O sistema de equações de Lotka-Volterra é um modelo matemático para interações tróficas<sup>2</sup> de duas espécies que mantêm uma relação de dependência entre si do tipo presa e predador. Essa abordagem foi concebida na década de 20 do século XX, concomitantemente, pelos dois autores que a intitulam: o químico norte-americano Lotka e o matemático italiano Volterra<sup>3</sup> (Gandolfo, 1997; Kot, 2001).

O sistema Lotka-Volterra é uma derivação da aplicação da lei de ação das massas. Dessa forma, seus autores argumentam que a relação entre duas populações, uma considerada de recursos (presas) e a outra de consumidores (predadores), pode ser tratada de maneira análoga à interação entre dois fluídos que compõem homogeneamente uma solução em equilíbrio dinâmico. Esse postulado da química permite a determinação da taxa de reação química e da constante de equilíbrio químico (Berryman, 1998).

No Modelo Lotka-Volterra, assume-se que a taxa de encontro entre consumidores e recursos é proporcional ao produto de suas massas populacionais (Berryman, 1998). A dinâmica desta interação é dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_1 y_1 - b_1 y_2 y_1 \quad (1)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = b_2 y_1 y_2 - a_2 y_2 \quad (2)$$

onde  $y_1$  e  $y_2$  representam as duas populações, presas e predadores, e suas derivadas em relação ao tempo representam as variações dessas populações (Kot, 2001; Berryman 1998).

Analisa-se, agora, os termos do sistema. O termo  $a_1 y_1$  da equação (1) representa a taxa de crescimento da população de recursos na ausência de predadores ( $y_2 = 0$ ), já que, nessa situação, tem-se  $b_1 y_2 y_1 = 0$ . Desse modo a equação (1) converte-se em  $\frac{dy_1}{dt} = a_1 y_1$ ,

<sup>2</sup> Por interações tróficas entendem-se as relações alimentares estabelecidas entre duas espécies, sendo que uma (presa) é o alimento da outra (predador).

<sup>3</sup> No caso de Volterra, especificamente, o modelo foi concebido para explicar as variações populacionais de espécies de peixes no Mar Adriático, encontradas em análises estatísticas elaboradas por Umberto D'ancona para o período de 1910 até 1923. D'ancona era noivo da filha de Volterra. A partir desse contato, Volterra elaborou as equações que objetivavam explicar o comportamento apurado por D'ancona (Kot, 2001).

o que implica um crescimento exponencial da população de presas obtido pela integração de  $\frac{dy_1}{dt} = a_1 y_1$ , que gera  $y_t = y_0 e^{a_1 t}$  (Kot, 2001).

Por sua vez, o termo  $b_1 y_2 y_1$  da equação (1) representa a taxa de perda (ou decaimento) da população de presas devido à ação dos predadores (Berryman, 1998). Essa perda é proporcional às populações de presas e predadores. Assim, esse termo é geralmente descrito como “termo de ação das massas” (Kot, 2001).

Analisando-se os termos da equação (2), observa-se que  $b_2 y_1 y_2$  indica a taxa de crescimento da população de predadores associada ao consumo (ou perda) de presas. Esse crescimento é proporcional às populações de presas e predadores, sendo também descrito como “termo de ação das massas” (Kot, 2001).

Por fim, ainda em relação à equação (2), constata-se que o termo  $a_2 y_2$  indica a taxa de decrescimento da população de predadores na ausência de presas ( $y_1 = 0$ ). Nesse caso, tem-se que  $b_2 y_1 y_2 = 0$ . Dessa forma, a equação (2) converte-se em  $\frac{dy_2}{dt} = -a_2 y_2$ , o que implica um decrescimento exponencial (ou ainda decaimento exponencial) da população de predadores obtido pela integração de  $\frac{dy_2}{dt} = -a_2 y_2$ , que gera  $y_t = y_0 e^{-a_2 t}$  (Kot, 2001; Berryman, 1998).

### 2.1.2.2 AS EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA

As propriedades do sistema de equações de Lotka-Volterra podem ser obtidas através de tratamento matemático. Esse tratamento permite o estudo do comportamento dinâmico do sistema. Utiliza-se, para esse objetivo, a análise efetuada por Gandolfo (1997)<sup>4</sup>. Considerem-se as equações abaixo:

$$\frac{dy_1}{dt} = (a_1 - b_1 y_2) y_1 \quad (3)$$

---

<sup>4</sup> Uma dedução alternativa pode ser vista em Kot (2001). Entretanto optou-se pela abordagem de Gandolfo (1997) por sua maior generalidade e rigor matemático.

$$\frac{dy_2}{dt} = -(a_2 - b_2 y_1) y_2 \quad (4)$$

Gandolfo (1997, p.449, tradução nossa) aponta que:

Este sistema apresenta infinitas órbitas fechadas, assim dada qualquer posição inicial (exceto a origem), o movimento é sempre periódico ao longo da órbita em que ocorrem os pontos iniciais. O sistema pode ser completamente analisado no sentido de que é possível calcular-se a forma analítica das curvas integrais, apesar de uma solução estrita para  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  não poder ser obtida. Ainda assim, uma completa caracterização das propriedades da solução pode ser determinada.

As curvas do sistema de equações são determinadas através do tratamento algébrico que se passa a apresentar. A dedução e a discussão seguem a análise de Gandolfo (1997).

Primeiramente, multiplica-se a equação (3) por  $\frac{a_2}{y_1}$ , e a (4) por  $\frac{a_1}{y_2}$ . Somam-se (3) e

(4) para obter-se

$$a_2 \frac{d \ln y_1}{dt} + a_1 \frac{d \ln y_2}{dt} = a_1 b_2 y_1 - a_2 b_1 y_2 \quad (5)$$

Após, efetuam-se novamente as seguintes multiplicações: equação (3) por  $b_2$  e (4) por  $b_1$ , e somam-se (3) e (4).

$$b_2 \frac{dy_1}{dt} + b_1 \frac{dy_2}{dt} = a_1 b_2 y_1 - a_2 b_1 y_2 \quad (6)$$

Como os membros do lado esquerdo de (5) e (6) são iguais, chega-se a:

$$-a_2 \frac{d \ln y_1}{dt} - a_1 \frac{d \ln y_2}{dt} + b_2 \frac{dy_1}{dt} + b_1 \frac{dy_2}{dt} = 0 \quad (7)$$

A equação (7) é diretamente integrável, produzindo:

$$-a_2 \ln y_1 - a_1 \ln y_2 + b_2 y_1 + b_1 y_2 = A \quad (8)$$

onde  $A$  é uma constante arbitrária.

Outro método algébrico de obtenção desse resultado envolve a eliminação do termo  $dt$ , através do quociente entre (1) e (2), e posterior tratamento algébrico. Essa demonstração será omitida, uma vez que conduz ao mesmo resultado apresentado.

Considerando-se agora que  $B \equiv e^A$ , obtém-se

$$y_1^{-a_2} \exp(b_2 y_1) = B y_2^{a_1} \exp(-b_1 y_2) \quad (9)$$

Considerando-se agora

$$X_1 = X_1(y_1) = y_1^{-a_2} \exp(b_2 y_1) \quad (10)$$

$$X_2 = X_2(y_2) = y_2^{a_1} \exp(-b_1 y_2) \quad (11)$$

a curva integral do sistema pode ser calculada através da relação

$$X_1 = B X_2 \quad (12)$$

onde para cada valor da constante arbitrária corresponde uma curva integral.

Por fim, através das relações apresentadas nos Quadros 1 e 2 abaixo, estabelecem-se os comportamentos das funções auxiliares  $X_1$  e  $X_2$ .  $X_1$  é convexa ao longo do eixo  $y_1$ ,

uma vez que  $\frac{d^2 X_1}{dy_1^2}$  é sempre positiva para  $y_1 > 0$ <sup>5</sup>. O comportamento de  $X_2$  é obtido conforme o Quadro 2<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> A demonstração desse resultado encontra-se em Gandolfo (1997, p.452, nota de rodapé 9).

<sup>6</sup> O traçado da função  $X_2$  apresenta ainda dois pontos de inflexão simétricos ao ponto de máximo. Tais pontos não impactam a dedução ora efetuada e serão omitidos por simplicidade. A dedução dos pontos de inflexão encontra-se em Gandolfo (1997, p.453, nota de rodapé 10).

$$\frac{dX_1}{dy_1} = X_1 \left( b_2 - \frac{a_2}{y_1} \right)$$

$$\frac{dX_1}{dy_1} = 0 \forall y_1 = \frac{a_2}{b_2}$$

$$\frac{dX_1}{dy_1} < 0 \forall 0 < y_1 < \frac{a_2}{b_2}$$

$$\frac{dX_1}{dy_1} > 0 \forall y_1 > \frac{a_2}{b_2}$$

Quadro 1: Comportamento da função auxiliar  $X_1$

FONTE: Gandolfo, G. **Economic Dynamics**. Berlin: Springer-Verlag, 1997. p.451-453

$$\frac{dX_2}{dy_2} = X_2 \left( \frac{a_1}{y_2} - b_1 \right)$$

$$\frac{dX_2}{dy_2} = 0 \forall y_2 = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\frac{dX_2}{dy_2} > 0 \forall 0 < y_2 < \frac{a_1}{b_1}$$

$$\frac{dX_2}{dy_2} < 0 \forall y_2 > \frac{a_1}{b_1}$$

Quadro 2: Comportamento da função auxiliar  $X_2$

FONTE: Gandolfo, G. **Economic Dynamics**. Berlin: Springer-Verlag, 1997. p.451-453

Através dos comportamentos apresentados acima, obtêm-se os gráficos das funções auxiliares  $X_1$  e  $X_2$ , como apresentado na Figura 1.

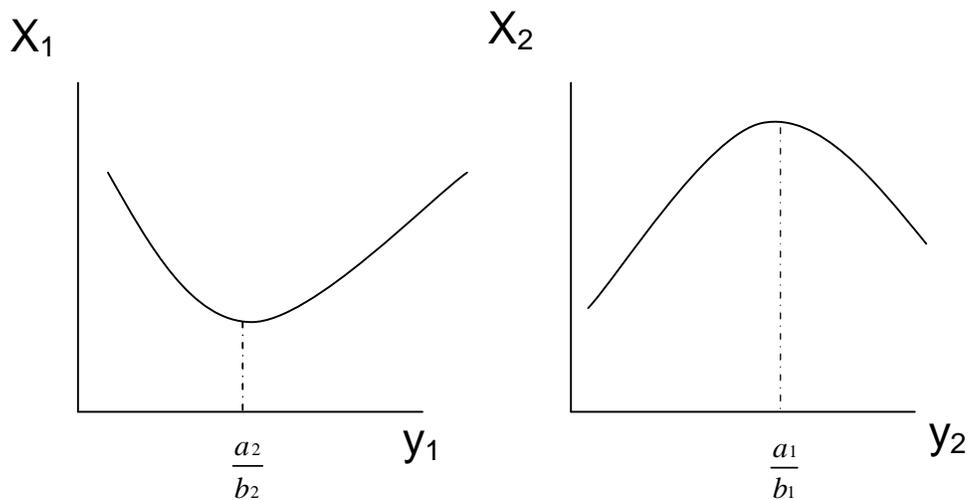


Figura 1: Curvas das funções auxiliares  $X_1$  e  $X_2$ .

FONTE: Gandolfo, G. **Economic Dynamics**. Berlin: Springer-Verlag, 1997. p.452-453)

Através do uso das funções auxiliares, chega-se à curva completa do sistema de equações de Lotka-Volterra, conforme a Figura 2. No segundo e no quarto quadrantes, estão as curvas das funções auxiliares  $X_1$  e  $X_2$ . Estabelece-se um ponto arbitrário  $P_0$  ao longo da reta  $OK$  e traça-se uma reta perpendicular ao eixo  $O X_1$  e outra perpendicular ao eixo  $O X_2$ . Denomina-se  $D, E, F$  e  $G$  os pontos de interseção destas linhas com as curvas de  $X_1$  e  $X_2$ . A partir de  $D$  e  $E$ , traçam-se retas paralelas ao eixo  $O X_1$ , e de  $F$  e  $G$ , traçam-se retas paralelas ao eixo  $O X_2$ . Os pontos de interseção dessas quatro retas (1, 2, 3 e 4) pertencem à curva integral  $X_1 = B X_2$ . Sabe-se ainda que  $\frac{dX_1}{dy_1} = 0 \forall y_1 = \frac{a_2}{b_2}$  e  $\frac{dX_2}{dy_2} = 0 \forall y_2 = \frac{a_1}{b_1}$  estabelecem, da mesma forma, através da reta  $OK$  (no intervalo fechado entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ ) o lócus dos pontos da curva integral para cada valor da constante arbitrária  $B$  ( $B = \tan \alpha$ ). Para cada valor de  $B$ , corresponde uma curva integral que pode ser construída de maneira análoga.

Todas as curvas obtidas pelo método acima descrito são fechadas, exceto a correspondente aos eixos coordenados, de maneira que o estado de equilíbrio é o centro (ponto  $C$  correspondente a  $y_1 = \frac{a_2}{b_2}$  e  $y_2 = \frac{a_1}{b_1}$ ). A origem também é um estado de equilíbrio,

pois  $\frac{dy_1}{dt} = 0 \forall y_1 = 0$  e  $\frac{dy_2}{dt} = 0 \forall y_2 = 0$ .<sup>7</sup>

<sup>7</sup> A determinação dos pontos de equilíbrio pode ser feita algebricamente. Um exemplo pode ser visto em Kot (2001).



ocorrência de qualquer choque externo simplesmente promove a mudança de uma curva integral para outra, onde o sistema retorna ao seu movimento periódico.<sup>9</sup>

O sistema Lotka-Volterra é um sistema conservativo não-linear. Essa denominação é retirada dos sistemas físicos, os quais são chamados de conservativos na medida em que sua energia total (cinética e potencial) permanece constante ao longo do movimento. Sistemas conservativos podem ser concebidos como sistemas nos quais não ocorre fricção, e, assim, não há dissipação de energia.

No caso de sistemas não físicos, o caráter conservativo é determinado apenas em termos formais. De um ponto de vista formal, um sistema é conservativo em seu domínio  $D$  se possui uma primeira integral<sup>10</sup> em  $D$ , e  $D$  possui a propriedade de que cada trajetória tendo um ponto em  $D$  reside inteiramente em  $D$  para  $t \rightarrow +\infty$  e para  $t \rightarrow -\infty$ . O sistema Lotka-Volterra possui a primeira integral constante em todo o espaço de fase (excluída a origem), como, por exemplo, na equação (8) (Gandolfo, 1997).

Dado um sistema conservativo, sua trajetória temporal pode ser computada tanto para  $t \rightarrow +\infty$  como para  $t \rightarrow -\infty$ , ou seja, o sistema pode ser calculado tanto para o futuro como para o passado a partir de qualquer ponto. Matematicamente, o tempo é reversível. Entretanto esse raciocínio somente é válido para sistemas conservativos (Gandolfo, 1997).

Por fim, constata-se que o sistema Lotka-Volterra não apresenta estabilidade estrutural. Pela relevância desse tema para o Modelo de Goodwin, o conceito será tratado a seguir.

---

<sup>9</sup> O período de oscilação do sistema Lotka-Volterra é dependente das condições iniciais, porém, através de uma aproximação linear (ou seja, desprezando-se os termos não lineares), chega-se a que o período de oscilação  $T$  é dado por  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{a_2 a_1}}$ , e a que o período de oscilação da presa se encontra em  $\frac{1}{4}T$ , à frente do predador.

Uma dedução completa da obtenção do período de oscilação para o sistema Lotka-Volterra pode ser vista em Shih (1997).

<sup>10</sup> Dado um sistema  $\frac{dy_i}{dt} = \varphi_i(y_1, y_2)$ , onde  $i = 1, 2$ , “A primeira integral é o único valor da função diferenciável  $F(y_1, y_2)$ , definida em  $D$  e não identicamente constante, tal que  $F(y_1, y_2) = \text{constante}$  quando  $y_1 = y_1(t)$ ,  $y_2 = y_2(t)$ ,  $y_i(t)$  é a solução do sistema” (Gandolfo, 1997, p.456, tradução nossa).

### 2.1.2.3 ESTABILIDADE ESTRUTURAL

A fim de apreender os conceitos relativos à estabilidade estrutural, inicia-se esta seção apresentando algumas definições que fundamentam a análise. A primeira definição a ser estabelecida é a de sistema dinâmico<sup>11</sup>. Cabe ressaltar-se que, neste ponto, se discute a estabilidade estrutural em sua perspectiva de propriedade presente (ou não) em um sistema dinâmico sob o ponto de vista matemático. Suas implicações sob a óptica dos modelos econômicos em geral e do Modelo de Goodwin em particular serão abordadas no próximo capítulo.

Gandolfo (1997, p. 1, tradução nossa) define que: “Um sistema é dinâmico se seu comportamento ao longo do tempo é determinado por equações funcionais cujas variáveis em diferentes pontos do tempo estão envolvidas de alguma maneira”. Uma conceituação semelhante é apresentada por Hirsch e Smale (1974), ao afirmarem que, para um sistema de duas equações diferenciais de funções desconhecidas do tipo  $x(t): x_1' = a_1 x_1$  e  $x_2' = a_2 x_2$ , considerando-se a variável independente  $t$  como tempo, a curva solução  $x(t)$  pode ser concebida como o caminho de uma partícula se deslocando ao longo do tempo no plano  $\mathbb{R}^2$ . Por fim, Hinrichsen e Pritchard (2005, p.74, tradução nossa) afirmam que: “Um sistema dinâmico evolui no tempo, dessa forma, as variáveis que descrevem o comportamento do sistema são funções do tempo”.<sup>12</sup> Dadas as considerações acima, constata-se que o sistema de equações Lotka-Volterra é um sistema dinâmico não-linear<sup>13</sup>.

A teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos foi iniciada no século XIX, na análise de problemas de mecânica celestial. Poincaré criou parte significativa da teoria geral dos sistemas dinâmicos, e Lyapunov contribuiu com a teoria geral de estabilidade (Shilnikov *et al.*, 2001).

---

<sup>11</sup> A conceituação de sistemas dinâmicos não se relaciona diretamente com a questão referente à linearidade ou à não-linearidade. Entretanto cabe frisar-se que, em termos matemáticos formais, a descrição de fenômenos quaisquer (no caso do presente trabalho, fenômenos econômicos) através de relações lineares “[...] não pode ser considerada como uma ferramenta genérica adequada para a análise de problemas dinâmicos. [...] Enquanto a linearidade é única, as possíveis não-linearidades são infinitas” (Gandolfo, 1997, p.429, tradução nossa).

<sup>12</sup> Para a apresentação da definição matemática formal de um sistema dinâmico e de seus correspondentes axiomas, remeter-se a Hirsch e Smale (1974) e a Hinrichsen e Pritchard (2005).

<sup>13</sup> No caso de sistemas não-lineares, pode ser efetuada a distinção entre não-linearidade puramente qualitativa e não-linearidade específica. “Por não-linearidade puramente qualitativa, entendemos a situação na qual sabemos somente que existe uma relação funcional não-linear genérica com certas propriedades qualitativas [...] Por não linearidade específica entendemos a situação na qual assumimos uma relação funcional não linear específica” (Gandolfo, 1997, p.429, tradução nossa). O sistema de equações Lotka-Volterra enquadra-se no segundo caso.

Na análise dos sistemas dinâmicos, é vital a distinção entre estabilidade dinâmica e estabilidade estrutural. A primeira “[...] refere-se à convergência de um processo ao equilíbrio[...]” (Vercelli, 1991, p. 30, tradução nossa), ou, ainda, “[...] relaciona-se à propriedade de um estado ou de uma órbita de um sistema dinâmico[...]” (Veneziani; Mohun, 2006, p.437, tradução nossa). Segundo Gandolfo “Um sistema é estável se, quando ligeiramente perturbado em seu estado de equilíbrio, todos os movimentos subseqüentes permanecem em uma vizinhança próxima ao equilíbrio” (Gandolfo, 1997, p. 333, tradução nossa). Assim, pode-se considerar genericamente que a estabilidade dinâmica se associa à capacidade de um sistema, quando submetido a pequenas perturbações de preservar, ou não, um determinado estado de equilíbrio.

O conceito de estabilidade estrutural é recente e vincula-se à persistência no comportamento qualitativo de um sistema dinâmico (Vercelli, 1991). Sua formalização ocorreu na década de 30 do século XX, a partir do desenvolvimento da engenharia de rádio, com a constatação de que qualquer equipamento, como um tubo de vácuo, possui certo conjunto de parâmetros ajustáveis. Em termos práticos, os valores dos parâmetros correspondentes a um regime oscilatório do mesmo equipamento, ou de uma série de equipamentos similares, não podem ser exatamente idênticos. Ainda assim, se o equipamento exhibe repetidamente uma oscilação similar, isso significa que pequenos desvios nos parâmetros, dentro de alguma margem de tolerância, não modificam o caráter qualitativo do processo (Shilnikov *et al.*, 2001).

Gandolfo (1997) afirma que o problema da estabilidade estrutural surge devido ao fato de que nenhum dos fatores tomados como dados podem permanecer absolutamente constantes ao longo do movimento de um sistema dinâmico. Dessa maneira, quando se formula a hipótese de que certos parâmetros são constantes, assume-se que pequenas variações dos parâmetros não alterarão significativamente o caráter do movimento do sistema, ou seja, o sistema não apresentará modificação qualitativa de seu comportamento. Uma afirmação mais específica pode ser obtida em Veneziani e Mohun: “[a estabilidade estrutural] Incorpora a idéia que se o sistema é ligeiramente perturbado, as características qualitativas de retrato de fase essencialmente não se alteram” (Veneziani; Mohun, 2006, p.437, tradução nossa).

A formalização matemática da estabilidade estrutural foi originalmente concebida por Andronov e Pontryagin, com as ferramentas da moderna topologia (Vercelli, 1991; Veneziani, 2006; Gandolfo, 1997; Shilnikov L. *et al.*, 2001)<sup>14</sup>.

Apresentam-se a seguir duas formalizações para a estabilidade estrutural de um sistema dinâmico. A primeira, obtida em Gandolfo (1997)<sup>15</sup>, segue diretamente a definição formal de estabilidade estrutural proposta por Andronov e Pontryagin<sup>16</sup> para um conjunto de sistemas bidimensionais no plano. A segunda, proposta por Veneziani e Mohun (2006), é idêntica à demonstração de Hirsch e Smale (1974) e apresenta uma variação dessa noção para fluxos<sup>17</sup>.

Gandolfo (1997, p-338-339, tradução nossa) demonstra a estabilidade estrutural de um sistema dinâmico da seguinte maneira.

Considera-se um sistema autônomo (no qual o tempo não aparece explicitamente) 2 X 2.

$$y_1' = f_1(y_1, y_2) \quad [(13)]$$

$$y_2' = f_2(y_1, y_2) \quad [(14)]$$

E um sistema modificado,

$$y_1' = f_1(y_1, y_2) + p(y_1, y_2) \quad [(15)]$$

$$y_2' = f_2(y_1, y_2) + q(y_1, y_2) \quad [(16)]$$

onde  $q(y_1, y_2)$  e  $p(y_1, y_2)$  são pequenos e analíticos e possuem pequenas derivadas parciais. Temos, então, a seguinte definição.

Definição (estabilidade estrutural): o sistema [(13) e (14)] é chamado “robusto”<sup>[18]</sup> na região  $G$  se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que, para todas as funções analíticas  $q(y_1, y_2)$  e  $p(y_1, y_2)$  que satisfaçam em  $G$  as desigualdades:

<sup>14</sup> A literatura apresenta uma discussão sobre os limites do teorema de Andronov-Pontryagin e a posterior generalização proposta por Peixoto, uma vez que os primeiros partem de sistemas de duas dimensões no plano. A discussão pode ser vista em Shilnikov *et al.* (2001) no Capítulo 7.

<sup>15</sup> Essa formalização é semelhante à apresentada por Shilnikov *et al.* (2001), com pequenas modificações.

<sup>16</sup> A única obra de Andronov localizada (teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos) é uma edição em russo, o que inviabilizou seu uso direto nessas discussões.

<sup>17</sup> A definição de Hirsch e Smale é a geralmente adotada na literatura sobre o Modelo de Goodwin (Veneziani; Mohun, 2006).

<sup>18</sup> A nomenclatura para a estabilidade estrutural como *rough system* em inglês (sistema robusto em português na nossa tradução ou *systemes grossières* em francês), ou, ainda, *coarse system* (mesmo sentido) foi estabelecida por Andronov e Pontryagin. Esse termo é encontrado na literatura matemática. Shilnikov L. *et al.* (2001) discutem em seu Capítulo 7 distinções sutis entre estabilidade estrutural e sistema “robusto”. Gandolfo (1997) também aponta questões associadas a essa nomenclatura. Nesse trabalho, abdica-se da denominação “robusto”. O motivo principal deve-se ao fato de que uma análise adequada do sentido estabelecido por Andronov e Pontryagin no original em russo foge do escopo deste trabalho, bem como ao fato de que as discussões sobre o Modelo de Goodwin se valem da noção expressa pelos termos estabilidade/instabilidade estrutural.

$p(y_1, y_2) < \delta$ ,  $p_{y_1}(y_1, y_2) < \delta$ ,  $p_{y_2}(y_1, y_2) < \delta$ ,  $q(y_1, y_2) < \delta$ ,  $q_{y_1}(y_1, y_2) < \delta$ ,  $q_{y_2}(y_1, y_2) < \delta$ , exista uma transformação topológica de  $G$  em si mesmo, para a qual cada trajetória do sistema [(13) e (14)] seja transformada em uma trajetória do sistema modificado [(15) e (16)] (e reciprocamente), sendo que os pontos correspondentes uns aos outros nessa transformação sejam encontrados em distâncias inferiores a  $\varepsilon$ .

A versão apresentada por Veneziani e Mohun (2006) é a seguinte.

Sejam  $x, y \in \mathfrak{R}^n$  e seja  $\langle y, x \rangle$  o produto interno de  $x$  e  $y$ . Seja  $D^n = \{x \in \mathfrak{R}^n : |x| \leq 1\}$ , onde  $|x|$  é a norma euclidiana de  $x$ . Seja  $\partial D^n$  o limite de  $D^n$  :  $\partial D^n = \{x \in \mathfrak{R}^n : |x| = 1\}$ . Seja  $C^1$  um conjunto de funções limitadas e continua em  $\mathfrak{R}^n$ . Seja  $W$  um conjunto aberto em  $\mathfrak{R}^n$ , e que  $V(W)$  denote o conjunto de todos os  $C^1$  campos vetoriais em  $W$ .

Considerem-se os  $C^1$  campos vetoriais  $f : W \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , definidos em algum conjunto aberto  $W$  contendo  $D^n$ , tal que  $\langle f(x), x \rangle < 0$  para cada  $x \in D^n$ .  $f$  é estruturalmente estável em  $D^n$  se existe uma vizinhança  $I \subset V(W)$  tal que, se  $g : W \rightarrow \mathfrak{R}^n$  está em  $I$ , então, os fluxos de  $f$  e  $g$  são topologicamente equivalentes em  $D^n$ , isto é, há homeomorfismo  $h : D^n \rightarrow D^n$  tal que  $h(\{\phi_t(x) | t \geq 0\}) = \{\psi_t(x) | t \geq 0\}$ , para cada  $x \in D^n$  onde  $\phi_t(x)$  é o fluxo de  $f$  e  $\psi_t(x)$  é o fluxo de  $g$ , e se  $x$  não é um equilíbrio,  $h$  preserva a orientação de trajetória (Veneziani; Mohun, 2006, p.440, tradução nossa).

Desse modo,

[...] a definição topológica de estabilidade estrutural incorpora a idéia intuitiva de que as características do retrato de fase não se modificam de uma maneira essencial se o sistema é submetido a uma perturbação infinitesimal, dado que o sistema dinâmico próximo tem as mesmas propriedades dinâmicas qualitativas. Fica claro a partir da definição acima que o conceito de estabilidade estrutural se baseia em [...] três noções primitivas: a noção de equivalência de sistemas, a topologia dos sistemas e a noção de que perturbações são possíveis *a priori* (Veneziani; Mohun, 2006, p. 440, tradução nossa).

Conforme Gandolfo (1997, p.339, tradução nossa), “[...] o que importa é a preservação das propriedades qualitativas do sistema, sejam quais forem”.

A literatura informa que o sistema Lotka-Volterra não possui estabilidade estrutural (Gandolfo, 1997; Kot, 2001, Guckenheimer; Holmes, 1986). Efetuar-se-á uma caracterização desse ponto, seguindo Hirsch e Smale (1974) e Gandolfo (1997).

Considera-se um sistema Lotka-Volterra modificado:

$$\frac{dy_1}{dt} = (a_1 - b_1 y_2 - p y_1) y_1 = (a_1 - b_1 y_2) y_1 + p y_1^2 \quad (17)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -(a_2 - b_2 y_1 - q y_2) y_2 = -(a_2 - b_2 y_1) y_2 + q y_2^2 \quad (18)$$

Sendo  $p$  e  $q$  pequenas constantes positivas (esses termos possuem interpretação biológica conforme Hirsch e Smale (1974)), constata-se que, nesse caso, ocorre uma alteração qualitativa no retrato de fase do sistema: o que antes era uma órbita fechada, converte-se em um ciclo que pode afastar-se ou aproximar-se do ponto de equilíbrio<sup>19</sup>. Assim, a partir de uma pequena perturbação, o sistema altera seu comportamento, modificando qualitativamente seu comportamento dinâmico.

### 2.1.3 A ESTRUTURA DO MODELO DE GOODWIN

O Modelo de Goodwin é um tratamento matemático que busca compatibilizar as idéias de ciclo econômico e crescimento econômico em um único modelo. O modelo foi apresentado originalmente por Richard Goodwin no primeiro congresso mundial da sociedade de econometria em Roma, em 1965, e posteriormente publicado em 1967, em um volume em homenagem a Maurice Dobb. Uma segunda versão do artigo foi publicada em 1972, constituindo-se no original acrescido de alguns parágrafos explicativos. Nesta seção, efetuar-se-á a discussão do Modelo de Goodwin a partir dos dois artigos acima citados. Os desenvolvimentos matemáticos seguirão as demonstrações apresentadas por Gandolfo (1997).

O modelo é concebido por Goodwin da seguinte maneira:

Desde seu surgimento o capitalismo se caracteriza-se por expansão e retração. Este artigo procura dar uma forma mais precisa a uma idéia de Marx – a de que esta característica pode ser explicada pela interação dinâmica entre lucros, salários e desemprego. Minha tese é que a própria estrutura do capitalismo constitui um mecanismo homeostático<sup>[20]</sup> que funciona através de variações nas participações distributivas, mas de um modo em que as mantém constantes no longo prazo (Goodwin, 1972, p. 442, tradução nossa).

<sup>19</sup> A demonstração completa, incluindo gráficos pode ser vista em Hirsch e Smale (1974).

<sup>20</sup> Por mecanismo homeostático, compreende-se um processo que, possuindo variações no curto prazo, apresenta um equilíbrio constante no longo prazo..

Goodwin descreve a dinâmica que objetiva formalizar no modelo nos seguintes termos:

Se os salários reais crescem; os lucros caem: se os lucros caem, a poupança e o investimento se retraem, assim reduzindo a criação de novos empregos. Porém a força de trabalho está crescendo continuamente tanto pelo seu incremento natural como através dos indivíduos “libertos” pelo progresso tecnológico. O exército industrial de reserva cresce, os salários retardam-se em relação ao crescimento da produtividade, lucros crescem, e a acumulação é acelerada, retornando a um nível elevado. Isto, por sua vez, reduz o desemprego, os salários crescem e, assim, segue indefinidamente (Goodwin, 1972, p.442, tradução nossa).

O ciclo de crescimento de Goodwin estrutura-se a partir de sete premissas:

- 1) progresso técnico constante (desincorporado)<sup>21</sup>;
- 2) crescimento constante da força de trabalho;
- 3) Somente são empregados dois fatores de produção – trabalho e capital – ambos homogêneos e não específicos;
- 4) todas as quantidades são reais e líquidas;
- 5) todos os salários são consumidos, e todos os lucros são poupados e reinvestidos;
- 6) a razão capital produto é constante;
- 7) a taxa de salário real é crescente na vizinhança do pleno emprego.

Segundo Goodwin, as premissas 1 a 5 são efetuadas por conveniência, enquanto as duas últimas são de caráter empírico. Goodwin afirma ainda:

Tais premissas são muito simples e rudes para representar a realidade, elas não são, entretanto, escolhidas arbitrariamente. [...] elas representam, em minha opinião, os aspectos dinâmicos mais essenciais do capitalismo. [...] A sexta deve ser um resultado e não uma premissa, uma situação que necessita ser somente aproximadamente verdadeira. A sétima deverá funcionar com salários monetários, não reais, os quais, na presença de inflação, podem atingir os mesmos resultados, porém à custa de considerável complicação (Goodwin, 1972, p.445, tradução nossa).

Com tais premissas estabelecidas, o modelo é construído como segue.<sup>22</sup> Inicialmente, considera-se que  $Y$  é o produto total,  $L$  é o emprego total da força de trabalho,  $N$  é a oferta de trabalho,  $a$  é a produtividade do trabalho, a taxa de crescimento do progresso técnico é  $\alpha$ , e a taxa de crescimento da população é  $\beta$ . A produtividade do trabalho aumenta ao longo do tempo por

<sup>21</sup> O progresso técnico é desincorporado a *la* Harrod, ou seja, ele se exerce exclusivamente ao nível da produtividade do trabalho. As isoquantas se deformam ao longo do tempo, não sendo possível isolar o efeito do progresso técnico devido ao capital ou ao trabalho (Caffè, 2006).

<sup>22</sup> A demonstração da construção do modelo apresentada por Goodwin é extremamente sucinta. Desse modo, as demonstrações apresentadas seguirão a notação utilizado por Gandolfo (1997).

$$\frac{Y}{L} = a = a_0 e^{\alpha t} \quad (19)$$

O crescimento da população é dado por

$$N = N_0 e^{\beta t} \quad (20)$$

A seguir, tem-se a definição da participação dos salários dos trabalhadores no produto:

$$u = \frac{wL}{Y} = \frac{w}{a} \quad (21)$$

Dessa relação, obtém-se a participação dos capitalistas, que é dada por  $1 - \frac{w}{a} = 1 - u$ .

A taxa de lucro ( $\pi$ ) é determinada partindo-se da participação dos capitalistas no produto, onde  $K$  é o capital.

$$\pi = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)Y}{K} \quad (22)$$

Assim, dadas as premissas 4, 5, e 6, ou seja, todas as quantidades são reais e líquidas, os capitalistas poupam e reinvestem todos os lucros e a relação capital-produto é constante, e derivando-se em relação ao tempo, obtém-se a variação do capital e, por extensão, do produto no tempo:

$$\frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)Y}{K} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y} \quad (23)$$

onde  $k$  é a razão entre capital e produto.

A seguir, partindo-se da relação que determina o crescimento da produtividade (19), tomam-se os logaritmos naturais e, derivando-se em relação ao tempo, chega-se a

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha \quad (24)$$

Substituindo-se (23) em (24), obtém-se a variação da utilização do trabalho no tempo

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} - \alpha \quad (25)$$

Neste ponto, define-se a taxa de emprego  $v$  como

$$v = \frac{L}{N} \quad (26)$$

Efetua-se a diferenciação logarítmica em relação ao tempo e obtém-se

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{N}}{N} \quad (27)$$

Considerando-se que a taxa de crescimento da população é

$$\frac{\dot{N}}{N} = \beta \quad (28)$$

Chega-se a variação da taxa de emprego no tempo

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} - (\alpha + \beta) = \frac{1-u}{k} - (\alpha + \beta) \quad (29)$$

Agora, retomando-se o pressuposto de que ocorre crescimento do salário na proximidade do pleno emprego, o pressuposto toma a forma:

$$\frac{\dot{w}}{w} = f(v) \quad (30)$$

Em (30), considera-se uma aproximação linear para  $f(v)$ , conforme a Figura 3. Assim, obtém-se:

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v \quad (31)$$

Goodwin afirma que essa aproximação linear é “[...] satisfatória para movimentos moderados de  $v$  próximos ao ponto +1. Tanto  $\gamma$  como  $\rho$  devem ser grandes” (Goodwin, 1967, p. 55, tradução nossa).  $\gamma$  não possui uma interpretação econômica estrita, pois para

$v = 0$ ,  $\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma$ , ou seja, quando toda a população está desempregada, a taxa de incremento de salário será  $-\gamma$ , o que não possui sentido econômico. Entretanto a presença de  $-\gamma$  assegura que, em caso de aumento do desemprego, ou seja, quando  $v$  decresce, a variação dos salários também decresce e torna-se negativa. Por sua vez,  $\rho$  indica a correlação entre o aumento do emprego e o aumento do salário, ou, ainda, a elasticidade do salário em relação ao emprego.

Em termos teóricos, quando a reta  $-\gamma + \rho v$  intercepta o eixo  $v$ , tem-se que  $\frac{\dot{w}}{w} = 0$ , ou seja, nesse ponto, tem-se o nível de equilíbrio do emprego que é dado por  $v = \frac{\gamma}{\rho}$ , no qual não ocorre incremento ou redução de salários. Entretanto, como afirmado por Goodwin, essa abordagem é uma aproximação linear para movimentos de  $v$  próximos a +1, logo, as observações sobre o comportamento dessa aproximação linear devem ser tomadas com cuidado.

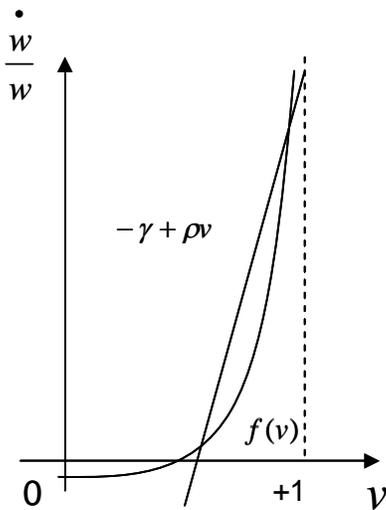


Figura 3: Aproximação linear da relação entre salários e emprego  
 FONTE: GOODWIN, R. M. A growth cycle. In: FEINSTEIN, C.H. **Socialism, Capitalism and Economic Growth**. Cambridge: Cambridge University Press, 1967, p.55.

Em (21) e (19), efetua-se a diferenciação logarítmica em relação ao tempo e chega-se à relação entre salário e participação dos trabalhadores no produto

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{\dot{w}}{w} - \alpha \quad (32)$$

E assim, substituindo-se (31) em (32), resulta em

$$\frac{\dot{u}}{u} = -(\alpha + \gamma) + \rho v \quad (33)$$

Com esses procedimentos, chega-se às duas equações fundamentais do Modelo de Goodwin, que são análogas ao sistema Lotka-Volterra:

$$\dot{v} = \left\{ \left[ \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right] - \frac{1}{k} u \right\} v \quad (34)$$

$$\dot{u} = [ -(\alpha + \gamma) + \rho v ] u \quad (35)$$

Além disso, considerando-se que

$$\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) = a_1 \quad (36)$$

$$\frac{1}{k} = b_1 \quad (37)$$

$$(\alpha + \gamma) = a_2 \quad (38)$$

$$\rho = b_2 \quad (39)$$

efetuando-se a substituição de (36) e (37) em (34), bem como de (38) e (39) em (35), chega-se às seguintes expressões:

$$\dot{v} = (a_1 - b_1 u)v \quad (40)$$

$$\dot{u} = -(a_2 - b_2 v)u \quad (41)$$

As equações (40) e (41) são o Modelo de Goodwin em termos análogos ao sistema de Lotka-Volterra. Agora parte-se para o diagrama de soluções do ciclo de crescimento de Goodwin. Para tanto, tomam-se as equações (34) e (35), elimina-se o tempo (dividindo a equação (34) pela equação (35)), e efetua-se a integração, chegando-se em<sup>23</sup>

$$\frac{1}{k}u + \rho v - \left[ \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right] \log u - (\alpha + \gamma) \log v = C \quad (42)$$

onde C é uma constante.

Para fins de manipulação algébrica, considera-se agora

$$\theta_1 = \frac{1}{k} \quad (43)$$

---

<sup>23</sup> Tanto no artigo original de Goodwin (1967) como na versão posterior (1972), a equação (42) está grafada erroneamente, apresentando  $\rho$  onde se deve ler  $\beta$ .

$$\theta_2 = \rho \quad (44)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \quad (45)$$

$$\eta_2 = \alpha + \gamma \quad (46)$$

Através da substituição de (43), (44), (45) e (46) em (42), e utilizando-se tratamento algébrico, obtém-se:

$$\phi(u) = u^{\eta_1} e^{-\theta_1 u} = H v^{\eta_2} e^{\theta_2 v} = H \varphi(v) \quad (47)$$

onde a constante  $H$  é o resultado do tratamento algébrico da constante  $C$ . Observe-se que a relação obtida em (47) é análoga à obtida em (9).

Utilizando-se as funções  $\phi$  e  $\psi$  como funções auxiliares, chega-se ao traçado da curva de soluções, como exposto na Figura 4.

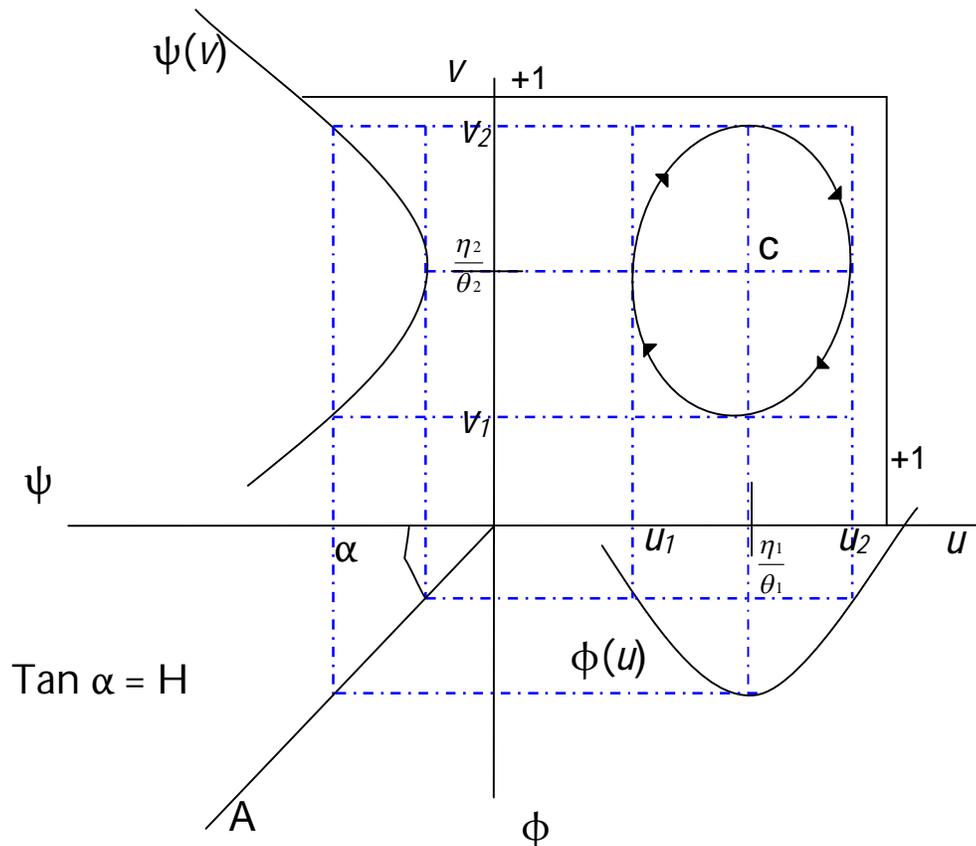


Figura 4: Curva integral do Modelo de Goodwin.

FONTE: GOODWIN, R. M. A growth cycle. In: FEINSTEIN, C.H. **Socialism, Capitalism and Economic Growth**. Cambridge: Cambridge University Press, 1967, p.57.

NOTA: O comportamento dinâmico é similar ao apresentado na Figura 2, porém com a órbita em sentido horário, uma vez que, neste modelo, a presa esta nas ordenadas, e o predador, nas abscissas.

Segundo Goodwin, existem dois fatores arbitrários para a determinação da curva de soluções do modelo. O primeiro é a definição da constante  $H$ , pois a mesma estabelece qual órbita específica será percorrida no modelo (a cada valor de  $H$ , corresponde uma curva específica); e o segundo é o ponto de início do movimento. Uma vez estabelecidas as condições iniciais, o sistema permanece em movimento indefinidamente. À medida que os pontos transitam pela curva,  $u$  vibra entre  $u_1$  e  $u_2$ , e  $v$  entre  $v_1$  e  $v_2$ . Goodwin afirma ainda que o modelo pode ser classificado como oscilador conservativo não-linear<sup>24</sup> (Goodwin, 1967).

Ao analisar o Modelo de Goodwin, Desai (1973, p.530, tradução nossa) observa que:

<sup>24</sup> Detalhes na seção sobre o sistema Lotka-Volterra.

O Modelo de Goodwin possui muitos elementos em comum com modelos de crescimento de um único setor do tipo Harrod Domar. Existe uma relação fixa capital-produto, o crescimento da produtividade do trabalho e o crescimento da população são dados por uma taxa exponencial exógena. Mas, dados os pressupostos clássicos sobre a poupança e o comportamento do trabalho em relação à barganha da taxa de salário real, obtemos um ciclo fechado[...]

Ao considerar os aspectos econômicos do modelo, Goodwin comenta que:

Nesta forma, nós reconhecemos o modelo presa e predador de Volterra. De certa maneira, a semelhança é puramente formal, mas não inteiramente. A muito parece-me que o problema de Volterra da simbiose de duas populações, parcialmente hostis e parcialmente complementares, auxilia na compreensão da dinâmica contraditória do capitalismo, especialmente quando apresentada de uma maneira mais ou menos marxista (Goodwin, 1967, p.55, nossa tradução).

O modelo contém uma variável de distribuição (participação do salário no produto)  $u$ , e uma variável de uso de capacidade (taxa de emprego)  $v$ . Tanto  $u$  como  $v$  devem ser menores que 1, contudo  $u$  pode ser excepcionalmente maior que 1 nos casos em que salários e consumo são maiores que o produto total devido a perdas e desinvestimento (Goodwin, 1967).

A relação presa predador estabelece-se de maneira que a taxa de emprego é a presa e a participação do salário no produto é o predador.

Uma primeira abordagem do sistema pode ser efetuada de modo análogo à perspectiva biológica do sistema Lotka-Volterra, ou seja, uma análise para cada termo de cada equação.

Toma-se primeiramente a equação da presa (34): a taxa de emprego. O primeiro termo dessa equação é  $\left[ \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right] v$ . Esse termo, na biologia, indica o crescimento da presa na ausência de predadores. No presente caso, indica que, na ausência de remuneração do trabalho, hipótese irreal do ponto de vista empírico, ou seja, se  $u = 0$ , a taxa de crescimento do emprego é exponencial e dada pela relação  $v_t = v_0 e^{\left( \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right) t}$ , onde a taxa de crescimento do emprego é  $\frac{1}{k} - (\alpha + \beta)$ . Observe-se que  $\frac{1}{k}$ , o inverso da relação capital produto, é a produtividade do capital  $\frac{Y}{K}$ , ou seja, para a ocupação do trabalho crescer, necessita-se que a produtividade do capital seja superior à taxa de crescimento do progresso técnico  $\alpha$  e à da

população  $\beta$  somadas. Caso  $\frac{Y}{K} = \alpha + \beta$ , não há crescimento. Na hipótese de que a produtividade do capital seja inferior a  $\alpha + \beta$ , ocorre queda na ocupação dos trabalhadores.

O segundo termo dessa equação é  $-\frac{1}{k}uv$ , que, em termos biológicos, expressa a queda da população de presas devido à ação dos predadores. Nesse termo, aparecem os fatores que provocam a queda do emprego. Uma primeira interpretação indica que economias mais desenvolvidas (com maior estoque de capital) tendem a ter um maior crescimento do emprego, já que  $k = \frac{K}{Y}$  (razão capital produto). Assim, quanto maior a relação capital produto  $k$ , menor o impacto negativo da participação do salário no produto ( $u$ ) sobre o emprego, já que o termo  $-\frac{1}{k}uv$  diminui. Ou, ainda, em países com maior  $k$ , menor é o efeito de um aumento de  $u$  sobre o emprego. Outro resultado que pode ser analisado é a indicação de que, em economias mais desenvolvidas, o impacto negativo dos salários sobre o emprego é menor do que em economias menos desenvolvidas. Como  $u = \frac{wL}{Y}$  e  $k = \frac{K}{Y}$  (razão capital produto), chega-se à relação  $\frac{Y}{K} \frac{wL}{Y} v$ . Simplificando, obtém-se  $\frac{wL}{K} v$ . Visualiza-se, assim, diretamente o impacto negativo que o salário tem sobre o emprego. Entretanto esse efeito relaciona-se inversamente com a intensidade de capital (razão entre o estoque de capital e trabalho  $(\frac{K}{L})$ <sup>25</sup>). Dessa forma, em países com maior intensidade de capital (países desenvolvidos), menor é o efeito de um aumento do salário sobre o emprego. Isso se deve ao fato de que valores maiores de intensidade de capital fazem com que  $-\frac{1}{k}uv$  diminua.

Toma-se agora, a equação (35), que corresponde ao predador, no caso específico, à participação do salário na renda. O termo da equação (35)  $\rho v u$  indica o crescimento do predador. Contata-se que o crescimento da participação do salário no produto é diretamente proporcional à taxa de emprego, do mesmo modo que a elasticidade salário em relação ao emprego (crescimento do salário devido ao crescimento do emprego).

---

<sup>25</sup> Conforme Foley e Michl (1999).

Por sua vez, o termo  $-(\alpha + \gamma)u$  representa o decaimento do predador e indica os fatores que impactam negativamente a participação do salário no produto. Esses fatores são a taxa de progresso técnico  $\alpha$  e o intercepto da aproximação linear da Curva de Phillips  $\gamma$ . O progresso técnico atua como um agente redutor do poder de barganha dos trabalhadores na demanda por maiores salários, reduzindo a participação do trabalho no produto. Já  $\gamma$  representa, estritamente, o comportamento da versão linear da Curva de Phillips, na qual variações negativas do nível de emprego implicam variações negativas na barganha salarial dos trabalhadores, acarretando redução na participação no produto.

Como a participação dos trabalhadores no produto é o predador e a taxa de emprego (que é uma medida de capacidade) é a presa, no Modelo de Goodwin os trabalhadores são os predadores, e os capitalistas são as presas. Isso ocorre porque o emprego é vinculado ao aumento de capacidade decorrente do crescimento dos lucros. Assim, a maior participação no produto dos trabalhadores ( $u$ ) reduz a acumulação dos capitalistas e acarreta queda do emprego.

Uma maneira alternativa de visualizar trabalhadores como predadores e capitalistas como presas é apresentado por Solow (1990). Nesse caso o emprego, identificado com os trabalhadores, é o predador, e a presa é a participação dos lucros no produto ( $1 - u$ ), identificada com os capitalistas. Assim, o crescimento da população de presas (lucros) estimula o crescimento da população de predadores (o emprego). Por sua vez, o crescimento do emprego reduz a participação dos lucros no produto.<sup>26</sup>

Em termos comportamentais, o Modelo de Goodwin assume que o objetivo dos capitalistas é a acumulação, e o objetivo dos trabalhadores é o aumento de salários (Desai, 1972).

Goodwin constata que o modelo, sem perturbações, possui valores médios constantes para  $u$ , de  $\frac{\eta_2}{\theta_2}$ , e para  $v$ , de  $\frac{\eta_1}{\theta_1}$ , ou seja, médias de distribuição de renda e nível de desemprego constantes no longo prazo.

Essas médias são os pontos de equilíbrio<sup>27</sup> do modelo, possuindo as características de um crescimento em *steady-state*. Analisando-se o equilíbrio de longo prazo, observa-se,

<sup>26</sup> Solow (1990) apresenta, ainda, uma segunda interpretação, na qual os capitalistas são passivos e a relação presa predador se estabelece entre os trabalhadores empregados e os trabalhadores desempregados. Nessa perspectiva, os trabalhadores empregados são os predadores, associados à variável  $u$ , e os trabalhadores desempregados são as presas, vinculados à variável  $v$ . Maiores valores de  $u$  acarretam decréscimo de  $v$ .

<sup>27</sup> Os teoremas apresentando as propriedades dos pontos de equilíbrio do Modelo de Goodwin são demonstrados e discutidos em Velupillai (1979), utilizando uma função de Lyapunov. Uma demonstração alternativa das

primeiro, que o crescimento do produto é igual à taxa natural de crescimento, ou seja,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha + \beta \quad (\text{Desai, 1973; Solow, 1990}).$$

Esse resultado é demonstrado tomando-se a equação (34) e considerando-se que, no equilíbrio  $\dot{v} = 0$ ,

$$\frac{1-u}{k} = \alpha + \beta \quad (48)$$

Obtida a equação (48), considera-se o pressuposto de que todos os lucros são poupados e reinvestidos, a relação  $1 - \frac{w}{a} = 1 - u$  e a equação (23), chegando-se a

$$\frac{\left(1 - \frac{w}{a}\right)}{k} = \frac{1-u}{k} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y} = (\alpha + \beta) \quad (49)$$

o que demonstra que, no modelo, o crescimento no equilíbrio de longo prazo é dado pela taxa natural de crescimento: crescimento da produtividade acrescido do crescimento da população.

O segundo resultado significativo é a constatação de que a taxa de crescimento dos salários reais é igual ao crescimento da produtividade, ou, ainda,  $\frac{\dot{w}}{w} = \alpha$  (Desai, 1973; Solow, 1990).

Considerando-se o crescimento do salário real no equilíbrio, toma-se a equação (35) e, considerando-se que no equilíbrio  $\dot{u} = 0$ , tem-se:

$$-\gamma + \rho v = \alpha \quad (50)$$

Logo, através da equação (31), obtém-se

$$\frac{\dot{w}}{w} = \alpha \quad (51)$$

Demonstra-se, assim, que, no equilíbrio, o aumento dos salários reais é igual ao incremento da produtividade.

É importante ressaltar-se que o ponto de equilíbrio nunca será alcançado pela economia. Esta mantém um comportamento orbital em relação a esse ponto à medida que transcorre o ciclo. Entretanto o equilíbrio informa a tendência de longo prazo dessa economia. O período de oscilação do ciclo ( $T$ ) é obtido a partir de uma linearização no ponto de equilíbrio. A fórmula é dada pela seguinte equação:<sup>28</sup>

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\alpha + \gamma) \left( \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right)}} \quad (52)$$

Constata-se, ainda, o fato de que um sistema perturbado possui os mesmos valores constantes no longo prazo. As médias temporais de  $u$  e  $v$  são independentes das condições iniciais. Isso é visível uma vez que uma rotação em A (uma perturbação exógena) somente fará com que a curva de soluções fique maior ou menor, não alterando seu ponto central (Goodwin 1967).

Observa-se, agora, o comportamento dinâmico do modelo, considerando-se as informações presentes na Figura 4. Para descrever a dinâmica proposta por Goodwin, parte-se do ponto  $u_1$ . Nesse ponto, a participação dos trabalhadores no produto é mínima, e a participação dos capitalistas é máxima. Para  $u_1$ , tem-se que o ponto correspondente no eixo  $v$  é  $\frac{\eta_2}{\theta_2} = \frac{\alpha + \gamma}{\rho}$ . Nesse ponto, a taxa de emprego encontra-se em seu nível médio, e o

crescimento do salário é  $\frac{\dot{w}}{w} = \alpha$ .

O ponto de máxima participação dos capitalistas no produto (que pode ser considerado o ponto de lucro máximo) é de elevada taxa de crescimento, dados os pressupostos de razão entre capital e produto constante e de que todos os lucros são poupados

<sup>28</sup> A dedução está em Harvie (2000). Esse resultado mantém coerência com o resultado apresentado pelo sistema Lotka-Volterra, conforme nota 9 deste texto.

e reinvestidos, ao mesmo tempo em que o crescimento do salário é dado pelo crescimento da produtividade. Considerando-se esse ponto em termos da variação do emprego  $\dot{v}$ , constata-se que, dada a pequena participação dos trabalhadores no produto,  $\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) > \frac{1}{k}u$ , o emprego cresce. Já sob o prisma da variação da participação dos trabalhadores  $\dot{u}$ , observa-se que o efeito do aumento da demanda por trabalhadores, dado por  $\rho v$ , domina o efeito de  $(\alpha + \gamma)$ , mais especificamente o impacto do progresso técnico como redutor do poder de barganha dos trabalhadores. Sob a ótica dos capitalistas, dada a condição de elevada acumulação, existe a disposição de tolerar o crescimento dos salários acima do crescimento da produtividade. A relação  $\rho v > (\alpha + \gamma)$  se mantém.

A alta taxa de crescimento conduz ao ponto  $v_2$ . Nele, o emprego é máximo, ou seja, o crescimento do lucro conduz ao crescimento do investimento, o que leva ao aumento da ocupação da força de trabalho.

Porém o trajeto que conduz à  $v_2$  implica o aumento da participação dos trabalhadores no produto, uma vez que a ocupação é crescente. O ponto no eixo  $u$  correspondente a  $v_2$  é  $\frac{\eta_1}{\theta_1} = 1 - k(\alpha + \beta)$  é o ponto no qual, tanto para os capitalistas como para os trabalhadores, a participação no produto se encontra em um ponto médio. Nesse ponto,  $\frac{\dot{Y}}{Y} = (\alpha + \beta)$ , ou seja, o crescimento do produto, é dado pelo crescimento natural da economia.

A partir de  $\frac{\eta_1}{\theta_1}$ , segue-se uma condição de crescimento menor, que promove um decréscimo na ocupação dos trabalhadores. Agora, em  $\dot{v}$  passa a ocorrer  $\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) < \frac{1}{k}u$ , ou seja, o efeito da maior participação dos trabalhadores no produto supera o efeito do crescimento na demanda por trabalho, pois os capitalistas investem menos, dada sua menor lucratividade, o que acarreta queda no emprego. Por sua vez, em  $\dot{u}$ , o efeito resultante ainda é dado por  $\rho v$ , ou seja, a queda do crescimento não impacta ainda o poder de barganha dos trabalhadores, que preservam seu crescimento no produto.

Essa trajetória implicará desaceleração do crescimento, dado que ocorre um *profit squeeze*<sup>29</sup>. O nível de emprego cai de  $v_2$  para  $\frac{\eta_2}{\theta_2} = \frac{\alpha + \gamma}{\rho}$ , ao mesmo tempo em que a participação dos capitalistas no produto cai ao seu nível mais baixo, e, correspondentemente, a participação dos trabalhadores atinge seu nível mais alto:  $u_2$ . A variação do emprego  $\dot{v}$  permanece em queda, já que a relação  $\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) < \frac{1}{k}u$  se mantém. A participação do trabalho no produto  $\dot{u}$  começa a reduzir-se. Ocorre  $(\alpha + \gamma) > \rho v$ , ou seja, os salários atrasam-se em relação ao crescimento da produtividade dada a queda no emprego.

Este processo conduz o emprego ao seu nível mais baixo, no ponto  $v_1$ , na medida em que, agora, a retomada da acumulação dos capitalistas é dominada pelo crescimento da produtividade. Esse crescimento centrado na produtividade restaura a participação dos capitalistas no produto ao seu nível médio  $\frac{\eta_1}{\theta_1} = 1 - k(\alpha + \beta)$ . Sobre esse ponto, Goodwin (1967, p.58, tradução nossa) afirma que: “[...] a produtividade está agora crescendo mais rapidamente que o salário real”.

Nesse momento, há a inflexão no comportamento da taxa de emprego  $\dot{v}$ . Agora, ocorre novamente que  $\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) > \frac{1}{k}u$ . A pequena participação dos trabalhadores no produto estimula a acumulação de capital, e há o crescimento da demanda por trabalho. Por sua vez,  $\dot{u}$  mantém-se decrescendo, pois o crescimento do salário permanece abaixo da produtividade, ou seja,  $(\alpha + \gamma) > \rho v$ .

Com isso, a lucratividade é restaurada, bem como o crescimento, e retoma-se o incremento da ocupação dos trabalhadores, que avança em direção à  $\frac{\eta_2}{\theta_2} = \frac{\alpha + \gamma}{\rho}$ . Esse crescimento da ocupação vincula-se a um incremento na participação dos capitalistas no produto que atinge seu ponto máximo, que também é o ponto mínimo para a participação dos trabalhadores  $u_1$ . E, assim, o ciclo recomeça e segue indefinidamente.

<sup>29</sup> Por *profit squeeze*, que se traduz por compressão de lucros, entende-se a dificuldade em manter o mesmo montante de lucros obtidos no passado devido, no caso, ao aumento do custo da mão de obra.

Tomando-se agora os quatro pontos que definem o ciclo –  $(u_1, \frac{\eta_2}{\theta_2})$ ,  $(\frac{\eta_1}{\theta_1}, v_2)$ ,  $(u_2, \frac{\eta_2}{\theta_2})$  e  $(\frac{\eta_1}{\theta_1}, v_1)$  – pode-se afirmar que, entre  $(u_1, \frac{\eta_2}{\theta_2})$  e  $(\frac{\eta_1}{\theta_1}, v_2)$ , tem-se cooperação entre a presa ( $v$ , o emprego, ou, ainda, os capitalistas) e o predador ( $u$ , a participação dos trabalhadores no produto, ou, ainda, os trabalhadores). Entre  $(\frac{\eta_1}{\theta_1}, v_2)$  e  $(u_2, \frac{\eta_2}{\theta_2})$  existe uma relação de competição na qual prepondera o consumo da presa pelo predador (os trabalhadores aumentam sua participação na renda às expensas dos capitalistas). Já entre  $(u_2, \frac{\eta_2}{\theta_2})$  e  $(\frac{\eta_1}{\theta_1}, v_1)$ , não ocorre estritamente uma cooperação, entretanto, tanto o predador como a presa decrescem, e não há preponderância de um sobre o outro. Finalmente, entre  $(\frac{\eta_1}{\theta_1}, v_1)$  e  $(u_1, \frac{\eta_2}{\theta_2})$ , a competição é retomada; desta vez, a presa prepondera sobre o predador (os capitalistas aumentam sua participação no produto às expensas dos trabalhadores).

Segundo Goodwin (1967, p.58, nossa tradução)

O aumento da lucratividade carrega as sementes de sua própria destruição, pois engendra vigorosa expansão do produto e do emprego, destrói o exército de reserva e fortalece o poder de barganha dos trabalhadores. O inerente conflito e complementariedade entre trabalhadores e capitalistas são típicos de uma relação de simbiose.

Por fim, constata-se que tanto o produto como o emprego apresentarão taxas de crescimento alternadas. A taxa de crescimento do produto, dado o pressuposto do modelo de reinvestimento total dos lucros, aumenta à medida que ocorre a redução da participação dos trabalhadores no produto. Dessa forma, uma parcela maior do produto é reinvestida. Quando a situação se inverte e é menor a participação dos lucros no produto, a taxa de crescimento diminui, pois o montante a ser reinvestido é menor. O emprego segue o mesmo princípio, pois, devido ao crescimento da produtividade e da população, ele cresce com o crescimento do produto.

Se eles efetivamente irão decrescer ou meramente crescer a uma menor velocidade, dependerá da severidade do ciclo. Para ciclos suaves, a taxa de crescimento pode cair, mas nunca ficar negativa; em outros casos, pode ocorrer uma queda acentuada. Porém o crescimento deve predominar, já que a média temporal de  $1 - u$  é positiva e, assim, também

a média de  $\frac{\dot{Y}}{Y}$ . De modo semelhante, o emprego cresce no longo prazo à mesma taxa que a oferta de trabalho, uma vez que a média temporal de  $v$  é constante. De maneira análoga, a igualdade entre a taxa crescimento dos salários e o crescimento da produtividade segue da constância de  $u$ . Na medida em que no longo prazo,  $u$  é constante, a participação dos lucros no produto, que é igual a  $1 - u$ , também tende a ser constante (Goodwin 1967).

O progresso primeiro ocorre como lucro, mas lucros levam à expansão, e a expansão força o aumento dos salários e a queda dos lucros. [...] Isso se deve à tendência do capital, apesar de que não dos capitalistas, em se procriar excessivamente. Por contraste, o trabalho é algo como um bem de aluguel, uma vez que sua oferta, apesar de variável, parece não ser função dos salários. Consequentemente ele é o último beneficiário do progresso técnico. Até agora, poderá existir, eu suponho, considerável concordância que o que ocorreu na história é: taxas salariais subiram; taxas de lucro permaneceram baixas. É para essa explicação que este trabalho é dirigido (Goodwin, 1967, p.58, nossa tradução).

## 2.2 O MODELO DE GOODWIN: BASES TEÓRICAS.

O Modelo de Goodwin aborda a relação entre distribuição de renda e crescimento, e é um modelo heterodoxo no qual ecoam as influências do Modelo Harrod Domar. Ele reflete a heterogeneidade de influências recebidas por Goodwin ao longo de sua trajetória, especialmente as advindas de Marx, mas também de Keynes, Schumpeter e Harrod (Punzo, 2006).

Em particular, o modelo é considerado pela literatura como um modelo vinculado à tradição marxista, como demonstram as seguintes afirmações: “Uma clara inspiração marxista” (Aguiar-Conraria, (2007), tradução nossa), “[...] é uma das primeiras e mais elegantes formalizações dinâmicas da teoria de Marx de conflito distributivo[...].” (Veneziani; Mohun, 2006, p.438, tradução nossa). “O modelo é inspirado no marxismo e coloca a luta pela distribuição de renda no centro.” (Tarassow, 2010, p.3, tradução nossa).

Nesta seção, busca-se demonstrar que o Modelo de Goodwin pode ser concebido como uma proposta de formalização da dinâmica da acumulação de capital conforme

concebida por Karl Marx em sua obra **O Capital**, para o caso de composição orgânica constante. Entretanto esse modelo apresenta algumas ponderações que, de maneira sutil, o distanciam de ser apenas uma mera representação matemática da teoria marxista. Para tanto, parte-se da identificação explícita de seus elementos vinculados à análise de Marx para, a seguir, estabelecer-se até que ponto o modelo pode, ou não, ser descrito como marxista.

No artigo de 1967, Goodwin afirma sobre o modelo que apresenta: “Isto é, acredito, essencialmente o que Marx quer dizer sobre contradição do capitalismo e sua resolução transitória entre expansões e depressões” (Goodwin, 1967, p. 58, tradução nossa). Já o artigo de 1972 é mais explícito:

Desde seu surgimento, o capitalismo tem sido caracterizado pela alternância entre expansão e contração. Este artigo busca fornecer uma forma mais precisa a uma idéia de Marx – Esta [alternância] pode ser explicada pela interação dinâmica de lucros, salários e empregos (Goodwin, 1972, p. 442, tradução nossa).

Em sua análise sobre o Modelo de Goodwin, Harvie (2000, p.351 tradução nossa) afirma: “[...] Goodwin pega um modelo simples que Marx apresenta na primeira seção do capítulo 23 (A lei geral da Acumulação Capitalista) do volume 1 de **O Capital**”.

O capítulo XXIII de **O Capital** parte da abstração dos capitais individuais.

Neste capítulo, tratamos da influência que o crescimento do capital exerce sobre o destino da classe trabalhadora. Os fatores mais importantes nesta investigação são a composição do capital e as modificações que ela sofre no transcurso do processo de acumulação. A composição do capital tem de ser compreendida em duplo sentido. Da perspectiva do valor, ela é determinada pela proporção em que se reparte em capital constante ou valor dos meios de produção e capital variável ou valor da força de trabalho, soma global dos salários. Da perspectiva da matéria, como ela funciona no processo de produção, cada capital se reparte em meios de produção e força de trabalho viva; essa composição é determinada pela proporção entre, por um lado, a massa dos meios de produção utilizados e, por outro lado, o montante de trabalho exigido para seu emprego. Chamo a primeira de composição-valor e a segunda de composição técnica do capital. Entre ambas há estreita correlação. Para expressá-lá, chamo a composição-valor do capital, à medida que é determinada por sua composição técnica e espelha suas modificações, de: composição orgânica do capital. (Marx, 1984, p. 187).

Esse capítulo pode ser interpretado como que dividido em duas partes. Uma primeira descreve um caso particular de acumulação capitalista, no qual a composição do capital é constante. A segunda, que expressa o que na visão de Marx é o caso geral, apresenta a acumulação de capital com composição do capital crescente decorrente do decréscimo relativo da parte variável do capital.

O processo de acumulação de capital com composição do capital constante é descrito por Marx da seguinte maneira:

Crescimento do capital implica crescimento de sua parcela variável ou convertida em força de trabalho. Uma parcela da mais-valia transformada em capital adicional precisa ser sempre retransformada em capital variável ou fundo adicional de trabalho. Suponhamos que, além de mantidas constantes as demais circunstâncias, a composição do capital permaneça inalterada, ou seja, que determinada massa de meios de produção ou de capital constante requeira sempre a mesma massa de força de trabalho para ser posta em movimento, então cresce evidentemente a demanda de trabalho e o fundo de subsistência dos trabalhadores proporcionalmente ao capital e tanto mais rapidamente quanto mais rapidamente cresce o capital. [...] as necessidades da acumulação do capital podem superar o crescimento da força de trabalho ou do número de trabalhadores, a demanda de trabalhadores pode se tornar maior que a sua oferta e por isso os salários se elevam. [...] Como a cada ano mais trabalhadores são ocupados do que no anterior, mais cedo ou mais tarde tem de se chegar ao ponto em que as necessidades da acumulação começam a crescer além da oferta habitual de trabalho, em que, portanto, começa o aumento salarial (Marx, 1984 p. 188).

Conforme aponta Harvie (2000, p.351, tradução nossa),

Deve-se notar que a composição-valor constante do capital é consistente com o progresso tecnológico: tanto a massa de meios de produção como a massa de salários pode subir com incremento de produtividade; mas com o crescimento da produtividade o valor de uma dada massa de meios de produção ou de salários cai. Tudo o que é requerido, é que a razão entre estas duas quantidades permaneça constante.

Este processo acaba engendrando seu próprio limite, uma vez que o aumento do salário pode se dar desde que sua elevação não perturbe o processo de acumulação. Caso contrário,

A acumulação decresce. Mas com seu decréscimo desaparece a causa de seu decréscimo, ou seja, a desproporção entre capital e força de trabalho explorável. [...] O preço do trabalho cai novamente para um nível correspondente às necessidades de valorização do capital quer este nível esteja abaixo, acima ou igual ao que antes de surgir o crescimento adicional de salário era considerado como normal. [...] Para usar uma expressão matemática: a grandeza da acumulação é a variável independente; a grandeza do salário, a dependente, e não o contrário (Marx, 1984 p.192).

Na segunda parte do capítulo XXIII, a análise de Marx avança para a situação de acumulação intensificada, com aumento da produtividade do trabalho e redução relativa da parte variável do capital. Essa situação está vinculada aos processos de concentração de capital e de produção progressiva de um exército industrial de reserva, conduzindo à queda tendencial da taxa de lucro dos capitalistas e à pauperização do proletariado. A discussão

desse processo não é um objetivo deste trabalho, de forma que se retêm apenas as idéias que expressam os fundamentos do processo geral de acumulação de capital proposto por Marx.

Cotejando o que Marx afirma com o que o Modelo de Goodwin propõe, podem-se traçar com clareza os limites e as possibilidades das bases teóricas do modelo.

A vinculação fundamental entre o Modelo de Goodwin e Marx estabelece-se na relação entre distribuição de renda e acumulação de capital, ou crescimento. Marx afirma que

A lei da produção capitalista [...], redonda simplesmente nisso: a relação entre capital, acumulação e taxa de salário não é nada mais que a relação entre o trabalho não pago, transformado em capital [ou seja, participação do capital na renda, mais-valia ou lucro], e o trabalho adicional necessário à movimentação do capital adicional [o incremento do emprego] (Marx, 1984 p.192).

Harvie (2000, p.351, tradução nossa) ressalta, ainda, vínculos mais sutis entre Marx e Goodwin: “Composição constante de capital-valor é então equivalente à razão capital produto constante assumida por Goodwin”. E avança afirmando que: “Também deve ser notado que tanto o modelo cíclico de Marx, e, por extensão, o Modelo de Goodwin, não são inconsistentes nem dependentes da teoria do valor trabalho” (idem).

Em relação aos artigos de Goodwin observa-se que o original de 1967 é extremamente cuidadoso com as vinculações do modelo à teoria marxista, como pode ser visto nessas passagens:

Nessa forma, nós reconhecemos o modelo presa-predador de Volterra. [...] Há muito parece-me que o problema de Volterra da simbiose de duas populações, parcialmente hostis e parcialmente complementares, auxilia na compreensão da dinâmica contraditória do capitalismo, especialmente quando apresentada de **uma maneira mais ou menos marxista** (Goodwin, 1967, p.55 nossa tradução, grifo nosso).

Isto é [o comportamento do Modelo de Goodwin], [...] essencialmente o que Marx quer dizer com a contradição do capitalismo e sua resolução em expansões e contrações. É, entretanto, **não-marxista, ao afirmar que a lucratividade não é restaurada (necessariamente), pela queda dos salários reais, mas antes pela sua queda em relação ao crescimento da produtividade**. Salários reais devem cair em relação à produtividade; eles podem cair em termos absolutos também, dependendo da severidade do ciclo (Goodwin, 1967, p.58, nossa tradução, grifo nosso).

Por sua vez, a versão de 1972 do artigo (que se constitui no original de 1967 com alguns acréscimos) é politicamente mais engajada, pois busca vincular o modelo a questões tradicionais da esquerda, como se observa nessas passagens:

Isso [as participações na renda constantes no longo prazo do trabalho e do capital] sugere uma explicação do paradoxo de que todo sindicalista sente que pode, e certamente ele o faz, elevar os salários às expensas dos lucros, enquanto a evidência sugere que essa distribuição não mudou significativamente ao longo de um século de crescimento do poder sindical (Goodwin, 1972 p. 442 tradução nossa).

Ele [o Modelo de Goodwin] também auxilia a explicação, e em certa medida perdoa, a imbecilidade e a pusilanimidade da social-democracia (Goodwin, 1972, p. 442, tradução nossa).

Porém, mesmo nessa versão, Goodwin é parcimonioso ao vincular o modelo ao marxismo. Como apresentado na passagem citada abaixo, que demonstra uma crítica à ortodoxia marxista:

Esta [...] teoria sobre o capitalismo [o modelo] parece-me se ajustar à presente experiência da classe trabalhadora e às estratégias sindicais melhor que uma abordagem estritamente marxista. Assim, pode ajudar a explicar um pouco a falta de sucesso do marxismo nos sindicatos (Goodwin, 1972, p. 442, tradução nossa)

Assim pode-se chegar a algumas conclusões sobre as bases teóricas do Modelo de Goodwin, especialmente em termos de sua vinculação ao marxismo.<sup>30</sup>

O modelo, de fato, é inspirado no marxismo e trata da formalização do caso particular de acumulação capitalista no qual a composição do capital é constante. Porém a análise apresentada demonstra que afirmações como a de Veneziani e Mohun (2006, p.438, tradução nossa) de que o Modelo de Goodwin “[...] é uma das primeiras e mais elegantes formalizações dinâmicas da teoria de Marx de conflito distributivo[...]” devem ser vistas com cuidado.

Isso se deve ao fato de que a teoria de Marx sobre o conflito distributivo é mais ampla do que o caso da composição do capital constante. Marx aponta que as tendências de queda da taxa de lucro e de empobrecimento dos trabalhadores são determinantes para o comportamento do sistema capitalista no longo prazo.<sup>31</sup> Assim, o caso geral da acumulação capitalista pressupõe a acumulação variável. Logo, o Modelo de Goodwin possui uma clara

---

<sup>30</sup> Agradece-se ao Professor Eduardo Maldonado por indicar esse ponto quando da apresentação do projeto que baseia este trabalho.

<sup>31</sup> Um dos raros trabalhos em português tratando especificamente do Modelo de Goodwin é apresentado por Drumond (2010). Ele modifica o Modelo de Goodwin a fim de permitir a composição orgânica variável do capital. O modelo matemático apresentado por Drumond é semelhante ao apresentado por Shah e Desai (1981), que visa estudar efeitos de mudança técnica induzida sobre ciclos e crescimento econômico. O artigo de Shah e Desai é puramente teórico, estudando especialmente a estabilidade do ciclos econômicos obtidos e suas propriedades matemáticas, trabalhando com formas funcionais genéricas. Por sua vez, o trabalho de Drumond apresenta uma simulação numérica do modelo estendido, valendo-e de formas funcionais definidas, entretanto não analisando as propriedades dos ciclos obtidos.

limitação ao ser apresentado como formalização matemática do processo de acumulação do capital.<sup>32</sup>

Já sob a óptica do conflito distributivo, que pode ser denominado luta de classes (para ser mais fiel a Marx), Goodwin expressa, como demonstrado nas passagens acima, a consciência de que seu modelo não é a matematização de uma visão ortodoxa do pensamento de Marx.

Isso se torna mais claro na medida em que um modelo do tipo presa-predador pressupõe uma relação que é simultaneamente hostil e cooperativa (uma relação de simbiose), enquanto a abordagem marxista ortodoxa trata o conflito de classes como uma relação eminentemente antagônica entre as duas principais classes do capitalismo: burguesia e proletariado.

Samuelson (1972a, 1972b) e Solow (1990) consideram o sistema presa-predador estreitamente relacionado com a luta de classes, enfatizando que tal relação é eminentemente conflitiva. Samuelson (1972a) apresenta um sistema presa predador que, independentemente de condições do ambiente institucional, produz comportamentos cíclicos estruturalmente estáveis. Ele considera que a existência de uma relação presa predador entre trabalhadores e capitalistas é de natureza empírica, sendo eminentemente uma relação de conflito. Solow (1990), analisando especificamente o Modelo de Goodwin, constata a relação presa-predador entre capitalistas e trabalhadores, ressaltando que, neste modelo, os capitalistas são as presas.

Esses autores, que não são marxistas, compartilham uma visão muito rígida do conceito de luta de classes apresentado por Marx. Conforme discutido anteriormente, a relação presa-predador pressupõe uma sutileza em sua interpretação. A indução que os termos “presa” e “predador” permitem não deve ser exagerada.

Assim, sob essa perspectiva, a afirmação de Veneziani e Mohun (2006) de que o Modelo de Goodwin é uma formalização da teoria de Marx deve ser concebida nos termos de uma compreensão mais ampla do pensamento marxista. Essa compreensão vincula-se à percepção do fato de que o conflito de classes é tratado por Marx como um fenômeno histórico e dialético. Nesses termos, a relação de natureza simbiótica entre as classes proposta pelo Modelo de Goodwin ajusta-se a uma concepção mais aberta do pensamento de Marx.

O fato de que o Modelo de Goodwin apresenta instabilidade estrutural também se vincula a isso, na medida em que essa instabilidade reflete as contínuas mudanças estruturais a que a economia está sujeita ao longo de sua trajetória no tempo. O fato de que o modelo não

---

<sup>32</sup> Uma extensão do Modelo de Goodwin para uma economia de dois setores, alinhada com os esquemas de reprodução de Marx, pode ser vista em Sato (1984).

é estável quando submetido a perturbações vincula-se à perspectiva marxista de transitoriedade histórica dos arranjos sociais e econômicos das formações sociais (Veneziani; Mohun, 2006). Essas afirmações se ajustam adequadamente ao fato de que Goodwin sempre se considerou um marxista vitalício, porém desobediente (Desai; Ormerod, 1998).

Trata-se, no próximo capítulo, da questão da instabilidade estrutural do Modelo de Goodwin, bem como de seus tratamentos empíricos. Essa discussão retomará alguns dos elementos apresentados.

### 3. O MODELO DE GOODWIN – ANÁLISES E CONSIDERAÇÕES

Este capítulo apresenta as principais considerações encontradas na literatura sobre o Modelo de Goodwin. Segundo Veneziani (2001, p. 2, tradução nossa), o “[...] Modelo de Goodwin tem se provado extremamente frutífero em estimular uma vasta literatura[...]”. Harvie (2000, p.349-350, tradução nossa) afirma que:

Nas três décadas desde sua publicação, o modelo de ciclos de crescimento de inspiração marxista de Richard Goodwin tem atraído muito interesse. O apelo do modelo deve-se à sua simplicidade e ao fato de que é um ponto tradicional de partida para o desenvolvimento de modelos de ciclos mais complexos para a economia capitalista. Várias pesquisas têm-se focado em relaxar uma ou mais premissas do modelo original, ou adicionar variáveis para a criação de modelos mais genéricos e realísticos. Outros pesquisadores têm investigado minuciosamente a estabilidade e outras propriedades do modelo original[...]

Parte-se de uma sistematização que se orienta pelas linhas propostas por Harvie (2000). A literatura sobre o modelo é dividida em dois grandes grupos. O primeiro é composto por abordagens sobre as propriedades do modelo, em especial a questão da sua estabilidade, também focalizando alguns tratamentos que propõem modificações no mesmo. O segundo é constituído por aqueles que se propõem a abordar o Modelo de Goodwin do ponto de vista empírico.

Segundo Veneziani e Mohun (2006, p.438, tradução nossa), “Um grande número de autores tem explorado as propriedades normativas e positivas do modelo”. Já Choi informa que “Vários autores estenderam e modificaram o Modelo de Goodwin para considerar aspectos monetários ou financeiros [...], mudança técnica induzida [...] e possibilidade de comportamento caótico” (Choi, 1995, p. 224, tradução nossa). Por sua vez, Harvie indica que “Ocorreram poucas tentativas de avaliar o Modelo de Goodwin empiricamente, e menos tentativas ainda de ajustar o modelo a dados econométricos do mundo real[...]” (Harvie, 2000, p.350, tradução nossa).

Uma dificuldade a ser superada na análise é que, em alguns casos, a literatura analisa as propriedades e, simultaneamente, propõe modificações no modelo. Isso ocorre especialmente quando a análise aborda a estabilidade estrutural. A seguir esse ponto será abordado.

### 3.1 A INSTABILIDADE ESTRUTURAL E O MODELO DE GOODWIN

O Modelo de Goodwin possui a mesma estrutura matemática que o Sistema Lotka-Volterra. Logo, como apresentado na seção 2.1.2.3, a ausência da estabilidade estrutural é uma questão para esse modelo, sendo tema de vários debates (Pichardo, 2009).

Segundo Vercelli (1991, p. 43, tradução nossa) “[...] a visão recebida na economia tem sempre sido a de que um modelo estruturalmente instável é inútil para a análise econômica e deve ser rejeitado[...]”. Veneziani (2001, p.1, tradução nossa) compartilha essa opinião: “Na visão recebida, estabilidade estrutural representa um critério fundamental na construção de modelos”. E, em abordagem posterior, Veneziani e Mohun (2006, p.438, tradução nossa) acrescentam:

Ela [estabilidade estrutural] é considerada uma condição necessária para a observação e a previsibilidade de fenômenos científicos, e modelos estruturalmente instáveis são considerados tanto inerentemente incapazes de descrever uma regularidade empírica como inadequados para propósitos preditivos.

A presente seção está organizada em duas partes. Na primeira, discute-se o conceito de estabilidade estrutural em sua perspectiva metodológica na ciência econômica. Na segunda parte, avança-se para a discussão de seu impacto no Modelo de Goodwin.

#### 3.1.1 ESTABILIDADE ESTRUTURAL – QUESTÕES METODOLÓGICAS

Como já discutido, estabilidade estrutural vincula-se à persistência de um determinado comportamento qualitativo de um sistema dinâmico, sendo uma propriedade do próprio sistema. Ela incorpora a idéia de que se o sistema é ligeiramente perturbado, suas características qualitativas não se alteram.

Isso possui várias implicações para a construção de modelos dinâmicos, uma vez que:

A crença que bons modelos são aqueles que são estruturalmente estáveis, foi incorporada ao **dogma da estabilidade**, onde sistemas estruturalmente instáveis são considerados de alguma forma suspeitos (Gandolfo, 1997, p. 339, tradução nossa, grifo do autor).

Guckenheimer e Holmes reforçam esse ponto:

Esse dogma afirma que, devido a incertezas de medida, etc., um modelo de um sistema físico é válido somente se suas propriedades qualitativas não se modificam com perturbações. No caso de sistemas dinâmicos, isso significa que a estabilidade estrutural é imposta como uma restrição *a priori* aos bons modelos de fenômenos físicos (Guckenheimer; Holmes, 1986, p.259, tradução nossa, grifo do autor).

De um ponto de vista metodológico, Vercelli (1991, p.44 tradução nossa) apresenta uma extensa discussão sobre a questão, desafiando o dogma da estabilidade estrutural. Ele inicia afirmando que

Nós podemos considerar o conceito topológico [ou matemático como apresentado no capítulo anterior] de estabilidade estrutural como uma versão rigorosa de um conceito filosófico elaborado no final do século anterior [XIX].

Ele aponta que a trajetória do conceito de estabilidade estrutural apresenta três pontos de vista: o primeiro, denominado visão clássica, foi elaborado pelos pensadores gregos do período clássico; o segundo, denominado visão moderna, passou a ser construído no fim do renascimento, com a revolução científica e desenvolveu-se até o final do século XIX; e o terceiro, o ponto de vista heterodoxo, foi elaborado por Thom nos anos 60 do século XX (Vercelli, 1991)<sup>33</sup>.

O ponto de vista clássico estabelece uma distinção entre dois níveis hierarquizados – a realidade e o conhecimento – coordenados através dos conceitos de equilíbrio e estabilidade, sendo que o nível superficial se caracteriza pela mudança e pelo desequilíbrio, enquanto o nível mais profundo é marcado pela invariabilidade e pela estabilidade. O primeiro é o domínio da percepção e da opinião, que não podem aspirar à condição de saber universal. Já o segundo é o espaço das formas estruturalmente estáveis que são consideradas a essência das coisas. Somente através de referências a esse segundo nível, pode-se estabelecer consenso entre homens racionais (Vercelli, 1991).<sup>34</sup>

A visão moderna é derivada dessa visão clássica, porém apresenta duas mudanças. A primeira situa-se no fato de que o problema da mudança é reduzido à descrição ou à previsão somente da mudança quantitativa. A explicação científica reduz-se à descrição de causas

<sup>33</sup> O detalhamento dos conceitos de estabilidade estrutural sob os prismas histórico e filosófico podem ser vistos na elegante discussão apresentada por Vercelli (1991) nos apêndices do Capítulo 4.

<sup>34</sup> Vercelli ainda acrescenta: “A solução grega do problema da mudança teve grande impacto na história do pensamento ocidental, conectando o conceito de razão de uma maneira crucial com os conceitos de equilíbrio e estabilidade. Ainda é muito difícil emancipar nossas mentes dessas conexões umbilicais (Vercelli, 1991, p.45, tradução nossa).

(exógenas) eficientes, de forma que a estabilidade estrutural era um postulado implícito para qualquer investigação científica, sendo que, nessa perspectiva, os únicos objetos passíveis de análise científica eram as regularidades empíricas a serem explicadas por leis universais, as quais eram consideradas estruturalmente estáveis.

A segunda ocorre a partir da descoberta, na segunda metade do século XIX, de que a estabilidade da natureza não pode ser facilmente estabelecida, especialmente após a demonstração de Poincaré de que as provas da estabilidade do sistema solar eram inválidas e que o problema não poderia ser solucionado através de métodos quantitativos. Isso ocasionou o surgimento da mecânica qualitativa fundada em métodos topológicos, acarretando a formalização rigorosa do conceito de estabilidade estrutural (como apresentada no item 2.1.2.3).

A questão da estabilidade estrutural torna-se, assim, um problema. Esse desenvolvimento conduziu a discussões que argumentavam que o problema da estabilidade do sistema solar era insolúvel até mesmo por métodos qualitativos devido à sua instabilidade estrutural intrínseca. Essa abordagem gerou um grande debate na filosofia da ciência, sendo que a perspectiva hegemônica, nessa visão moderna, expressa por Popper e Duhem, era de que a estabilidade estrutural é condição necessária para a observação e a previsão do fenômeno científico (Vercelli, 1991).

A terceira visão surge com Thom (Thom, 1975), que aborda criticamente o conceito topológico de estabilidade estrutural. Essa visão rompe com o empiricismo e com o instrumentalismo da visão moderna, retomando elementos da visão clássica. A estabilidade estrutural é vista não como exigência para a observação e a previsão dos fenômenos, mas, sim, para sua inteligibilidade. Thom critica a instrumentalização do conceito de estabilidade estrutural, questionando a previsibilidade proporcionada por ele. Este autor reconhece que certo grau de estabilidade é condição necessária para a observação de fenômenos, mas isso é estritamente válido para ciências experimentais. Na visão de Thom, a razão fundamental para a defesa da estabilidade estrutural é a inteligibilidade, que é concebida como um isomorfismo entre a realidade estruturalmente estável e uma estrutura conceitual estável. A mudança estrutural é trazida ao centro da atenção científica, mas somente quando seu comportamento pode ser concebido como estruturalmente estável (Vercelli, 1991).

Essa breve descrição do conceito de estabilidade estrutural sob o ponto de vista metodológico fundamenta o dogma da estabilidade estrutural em sua visão moderna. Essa visão pode ser considerada hegemônica, apesar de se tratar de um conceito complexo, problemático e em evolução (Vercelli, 1991).

Existem três noções fundamentais que sustentam o conceito de instabilidade estrutural: a noção da equivalência de sistemas, a noção de topologia de sistemas e a noção de perturbações possíveis *a priori*. A escolha de uma noção ou outra como fundamento para a análise da estabilidade estrutural de um sistema depende de considerações que se relacionam com a natureza matemática do problema e com as características do problema ao qual se aplicam os instrumentos matemáticos (Veneziani; Mohun, 2006).

A argumentação contra a instabilidade estrutural baseia-se no fato de que é improvável observar-se a existência de estruturas instáveis dado que elas são transientes e efêmeras. Entretanto essa visão esbarra em fenômenos da biologia, da química, da física e mesmo da economia, levando à conclusão que não existem razões *a priori* para se considerarem sistemas estruturalmente instáveis como implausíveis ou difíceis de observar (Vercelli, 1991).

Isso tem acarretado uma visão crítica ao dogma da estabilidade estrutural, especialmente em uma ciência observacional como a economia, que trata de sistemas complexos caracterizados por mudança estrutural (Vercelli, 1991). Gandolfo aponta que:

Na economia, deve-se distinguir entre economia puramente teórica e aplicada. No campo puramente teórico, alguns autores têm negado que a estabilidade estrutural é uma necessidade [...] e apontado que os trabalhos de Marx, Schumpeter e Keynes, podem ser reinterpretados utilizando-se a noção geral de instabilidade estrutural. Mas a ênfase do *mainstream* dirigida a equilíbrios estáveis, acoplada ao fato de que nos modelos econômicos os valores dos parâmetros são ainda mais incertos que na física, encontra-se dirigida implicitamente a favor do dogma da estabilidade revisto, como formulado por Guckenheimer e Holmes (Gandolfo, 1997, p.340, tradução nossa grifo do autor).

Essa revisão é proposta nos seguintes termos por Guckenheimer e Holmes:

Assim o dogma da estabilidade pode ser reformulado para afirmar que as únicas propriedades do sistema dinâmico (ou uma família de sistemas dinâmicos), que são *fisicamente relevantes* são aquelas que se preservam quando o sistema é submetido a perturbações. A definição de relevância física claramente irá depender do problema específico. Isso é bastante diferente da afirmação original de que os únicos sistemas válidos são aqueles em que *todas* as propriedades qualitativas são preservadas pelas perturbações (Guckenheimer; Holmes, 1986, p. 259, tradução nossa, grifos do autor).

Veneziani e Mohun apontam nessa direção:

A prescrição metodológica de que um modelo estruturalmente instável deve ser rejeitado foi recentemente posta em questão. Por exemplo, na teoria econômica, a abordagem macroeconômica das expectativas racionais rejeitou o dogma da estabilidade [...], através da adoção de modelos caracterizados por pontos de sela

dinâmicos estruturalmente instáveis (Veneziani; Mohun, 2006, p.438, tradução nossa)

Vercelli, por sua vez, defende a ruptura com o dogma da estabilidade estrutural da seguinte maneira:

Observa-se que o clamor de que somente modelos estruturalmente estáveis são úteis na pesquisa empírica deve ser considerado injustificável. A visão recebida argumenta que somente modelos estruturalmente estáveis podem assegurar a observação e previsão de fenômenos empíricos. Entretanto a estabilidade estrutural não é uma condição necessária nem suficiente para tanto. [...] A prescrição metodológica de que um modelo deve ser estruturalmente estável é aceitável em sua versão estrita somente se a realidade descrita pelo modelo é estruturalmente estável (Vercelli, 1991, p.53-54, tradução nossa)

### 3.1.2 A INSTABILIDADE ESTRUTURAL NO MODELO DE GOODWIN

O Modelo de Goodwin apresenta como principal característica matemática a presença de instabilidade estrutural. Isso significa que pequenas perturbações no modelo ocasionam mudanças qualitativas, destruindo suas órbitas fechadas. Na maior parte da literatura, sobre o modelo isso é visto como seu principal defeito (Sportelli, 1995; Veneziani, 2001; Veneziani; Mohun, 2006). Diversas extensões do Modelo de Goodwin têm sido elaboradas a fim de eliminar essa característica (Veneziani; Mohun, 2006)<sup>35</sup>.

Veneziani (2001) aponta que, utilizando-se a definição de equivalência topológica, prova-se que o Modelo de Goodwin apresenta instabilidade estrutural associada a perturbações dos coeficientes do sistema de equações.

Isso pode ser demonstrado através da análise do jacobiano do sistema linearizado próximo ao equilíbrio. Inicia-se reescrevendo as equações (34) e (35), que constituem o modelo, em outros termos.

$$\dot{v} = \left\{ \left[ \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right] - \frac{1}{k}u \right\} v = \frac{dv}{dt} = P(v, u) \quad (34a)$$

$$\dot{u} = [ -(\alpha + \gamma) + \rho v ] u = \frac{du}{dt} = Q(v, u) \quad (35b)$$

<sup>35</sup> Veneziani e Mohun (2006) apresentam uma lista de exemplos de extensões para o Modelo de Goodwin concebidas para eliminar a instabilidade estrutural.

sendo que, no equilíbrio, tem-se  $v = v^* = \frac{(\alpha + \gamma)}{\rho}$  e  $u = u^* = 1 - k(\alpha + \beta)$ . Define-se a equação característica do sistema linearizado como  $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$ ,<sup>36</sup> com

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_v(v^*, u^*) & P_u(v^*, u^*) \\ Q_v(v^*, u^*) & Q_u(v^*, u^*) \end{vmatrix} \quad (53)$$

e

$$\sigma = P_v(v^*, u^*) + Q_u(v^*, u^*) \quad (54)$$

onde  $P_v$ ,  $P_u$ ,  $Q_v$  e  $Q_u$ , são derivadas parciais. Obtém-se assim  $P_v(v^*, u^*) = 0$ ,  $P_u(v^*, u^*) = -\frac{\alpha + \gamma}{\rho k}$ ,  $Q_u(v^*, u^*) = 0$  e  $Q_v(v^*, u^*) = (1 - k(\alpha + \beta))\rho$ .

Constata-se que o centro é um equilíbrio não hiperbólico, ou seja, o jacobiano possui raízes imaginárias com parte real igual a zero. Desse modo, uma pequena perturbação linear nos coeficientes converte o ponto de equilíbrio do centro de uma órbita em um foco estável ou instável (dependendo dos coeficientes resultantes) de um ciclo espiral, pois implica modificação das raízes da equação característica de puramente imaginárias para reais. Qualquer perturbação desse tipo destrói o retrato de fase do Modelo de Goodwin (Veneziani, 2001).

Entretanto algumas alterações de caráter infinitesimal não provocam instabilidade estrutural. Vellupilai (1979), Cugno e Montrucchio (Veneziani, 2001) provam a estabilidade estrutural do Modelo de Goodwin para perturbações na Curva de Phillips.

Resultados como os acima expostos refletem as ambiguidades inerentes ao conceito de estabilidade estrutural. Ao mesmo tempo, mostram a grande dificuldade em obter-se uma prova completamente satisfatória para a instabilidade estrutural do Modelo de Goodwin.

Velupillai (1979) aplica o teorema da estabilidade estrutural de Hirsch e Smale (1974) especificamente para o Modelo de Goodwin. Vellupilai conclui que ele não é estável, pois não cumpre as condições do teorema.<sup>37</sup> Entretanto a prova de Vellupilai é invalidada por

<sup>36</sup> Para uma descrição pormenorizada dos procedimentos de linearização e análise de equações características, ver Chiang (1984). Para a aplicação ao Modelo de Goodwin, ver Velupillai (1979).

<sup>37</sup> O teorema é apresentado na seção sobre estabilidade estrutural na página 22.

Flaschel (1984) e Desai *et. al.* (2004). Esses autores provam que não é possível aplicar o teorema de Hirsch e Smale ao Modelo de Goodwin (Veneziani, 2001).

Desai (1973), Flaschel (1984), Weibin (1991), Choi (1995) e Aguiar-Conraria (2007) apresentam provas alternativas que guardam em comum o objetivo de solucionar essa questão substituindo uma abordagem “[...] puramente formal e insuficiente como prova por raciocínio econômico simples” (Flaschel, 1984, p.63, tradução nossa).

Nessas abordagens o Modelo de Goodwin corresponde ao valor de bifurcação dos parâmetros de um modelo mais geral no qual o Modelo de Goodwin está incorporado, de maneira que, se os parâmetros são minimamente perturbados, a dinâmica do sistema muda radicalmente. (Veneziani, 2001, p.8, tradução nossa).

Esses trabalhos apresentam modelos envolvendo um conjunto maior de variáveis. Dessa forma Desai (1973) inclui inflação no Modelo de Goodwin, e Flaschel (1984), seguido por Weibin (1991), acrescenta a ilusão monetária. Choi (1995) inclui a hipótese do salário eficiência, e Aguiar-Conraria (2007) inclui a tecnologia flexível e o crescimento endógeno da produtividade. Em todos esses estudos o Modelo de Goodwin em sua formulação original corresponde a um ponto de bifurcação dos parâmetros do modelo entendido. Ou seja, uma perturbação nos parâmetros converte o modelo entendido no de Goodwin. Essas perturbações nos parâmetros acarretam mudanças qualitativas nos retratos de fase do sistema.

Esse tipo de tratamento baseia-se no fato de que o conceito de bifurcação é próximo ao de estabilidade estrutural. Em um ponto de bifurcação, um sistema modifica seu tipo de movimento, o que leva à alteração de seu retrato de fase.

Mohun e Veneziani (2006) criticam essas abordagens devido à sua falta de clareza metodológica. Esses autores pontuam que falta uma prescrição clara dos tipos de extensão permitidos na construção dos modelos. Assim, através da escolha de uma generalização adequada, a instabilidade estrutural de qualquer modelo pode ser comprovada. Segundo esses autores tais modelos são “[...] intuitivamente interessantes, mas com uma fundação metodológica pouco clara. [...] não é claro se esse tipo de argumento pode discriminar modelos estáveis de modelos instáveis” (Veneziani; Mohun, 2006, p. 442, tradução nossa).

Uma terceira linha de tratamento da questão da instabilidade estrutural do Modelo de Goodwin é provida pela teoria dos jogos. Essa abordagem propõe a análise da interação dos agentes, no caso das duas classes envolvidas: capitalistas e trabalhadores. Dessa maneira, efetua-se uma abordagem análoga aos modelos de expectativas racionais. Desse modo, é argumentado que a instabilidade estrutural do Modelo de Goodwin não é um problema, uma

vez que as condições que os agentes escolhem são aquelas caracterizadas por ele sem perturbações (Veneziani, 2001).

Balducci, Candela e Ricci (1984) apresentam um modelo de trabalhadores sindicalizados e capitalistas organizados. Neste, os trabalhadores determinam a intensidade de sua demanda de salários (declividade da Curva de Phillips), e os capitalistas escolhem o percentual dos lucros a serem investidos (flexibiliza-se o pressuposto do investimento de todos os lucros). O resultado obtido é que o Modelo de Goodwin corresponde a um equilíbrio de Nash não cooperativo, no qual as estratégias dos agentes correspondem aos parâmetros de Goodwin.

Outro trabalho na mesma linha é o de Mehrling (1986). O autor integra o Modelo de Goodwin com a modelagem de Lancaster, na qual o capitalismo é um jogo em que os trabalhadores escolhem o nível de salário, e os capitalistas, o nível de investimento. O objetivo dos trabalhadores é a maximização do valor presente do seu consumo, enquanto os capitalistas maximizam o valor presente de seus lucros. A análise de Merhling apresenta o Modelo de Goodwin como o equilíbrio do jogo quando ambas as classes são desorganizadas.

Veneziani (2001) critica esses tratamentos. No caso de Balducci, Candela e Ricci, a análise matemática das condições de equilíbrio do jogo indica que os parâmetros de Goodwin são basicamente assumidos, sendo que o resultado de equilíbrio não é garantido. Por sua vez, o tratamento de Merhling sofre de uma contradição. Ambas as classes possuem incentivos para se organizarem e abandonarem o comportamento atomístico, pois, se os trabalhadores são desorganizados, os capitalistas podem melhorar suas condições se coordenarem suas ações (o mesmo vale para os trabalhadores). Assim, o Modelo de Goodwin não emerge como solução de equilíbrio para o comportamento racional dos agentes.

Esses resultados indicam que não é possível argumentar que a instabilidade estrutural é irrelevante porque os agentes escolhem os parâmetros do Modelo de Goodwin. Assim, não se pode fugir dessa questão metodológica. As questões apresentadas não negam a presença de instabilidade estrutural no Modelo de Goodwin, entretanto indicam que o conceito é de difícil formalização e levantam dúvidas em relação à rejeição *a priori* de modelos estruturalmente instáveis (Veneziani, 2001).

Veneziani e Mohun (2006) elencam um conjunto de artigos que apresentam propostas de modificações do Modelo de Goodwin para eliminar a presença da instabilidade estrutural. Essas modificações consistem na inclusão de novas variáveis como, por exemplo, demanda efetiva, ação de preços de *mark-up*, progresso técnico induzido, salários monetários, inclusão de *time-lag* na equação de barganha dos salários, adição de função investimento com

expectativas de lucro, dentre outras.<sup>38</sup> Em geral, esses tratamentos estabelecem o modelo e estudam suas propriedades de equilíbrio e de estabilidade.<sup>39</sup>

Porém, partindo da abordagem de Vercelli (1991), Veneziani (2001) e, posteriormente, Veneziani e Mohun (2006) defendem que o Modelo de Goodwin representa uma formalização mais satisfatória do conflito distributivo do que os modelos estruturalmente estáveis. Isso ocorre tanto do ponto de vista das características da teoria que o modelo formaliza como dos traços básicos do fenômeno investigado.

Sob o aspecto da teoria que o modelo busca formalizar, observa-se que modelos com estabilidade estrutural implicam uma perspectiva reducionista, ou mesmo mecanicista, da teoria de Marx (Veneziani; Mohun, 2006). O resultado de Samuelson (1972a, p.473, tradução nossa), que apresenta a obtenção de “[...] um mecanismo cíclico fundamental que pode operar quase independentemente do ambiente institucional”, é um exemplo disso.

Dessa forma, sob uma perspectiva dialética, a teoria marxista considera o conflito de classes como elemento inerente às sociedades capitalistas. Porém

[...] a estrutura dessa contradição tende a mudar ao longo do tempo, devido a forças endógenas que modificam a balança de poder entre as classes e a própria estrutura do processo de barganha salarial. A instabilidade estrutural do Modelo de Goodwin deve ser interpretada como que refletindo essas forças, enquanto modelos estruturalmente estáveis implicam uma interpretação muito estreita da teoria de Marx. (Veneziani, 2001, p. 12, tradução nossa).

Nessa perspectiva, Veneziani e Mohun (2006) consideram que a análise do capitalismo efetuada por Marx se baseia nas noções de instabilidade estrutural e de mudança estrutural. O conflito de classes ocorre de maneira descontínua.

O Modelo de Goodwin pode ser visto como um retrato estilizado das forças básicas internas ao conflito de classe, no qual sua instabilidade estrutural reflete a fragilidade da estrutura do mecanismo simbiótico que regula o conflito distributivo. (Veneziani; Mohun, 2006, p. 445, tradução nossa).

Em uma apreciação geral dessas discussões, pode-se concluir que a literatura sobre o Modelo de Goodwin divide-se em dois grandes grupos. O primeiro identifica a instabilidade estrutural como um problema grave do modelo e objetiva superá-lo através de modificações na estrutura do mesmo. Esse grupo pode ser vinculado ao dogma da estabilidade estrutural.

<sup>38</sup> Os principais exemplos são Desai (1973), Shah e Desai (1981), Wofstetter (1982), van der Ploeg (1983), Sato (1985) e Sportelli (1995). Uma relação ampla pode ser vista em Veneziani e Mohun (2006). Para um exemplo no qual o Modelo de Goodwin é modificado para assegurar uma dinâmica caótica, ver Pohjola (1981).

<sup>39</sup> Foge do escopo deste trabalho efetuar a análise dos diversos modelos de Goodwin modificados.

O segundo grupo está ligado a uma interpretação mais aberta do Modelo de Goodwin, que considera a instabilidade estrutural como elemento inerente a uma interpretação dialética e não mecanicista da teoria marxista.

Entretanto o mérito de cada uma dessas visões somente pode ser adequadamente estabelecido a partir da evidência empírica. Na seção seguinte, os tratamentos empíricos do Modelo de Goodwin são abordados.

### **3.2 O TRATAMENTO EMPÍRICO DO MODELO DE GOODWIN.**

O Modelo de Goodwin apresenta uma quantidade de artigos empíricos inferior à de estudos teóricos. Poucas tentativas de abordagem empírica do modelo foram efetuadas (Harvie, 2000; Veneziani; Mohun, 2006, Tarassow, 2010). Esta seção abordará os tratamentos empíricos do Modelo de Goodwin em uma perspectiva cronológica.

O primeiro artigo a ser discutido é o Atkinson (1969). Esse artigo visa demonstrar “[...] como a análise da escala temporal de um modelo pode gerar valiosa informação adicional [...]” (Atkinson, 1969, p.137, tradução nossa). O autor discute a escala temporal de três modelos, sendo que o terceiro a ser abordado é o Modelo de Goodwin. Os outros modelos discutidos não interessam ao tema em discussão.

Esse trabalho não se constitui propriamente em um tratamento empírico do Modelo de Goodwin. O interesse do autor é o de “[...] examinar o período dos ciclos gerados por esse modelo” (Atkinson, 1969, p.137, tradução nossa). Segundo Atkinson (1969, p.149, tradução nossa), “[...] a relevância do Modelo de Goodwin como uma explicação deste fenômeno [flutuações cíclicas] depende muito do período do ciclo que o modelo possivelmente irá gerar”.

Assim, o objetivo não é determinar a trajetória das variáveis  $u$  e  $v$  ao longo do tempo para uma dada economia. O autor busca, a partir dos parâmetros e dos valores de equilíbrio do sistema de equações, determinar o período do ciclo de flutuação da economia. A abordagem que Atkinson (1969) adota para o Modelo de Goodwin é complexa, pois implica algumas modificações de variáveis. Ele trabalha com a participação dos lucros no produto, com uma Curva de Philips sem definição de forma funcional específica e com o nível de desemprego. Recordar-se que o Modelo de Goodwin é definido em termos da participação do

trabalho no produto, assume uma forma linear para a Curva de Phillips e utiliza o nível de emprego.

Na abordagem tradicional do citado modelo, o cálculo do período é efetuado a partir de uma linearização ao redor do ponto de equilíbrio do sistema. Atkinson define o período do ciclo do Modelo de Goodwin como:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(1-v^*)(-P')\left(\frac{s}{k} - (\alpha + \beta)\right)}} \quad (55)$$

O resultado de Atkinson é uma generalização para o cálculo do período do Modelo de Goodwin. Isso pode ser demonstrado como segue. Considera-se o desemprego como  $v^*$ , e o desemprego de equilíbrio como  $v^*$ .  $(1-v^*)$  é equivalente ao nível de emprego de equilíbrio  $v^* = \frac{(\alpha + \gamma)}{\rho}$ . Já  $-P'$  é a derivada da Curva de Phillips<sup>40</sup>. Por sua vez, a derivada da Curva de Phillips adotada por Goodwin é  $\rho$ . Assim,  $(1-v^*)(-P') = \frac{(\alpha + \gamma)}{\rho} \rho = (\alpha + \gamma)$ .

Já o termo  $\frac{s}{k}$  apresenta o parâmetro  $s$ , que é uma estimativa para a taxa de poupança dos capitalistas, buscando fugir da premissa de Goodwin de que todos os lucros são poupados e reinvestidos. Considera-se  $s = 1$ ,  $\frac{s}{k} - (\alpha + \beta) = \frac{1}{k} - (\alpha + \beta)$ . Assim, confirma-se que o cálculo do período efetuado por Atkinson é uma generalização do período do Modelo de Goodwin.

Estabelecida a expressão para o cálculo do período de oscilação em (55), Atkinson (1969) efetua duas simulações: uma utilizando sua versão modificada, na qual os capitalistas poupam, e outra que segue a prescrição de Goodwin, na qual todos os lucros são investidos. Os parâmetros utilizados são considerados por Atkinson (1969) estimativas plausíveis para economias desenvolvidas (o tempo é considerado em anos): relação capital produto  $k = 3,2$ ,

<sup>40</sup> Observa-se que como Atkinson utiliza o desemprego como variável, a Curva de Phillips que é adotada possui declividade invertida em relação à utilizada no Modelo de Goodwin, o que explica o sinal negativo da primeira derivada  $-P'$ .

proporção dos lucros poupados de 40% ( $s=0,4$ , nível de desemprego de equilíbrio  $u^* = 0,03$ , a soma da taxa de crescimento da produtividade e da população é  $(\alpha + \beta) = 0,04$ ).

Os resultados podem ser vistos nas Tabelas 1 e 2, sendo que, na Tabela 1, o cálculo é efetuado no Modelo de Goodwin modificado, com uma parte dos lucros poupados, e na, Tabela 2, o calculo é feito no Modelo de Goodwin sem modificações (todos os lucros são reinvestidos).

Tabela 1 – Período para as declividades da Curva real de Phillips (modelo modificado)

$-P'$	ANOS
1	21,9
2	15,5
3	12,7
4	10,9
5	9,8

FONTE: Atkinson, A. B., The timescale of economic models: how long is the long run? **The review of economic studies**. V.36 n.2, abril, 1969, p.137-152.

Tabela 2 – Período para as declividades da Curva real de Phillips (modelo sem modificações)

$-P'$	ANOS
1	9,5
2	6,7
3	5,5
4	4,7
5	4,2

FONTE: Atkinson, A. B., The timescale of economic models: how long is the long run? **The review of economic studies**. V.36 n.2, abril, 1969, p.137-152.

Atkinson conclui seu artigo afirmando que a comparação das duas simulações sinaliza que os períodos para os ciclos do Modelo de Goodwin devem apresentar valores superiores aos da Tabela 1, dadas as restrições do modelo original. Esse autor advoga a inclusão de mais parâmetros no modelo, citando explicitamente a depreciação e fazendo restrições aos pressupostos comportamentais de capitalistas e trabalhadores; segundo ele, tanto os primeiros como os segundos poupam. Entretanto Atkinson reconhece que a expressão do período é uma expansão linear ao redor do equilíbrio, devendo ser aproximadamente válida para pequenos

desvios. Por fim, sua opinião é a de que o Modelo de Goodwin é mais adequado para a explicação de ciclos de Kuznets<sup>41</sup> do que para os ciclos de negócios que caracterizam o pós-guerra (Atkinson, 1969).

O primeiro artigo a apresentar um tratamento empírico do Modelo de Goodwin foi o de Desai (1984). Esse trabalho foi o primeiro a testar o comportamento do Modelo de Goodwin a partir de uma perspectiva econométrica. O objetivo de Desai é discutir a trajetória da participação dos salários no produto e do emprego para a economia do Reino Unido ao longo do período que vai de 1855 até 1965, valendo-se de uma generalização do Modelo de Goodwin.

O autor utiliza a série de dados do período para o Reino Unido no período, fornecida por Feinstein (1972). Esses dados são médias quinquenais para a participação dos salários no PIB e para a taxa de desemprego. Os dados são apresentados na Tabela 3 e na Figura 5.

Desai (1984) aponta que, de um ponto de vista econométrico, o fato de o Modelo de Goodwin apresentar instabilidade estrutural implica efetuar-se um teste para restrições iguais a zero nos parâmetros das equações que o compõem. Restrições iguais a zero nos parâmetros indicam que estes não sofrem perturbações. Desse modo, assegura-se a preservação do retrato de fase do sistema. Como visto anteriormente, perturbações nos parâmetros do modelo acarretam instabilidade estrutural. Se os dados não rejeitarem as restrições iguais a zero, podem-se estimar os parâmetros para gerar previsões do período do ciclo estimado pelo modelo usando a equação (52).

Para efetuar-se o teste, Desai (1984) afirma que o mais indicado é utilizar-se uma versão generalizada do Modelo de Goodwin, apresentada em Desai (1973), acrescida de termos de erro.<sup>42</sup> Desai define o Modelo de Goodwin como um modelo fechado, não-linear e dinâmico, apontando que isto implica questões para a estimativa econométrica.

Se ele não fosse fechado, os parâmetros do modelo poderiam ser estimados por métodos de máxima verossimilhança não-lineares. Se não fosse não-linear, então poderia ser semelhante aos modelos bivariados de tipo Box-Jenkins (Desai, 1984, 257, tradução nossa).

---

<sup>41</sup> Ciclos de Kuznets são ciclos econômicos de médio prazo (entre 10 e 25 anos), descritos na década de 30 por Simon Kuznets. Geralmente são interpretados como ciclos de movimento demográfico ou de investimento em infraestrutura. Para uma apresentação, ver Solomou (1990).

<sup>42</sup> Desai (1984) aponta que a investigação econométrica indica a introdução de termos estocásticos nas equações. Assim, em uma especificação econométrica, a instabilidade estrutural do modelo torna-se uma certeza, uma vez que a probabilidade de certos parâmetros serem exatamente iguais a zero é desprezível. Entretanto uma especificação estocástica completa conduz à área dos processos de Ito, o que o autor considera indesejável. Desse modo, o método utilizado consiste em utilizar a versão estendida do modelo adicionando termos de erro.

Tabela 3 – A participação do salário no PIB e o desemprego no Reino Unido 1855-1965

PERÍODOS	PARTICIPAÇÃO DO SALÁRIO NO PIB (%)	DESEMPREGO (%)
1855-59	50,52	4,20
1860-64	48,62	3,62
1865-69	48,72	4,66
1870-74	48,28	1,78
1875-79	51,28	5,38
1880-84	51,90	4,34
1885-89	52,38	6,82
1890-94	55,34	5,26
1895-99	53,82	3,44
1900-04	54,78	4,10
1905-09	54,16	5,56
1910-04	55,34	3,28
1915-19	62,62	1,26
1920-24	63,74	7,68
1925-29	61,40	7,66
1930-34	62,48	13,58
1935-39	61,76	8,66
1940-44	65,06	1,16
1945-49	66,38	1,26
1950-54	66,58	1,34
1955-59	67,74	1,44
1960-64	67,88	1,68

FONTE: Desai, M. An econometric model of the share of wage in national income: UK 1855-1965. In: Goodwin R., Vercelli, A. Kruger, M. (Eds) **Nonlinear Models of Fluctuating Growth**. Springer-Verlag: Berlin, 1984. p. 253-277.

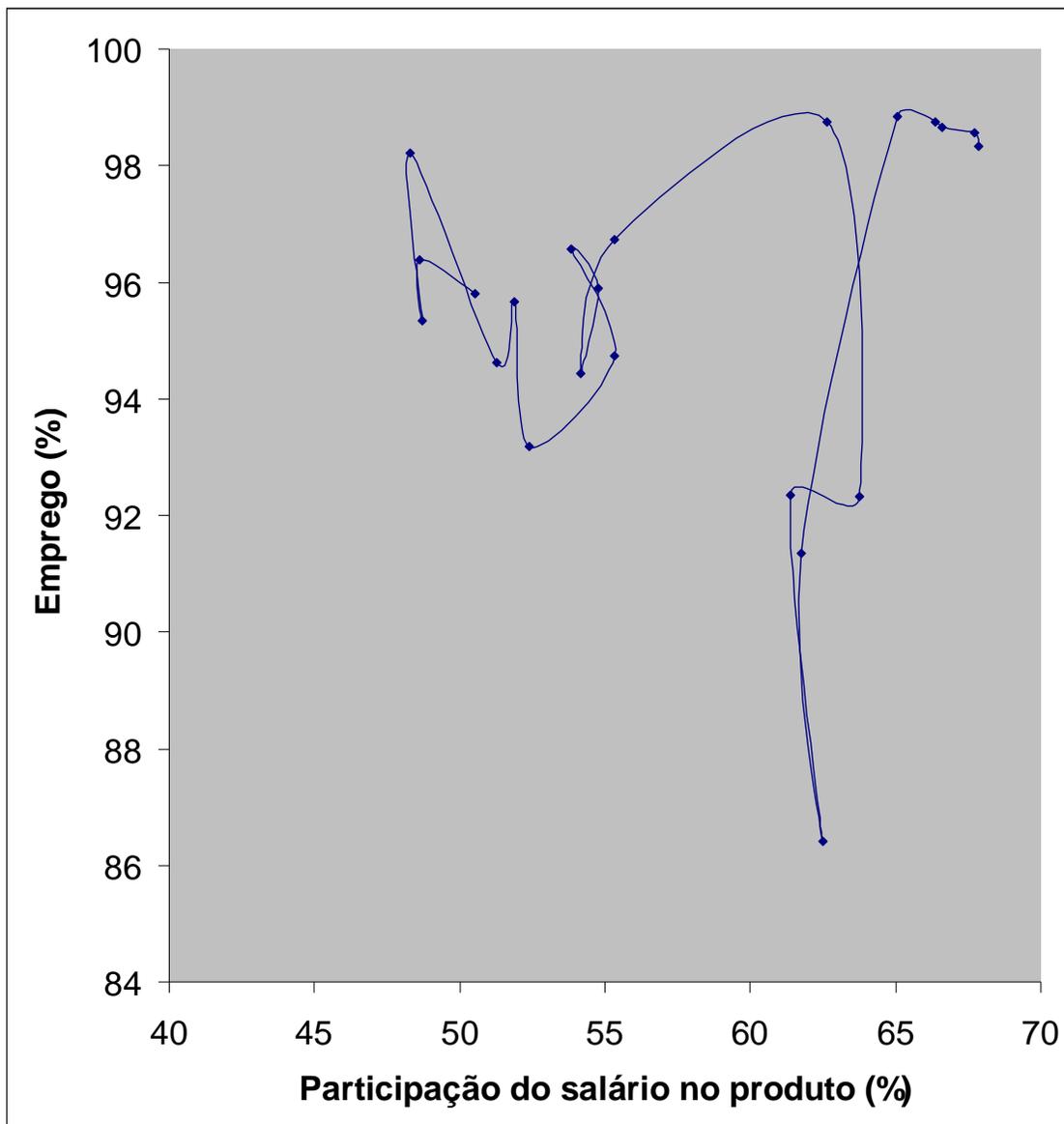


Figura 5: Emprego versus participação do salário no produto

FONTE: Desai, M. An econometric model of the share of wage in national income: UK 1855-1965. In: Goodwin R., Vercelli, A. Kruger, M. (Eds) **Nonlinear Models of Fluctuating Growth**. Springer-Verlag: Berlin, 1984. p. 253-277.

Acrescente-se a isso o fato de que, sendo o modelo fechado, não existem variáveis exógenas (exceto a tendência temporal implícita). Essa ausência implica que somente existem variáveis endógenas defasadas como instrumentos. Sua admissibilidade depende da ausência de processos de vetores autorregressivo nos termos de erro. Entretanto, se as restrições zero do Modelo de Goodwin são aceitas, o sistema somente gerará curvas fechadas se os termos de erro se comportarem de modo a autocorrigirem seu comportamento para manterem as variáveis próximas à sua trajetória determinística, ou seja, se forem vetores autorregressivos.

Essa contradição só pode ser superada, segundo Desai (1984), ignorando-se esse problema ou modificando-se o modelo para incorporar fatores exógenos. O autor não apresenta uma solução e aparentemente opta por ignorar essa questão.

A generalização do Modelo de Goodwin proposta por Desai (1973; 1984) é bastante extensa, sendo composta por cinco equações. Como o objetivo aqui é discutir o Modelo de Goodwin original, não será apresentado ou discutido o Modelo de Desai. Apenas se irá avaliar o teste que Desai efetua, verificando-se se seu modelo generalizado colapsa no Modelo de Goodwin. Para tanto, reproduz-se abaixo as equações fundamentais apresentadas por Desai (1984).

$$\Delta \ln e_t = -\gamma + \rho v_t + \eta \Delta \ln p_{rt}^e + \varepsilon_{1t} \quad (56)$$

$$\Delta \ln p_{rt}^e = \lambda \Delta \ln p_{rt} + (1 - \lambda) \Delta \ln p_{rt-1}^e + \varepsilon_{2t} \quad (57)$$

$$\ln k_t = \ln k^* - \mu \ln v_t + \varepsilon_{3t} \quad (58).$$

As equações (56), (57) e (58), são de diferença, uma aproximação de equações diferenciais. Elas são formas genéricas nas quais está contido o Modelo de Goodwin. Ou seja, dadas algumas restrições impostas a essas equações, elas colapsam no Modelo de Goodwin.

Tomando-se a equação (56), constata-se que ela não relaciona diretamente salário, mas, sim, os ganhos monetários dos trabalhadores. Isso se deve ao fato de que o Modelo de Goodwin considera que os salários são reais (não monetários), e os dados são eminentemente

monetários. Assim, a equação (56) visa generalizar a equação (31), que é  $\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v$ . Os termos  $\Delta \ln e_t$  e  $\eta \Delta \ln p_{rt}^e$  objetivam relacionar o ganho monetário dos trabalhadores com a ilusão monetária (expectativa do comportamento dos preços dos artigos de consumo) em um modelo de comportamento como o proposto por Goodwin.

Na equação (57), os preços esperados dizem respeito à inflação observada, em um esquema de expectativas adaptativas. A equação (58) apresenta um relaxamento da condição imposta por Goodwin de uma relação capital-produto fixa e a expressa como uma função do nível de emprego.

Caso  $\eta = 1$ ,  $\lambda = 1$  e  $\mu = 0$ , as equações (56), (57) e (58) ajustam-se aos parâmetros propostos por Goodwin. Essas são as hipóteses que Desai formula para a validação empírica do Modelo de Goodwin.

Desai procede da seguinte forma. Primeiramente, efetua uma análise qualitativa dos dados. Nessa análise, ele identifica que o período que vai até a I Guerra Mundial se assemelha ao Modelo de Goodwin, apresentando, entretanto, um movimento constante de aumento da participação do salário na renda nacional ( $u$ ). O período entre guerras mostra pequena variação de  $u$ , porém muita variação no emprego ( $v$ ). O pós-guerra retoma o crescimento de  $u$  com pequena variação de  $v$ . A partir dessa análise, Desai divide a amostra em quatro sub-períodos: século XIX, século XX, período entre guerras e período pós-guerra. Ele efetua as regressões para esses quatro períodos e para a amostra inteira.

A partir dessas considerações, Desai realiza as estimativas através de mínimos quadrados ordinários e ALS para identificar possíveis processos autorregressivos de primeira ordem nos erros. Todos os dados necessários aos cálculos (ganhos monetários e preços) são obtidos em Feinstein (1972).

A discussão completa das regressões encontra-se em Desai (1984) e não será apresentada aqui. Para os propósitos deste trabalho, basta considerar-se que Desai rejeita a hipótese  $\mu = 0$  para todas as amostras. Em todas elas, quando  $\eta = 1$  é aceito,  $\lambda = 1$  é rejeitado e vice-versa.

Acerca do Modelo de Goodwin, Desai (1984) conclui que a estimativa econométrica é viável, desde que se aceitem variáveis endógenas como instrumentos e sejam efetuados alguns pressupostos sobre os erros. Afirma que o modelo é extremamente informativo do ponto de vista qualitativo. Entretanto, considerando os resultados obtidos para  $\mu$ ,  $\eta$  e  $\lambda$ , existe a indicação da ocorrência de erros de especificação. Desai (1984) sinaliza a necessidade de incorporação de mais variáveis ao modelo.

Solow (1990) apresenta uma apreciação empírica do Modelo de Goodwin na qual afirma que “A moda atual por testes econométricos inexpressivos, convertida em epidemia pelo computador pessoal é, em minha visão, uma perversão que prejudica tanto a teoria econômica como a econometria” (Solow, 1990, p.39, tradução nossa).

A partir dessa perspectiva crítica, Solow (1990) expressa os objetivos de sua análise.

O verdadeiro teste de um modelo simples é se ele nos ajuda a compreender a realidade. Uma razoável correspondência com os fatos é, sem dúvida, uma condição necessária para um modelo ser útil na interpretação do mundo. Porém o tipo usual de equações de ajuste ou vetores autorregressivos, acompanhados de inapropriados

testes mecânicos de significância, não parece oferecer qualquer orientação. Assim, eu irei ao extremo oposto, ao oferecer uma comparação mais crua com os dados. Eu não aprovo isso também. Porém minha intenção não é oferecer um teste do modelo, é, isto sim, verificar se ele pertence a algum nicho. (Solow, 1990, p.39, tradução nossa).

Para efetuar essa análise, Solow utiliza dados anuais da participação do salário no produto ( $u$ ) e do nível de emprego ( $v$ ) para o setor privado não agrícola da economia norte-americana no período de 1947 até 1986. Os dados são reproduzidos na Figura 6.

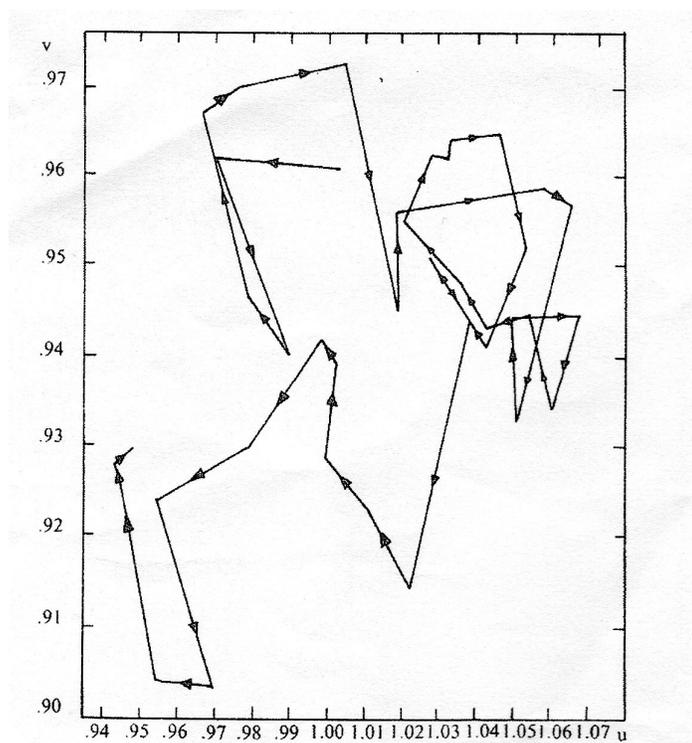


Figura 6: Participação do salário no produto ( $u$ ) e do nível de emprego ( $v$ ), para o setor privado não-agrícola da economia norte-americana.

FONTE: Solow, R. Goodwin's Growth cycle: reminiscence and rumination. In: Velupillai, K. (ed.) **Nonlinear and multisectoral macrodynamics**. Macmillan: London. 1990.

NOTA: Dados em percentuais

O autor identifica três episódios separados com sugestão de movimentos cíclicos como os indicados pelo Modelo de Goodwin. Esses episódios são distantes entre si, o que, segundo Solow, indica que o Modelo de Goodwin não é o único mecanismo governando a relação entre a participação do salário no produto e o emprego. Ele ainda assinala que vale notar a presença de indícios de um movimento de longa duração; entretanto um ciclo não é um movimento periódico.

Finalmente, o autor ainda afirma que talvez a economia norte-americana não seja a melhor opção para o teste do Modelo de Goodwin, uma vez que existem indicações de que a

economia dos EUA possui uma Curva de Phillips dada por salários nominais, enquanto na maioria dos países europeus ela é vinculada aos salários reais.<sup>43</sup>

Em uma apreciação geral, Solow (1990, p. 38, tradução nossa) afirma que: “Meu sentimento é que o modelo captura algo real. Ao menos posso me recordar de episódios que parecem configurar-se nestes padrões. Creio que isso é tudo que pode e deve ser dito sobre um pequeno modelo.”

Apesar do que Solow (1990) afirma, o tratamento empírico mais comum para o Modelo de Goodwin é o efetuado com dados da economia norte-americana, tanto por sua disponibilidade como pelo fato de tratar-se do mercado de trabalho mais flexível. Tarassow (2010) fez a revisão dos principais tratamentos empíricos do Modelo de Goodwin para os EUA.

As aplicações do Modelo de Goodwin para a economia dos EUA foram feitas por Goldstein (1999), Harvie (2000), Barbosa Filho e Taylor (2006) e Tarrasow (2010).<sup>44</sup> Neste ponto, analisam-se esses tratamentos em conjunto, postergando-se a discussão sobre o trabalho de Harvie, dadas suas especificidades.

Goldstein (1999) parte da taxa de desemprego. A participação dos lucros na renda é dada pelo quociente entre os lucros antes dos impostos – mais a avaliação do estoque e consumo de capital ajustados – e a renda nacional. O modelo é estimado em um sistema VAR bivariado, incluindo a taxa de desemprego e a participação do lucro na renda nacional, no período entre 1949:1 e 1995:4 (os dados são quadrimestrais).

Entretanto essa construção acaba não sendo exatamente fidedigna ao Modelo de Goodwin. “[...] esta abordagem do ciclo pode ser interpretada como uma variante linear do modelo de interação presa predador, e assim relacionada com o trabalho seminal de Goodwin” (Goldstein, 1999, p.140).

Para os propósitos deste trabalho, basta assinalar-se que Goldstein apresenta em seus resultados a indicação de que o crescimento do emprego conduz à queda da participação do lucro no produto, nos termos indicados no Modelo de Goodwin. Cabe ressaltar-se que esse estudo não se vale do Modelo de Goodwin propriamente, não se deparando com questões como período de duração do ciclo e instabilidade estrutural. Entretanto estabelece uma correlação em termos de relação presa-predador entre uma variável de capacidade (o

---

<sup>43</sup> Em economias com uma Curva Phillips de salários nominais, a participação do salário no produto está mais sujeita à resposta dos preços nominais, a alterações de oferta, de demanda e do comportamento cíclico da produtividade (Solow, 1990).

<sup>44</sup> Para a economia norte-americana existe ainda o trabalho de Flaschel *et. al.* (2005). Porém como se trata de um Modelo de Goodwin ampliado, que inclui juros e inflação, não é de interesse da presente discussão

desemprego) e uma de distribuição de renda (a participação do lucro no produto). Assim, o autor indica que existe correspondência de alguns comportamentos proposto por Goodwin com as evidências apresentadas.

O trabalho de Barbosa Filho e Taylor (2006) apresenta correspondência com o apresentado por Goldstein, uma vez que não discutem o Modelo de Goodwin propriamente. Entretanto apresenta uma modelagem do tipo presa-predador de duas variáveis: uma medindo capacidade, e outra, distribuição de renda. A variável que mede a capacidade é a taxa global de utilização (Produto Interno Bruto real/Produto Interno Bruto potencial real). A variável que mensura distribuição de renda é a participação do salário no produto.

Os autores obtêm uma relação de tipo orbital entre o grau de utilização da capacidade e a participação dos salários no produto renda, nas bases do indicado pelo Modelo de Goodwin (Barbosa Filho; Taylor 2003; Taylor 2004).

O trabalho de Barbosa Filho e Taylor incorpora outros elementos teóricos que não interessam a esta dissertação. Em termos comportamentais, ou qualitativos, os resultados obtidos são coerentes com os indicados no Modelo de Goodwin.

Por fim, o estudo de Tarassow (2010) testa a hipótese de que a relação entre emprego e distribuição de renda causa flutuações no produto, na taxa de lucro e na acumulação de capital. Esse trabalho se concentra na análise econométrica dos componentes cíclicos da participação do salário no produto e da taxa de emprego.

Para tanto, utiliza como variáveis cíclicas o emprego e o valor real unitário do trabalho. O valor unitário real do trabalho, assim denominado por Tarrasow (2010), é utilizado como *proxy* para a participação do salário no produto e é estimado como a diferença entre os salários reais por hora e o produto por hora. Assim, esse valor real unitário do trabalho pode ser interpretado como o lucro obtido pelos capitalistas por hora, ou ainda, em termos marxistas, como a mais-valia por hora. Os dados utilizados são quadrimestrais para a economia norte-americana, para o período entre 1948 e 2006, sendo que é considerado somente o setor privado não agrícola.

Tarrasow (2010) analisa essas relações dinâmicas através de funções resposta ao impulso e à decomposição da variância.<sup>45</sup> Esse estudo estima vários sistemas de vetores autorregressivos bidimensionais com as variáveis custo real unitário do trabalho e taxa de emprego. O autor tanto utiliza dados brutos como aplica técnicas de filtragem dos dados, analisando os componentes cíclicos das variáveis de interesse (Tarrasow 2010).

---

<sup>45</sup> Está fora da proposta desta dissertação efetuar uma discussão sobre esses métodos econométricos.

Os resultados obtidos por Tarrasow são semelhantes aos de trabalhos anteriores, especialmente ao trabalho de Harvie (2000), que será discutido a seguir. Qualitativamente a dinâmica proposta por Goodwin é validada no teste de Tarrasow. Esse autor não efetua nenhuma análise quantitativa e não discute a dimensão do período dos ciclos de Goodwin. Seu objetivo é unicamente confirmar a relação dinâmica entre uma variável de capacidade e uma variável de distribuição de renda (Tarrasow, 2010).

Em comum, todos os tratamentos apresentados visam testar se as correlações de comportamento das variáveis do modelo mantêm coerência com o prescrito por Goodwin. E constata-se que isso ocorre em termos qualitativos.

Passa-se, agora, à análise do tratamento proposto por Harvie (2000). O artigo de Harvie é, “[...] geralmente citado como referência para o teste econométrico do Modelo de Goodwin” (Tarrasow, 2010, p.8, tradução nossa). Sua especificidade em relação aos tratamentos anteriores centra-se nos seguintes fatos: abrange um universo maior de economias – EUA, Austrália, Canadá, Finlândia, França, Alemanha, Grécia, Itália, Noruega e Reino Unido –; os dados não sofrem nenhum ajuste ou filtragem; e o modelo utilizado segue estritamente a proposta do modelo original de Goodwin, não possuindo nenhuma correção ou alteração. Harvie utiliza dados da OCDE em valores anuais para o período de meados da década de 50 do século XX até 1994.

A proposta de Harvie parte da idéia de que é possível se obterem estimativas para o ponto de equilíbrio do Modelo de Goodwin,  $u^*$  e  $v^*$ , e para o período  $T$  através das equações  $u^* = 1 - k(\alpha + \beta)$ ,  $v^* = \frac{(\alpha + \gamma)}{\rho}$  e  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\alpha + \gamma)\left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta)\right)}}$ .

Os parâmetros  $\alpha$  (taxa de crescimento da produtividade do trabalho),  $\beta$  (taxa de crescimento da população),  $k$  (razão capital produto) e  $\gamma$  e  $\rho$  (parâmetros da aproximação linear da Curva de Phillips) estabelecem a posição do ponto de equilíbrio e o período do ciclo. Dada a natureza do modelo, constata-se que os pontos centrais  $u^*$  e  $v^*$  são também obtidos pelas médias de  $u$  e  $v$ ; assim, os estimadores do ponto central  $u^*$  e  $v^*$  são também os estimadores de suas médias ( $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ ).

Desse modo Harvie propõe a obtenção de estimativas para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$ , e  $k$ . Através delas obtêm-se estimativas para  $u^*$  e  $v^*$  e para o período  $T$ . Os valores médios de  $u$  e  $v$  também são estimativas para  $u^*$  e  $v^*$ , podendo ser estimados por uma série histórica de  $u$  e  $v$ .

Dessa forma, é possível a comparação entre os valores estimados por dados de  $u^*$  e  $v^*$  e os valores econometricamente estimados para  $u^*$  e  $v^*$ .

O parâmetro  $\alpha$  (taxa de crescimento da produtividade do trabalho) é obtido a partir da forma funcional proposta por Goodwin  $a = a_0 e^{\alpha t}$ . O parâmetro  $\alpha$  é estimado para cada país pela regressão de mínimos quadrados ordinários (MQO) dada pela seguinte expressão<sup>46</sup>:

$$\ln a_t = \ln \hat{a}_0 + \hat{\alpha}_t + \varepsilon_{1t} \quad (59)$$

A taxa de crescimento da população ( $\beta$ ) é obtida de forma análoga ao crescimento da produtividade:

$$\ln n_t = \ln \hat{n}_0 + \hat{\beta}_t + \varepsilon_{2t} \quad (60)$$

A razão capital-produto ( $k$ ) é assumida como constante no Modelo de Goodwin. Dessa maneira Harvie calcula uma média simples para cada país.

Os parâmetros da Curva de Phillips ( $\gamma$  e  $\rho$ ) são considerados por Goodwin como contínuos. Porém, como Harvie indica, os dados econômicos são discretos, logo, a equação diferencial proposta por Goodwin é substituída por uma equação de diferença análoga, onde

$\frac{\Delta w_{t+1}}{w_t \Delta t}$ <sup>47</sup> é a aproximação para  $\frac{\dot{w}}{w}$ , obtendo-se

$$\frac{\Delta w_{t+1}}{w_t \Delta t} = -\gamma + \rho v_t \quad (61)$$

Porém como o objetivo são relações de longo prazo entre o crescimento do salário real e a taxa de emprego, é necessária uma formulação dinâmica. Assim, incluem-se defasagens nas variáveis, podendo extrair coeficientes de longo prazo. Essa inclusão de variáveis defasadas permite também a correção de problemas de erros de especificação dinâmica. A equação de estimativa é<sup>48</sup>:

<sup>46</sup> O acento circunflexo nas variáveis indica que se tratam de estimativas.

<sup>47</sup>  $\Delta w_{t+1} = w_{t+1} - w_t$ .

<sup>48</sup> Com  $\hat{w}_t = \frac{\Delta w_{t+1}}{w_t \Delta t}$  e  $m$  como o número de intervalos necessários para a correta especificação dinâmica do modelo.

$$w_t^{\wedge} = -\hat{\gamma} + \sum_{j=0}^m \hat{\rho}_j v_t + j \sum_{j=1}^m \hat{\delta}_j w_{t-j}^{\wedge} + \varepsilon_{3t} \quad (61)$$

As estimativas das médias para  $u$  e  $v$  podem ser determinadas a partir de dados. Harvie obtém os valores para  $u$  como a razão entre salários, rendas, pagamentos às forças armadas e contribuições sociais de empregadores, todos antes dos impostos, e o somatório disso aos ganhos das empresas e do governo antes dos impostos.

O valor de  $v$  é obtido como a razão entre o emprego total (toda a força de trabalho, incluindo empregados, com e sem vínculo, membros das forças armadas e aqueles associados a programas de treinamento vinculados ao trabalho) e a força de trabalho total. A força de trabalho total é o somatório dos ocupados com aqueles sem emprego, buscando emprego e disponíveis para o trabalho. Os salários são deflacionados e representam os ganhos totais dos trabalhadores.

Os resultados obtidos por Harvie são apresentados na Tabela 4, onde constam os valores médios para  $u$  e  $v$  obtidos através de dados.

Tabela 4 – Valores médios para  $u$  e  $v$  obtidos através de dados em países selecionados

PAÍSES	$\bar{u}$	$\bar{v}$
Austrália	0,6867 (0,0345)	0,9493 (0,0320)
Canadá	0,7126 (0,0293)	0,9278 (0,0239)
Finlândia	0,7023 (0,0613)	0,9533 (0,0408)
França	0,6689 (0,0580)	0,9489 (0,0383)
Alemanha	0,6904 (0,0525)	0,9629 (0,0278)
Grécia	0,4272 (0,0655)	0,9472 (0,0239)
Itália	0,5592 (0,0322)	0,92825 (0,0301)
Noruega	0,6971 (0,0580)	0,9780 (0,0158)
Reino Unido	0,7588 (0,0233)	0,9502 (0,0376)
EUA	0,7432 (0,0239)	0,9408 (0,0150)

FONTE: Harvie, D. Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. **Cambridge Journal of Economics**. n. 24, p.357, 2000.

Nota: Os dados entre parênteses são os desvios-padrão.

Na Tabela 5 são apresentados os parâmetros para o Modelo de Goodwin estimados econometricamente, bem como os valores de  $\hat{u}^*$ ,  $\hat{v}^*$  e  $\hat{T}$  para cada país da amostra.

No que tange à estimativa dos parâmetros, Harvie informa que a relação exponencial simples explica 80 % do crescimento da produtividade para todos os 10 países da amostra e 85% do crescimento da força de trabalho para oito deles (não tendo bom desempenho a Grécia e a Itália). A estimativa dos parâmetros da Curva de Phillips apresentou o sinal esperado em seus coeficientes para nove países (exceto os EUA). Desses nove, seis apresentam parâmetros com diferença significativa de zero (Harvie, 2000).

Tabela 5 – Parâmetros estimados e índices de característica de ciclos estimados econometricamente para países selecionados

P	AUSTRÁLIA	CANADÁ	FINLÂNDIA	FRANÇA	ALEMANHA	GRÉCIA	ITÁLIA	NORUEGA	REINO UNIDO	EUA
$\hat{\alpha}$	0,0166 (0,0006)	0,0160 (0,0005)	0,0303 (0,0010)	0,0364 (0,0024)	0,0329 (0,0027)	0,0401 (0,0025)	0,0460 (0,0038)	0,0262 (0,0006)	0,0221 (0,00051)	0,0111 (0,00054)
$\hat{\beta}$	0,0226 (0,00044)	0,0259 (0,00048)	0,008 (0,00043)	0,007627 (0,00020)	0,004142 (0,00029)	0,003568 (0,00091)	0,004918 (0,00066)	0,0134 (0,00060)	0,003690 (0,00026)	0,0206 (0,00081)
$\hat{\sigma}$	2,4994 (0,0493)	1,5698 (0,0157)	3,1396 (0,3199)	1,7974 (0,3706)	2,4941 (0,0673)	3,0292 (0,4009)	3,3527 (0,1097)	3,6710 (0,0374)	2,5694 (0,3203)	1,7751 (0,0528)
$\hat{\gamma}$	62,36 (18,07)	59,01 (13,12)	32,00 (101,7)	54,85 (4,96)	85,49 (27,94)	46,02 (88,21)	71,24 (31,1)	118,07 (83,12)	18,54 (9,07)	8,42 (79,2)
$\hat{\rho}$	67,10 (18,98)	65,32 (14,13)	36,57 (106,0)	62,01 (5,19)	65,55 (28,92)	53,48 (92,87)	81,97 (33,4)	122,43 (84,54)	21,90 (9,54)	-7,92 (84,34)
$\hat{u}^*$	0,90	0,89	0,89	0,92	0,90	0,87	0,83	0,86	0,93	a
$\hat{v}^*$	0,93	0,88	0,88	0,89	1,30	0,86	0,87	0,96	0,85	a
$\hat{T}$	1,32	2,09	2,09	1,18	1,13	1,73	1,49	1,20	2,42	a

FONTE: Harvie, D. Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. **Cambridge Journal of Economics**. n. 24, p.362, 2000.

NOTA: Desvios-Padrão entre parênteses. Não é possível o cálculo de estimativas para  $\hat{v}^*$ ,  $\hat{u}^*$  ou  $T$  para os EUA devido ao valor negativo de  $\hat{\rho}$

Observe-se que os valores para  $u$  apresentados na Tabela 4 diferem bastante dos obtidos através das estimativas dos parâmetros do Modelo de Goodwin. Em todos os casos, os valores de  $u$  obtidos por dados são inferiores aos alcançados através dos parâmetros.

Já no caso da taxa de emprego  $v$ , observa-se uma maior compatibilidade entre os resultados, exceto para a Alemanha, na qual a taxa de emprego estimada através dos parâmetros é superior a 1, o que é um resultado sem sentido.

Nas Figuras 5, 6, 7, 8, e 9 são apresentados os gráficos de por Harvie (2000). Neles as curvas apresentam os valores ano a ano para  $u$  e  $v$ , e o ponto ( $u^*$ ,  $v^*$ ) indica o valor de  $\hat{u}^*$  e  $\hat{v}^*$  estimados através dos parâmetros. Note-se que existem dois erros nos gráficos elaborados

por Harvie. No correspondente à Alemanha (Figura 5), o ponto  $(u^*, v^*)$  está em uma posição errada em relação a  $v^*$ , pois a estimativa para  $\hat{v}^*$  é de 1,30. No correspondente aos EUA (Figura 9), o ponto  $(u^*, v^*)$  é apresentado equivocadamente, pois não ocorre o cálculo de  $\hat{u}^*$ ,  $\hat{v}^*$ , devido ao parâmetro  $\hat{\rho}$  ser negativo, logo para os EUA  $(u^*, v^*)$  não existe.

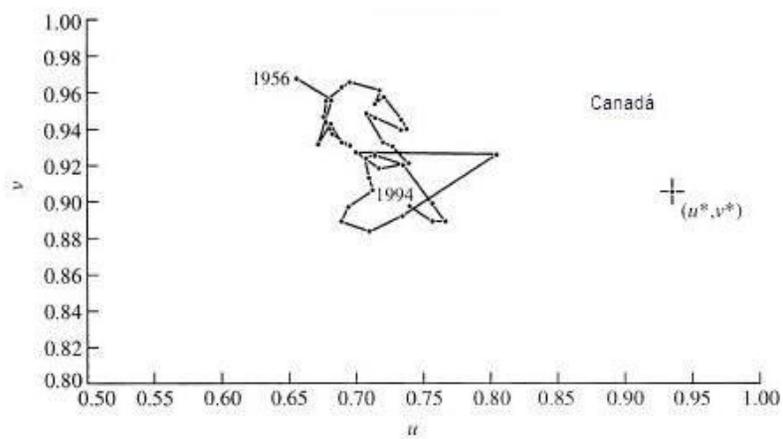
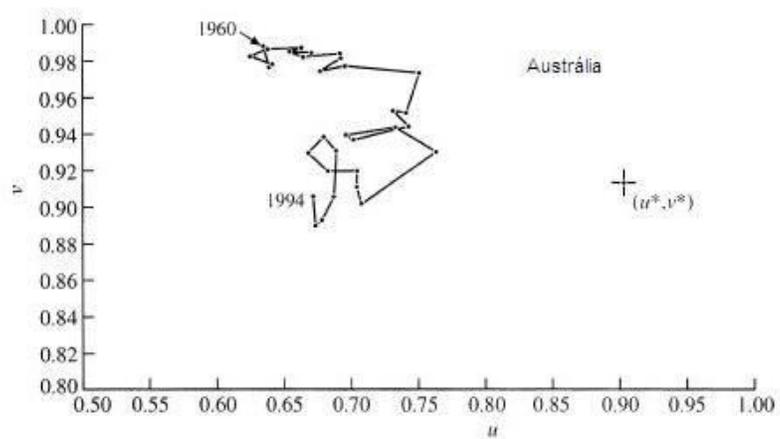


Figura 5: Diagrama  $u$  e  $v$ , para Austrália e Canadá.

FONTE: Harvie, D. Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. **Cambridge Journal of Economics**. n. 24, p.358-361, 2000.

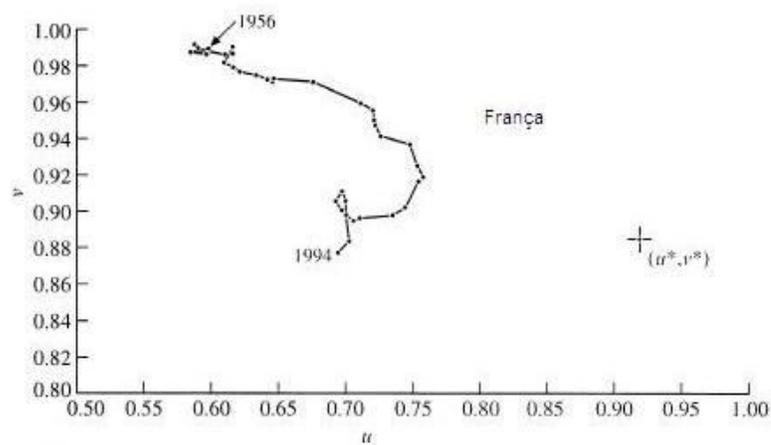
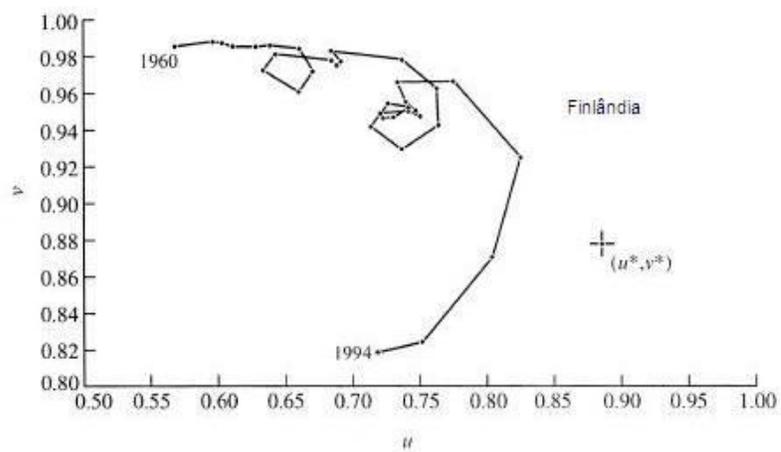


Figura 6: Diagrama  $u$  e  $v$ , para Finlândia e França.

FONTE: Harvie, D. Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. **Cambridge Journal of Economics**. n. 24, p.358-361, 2000.

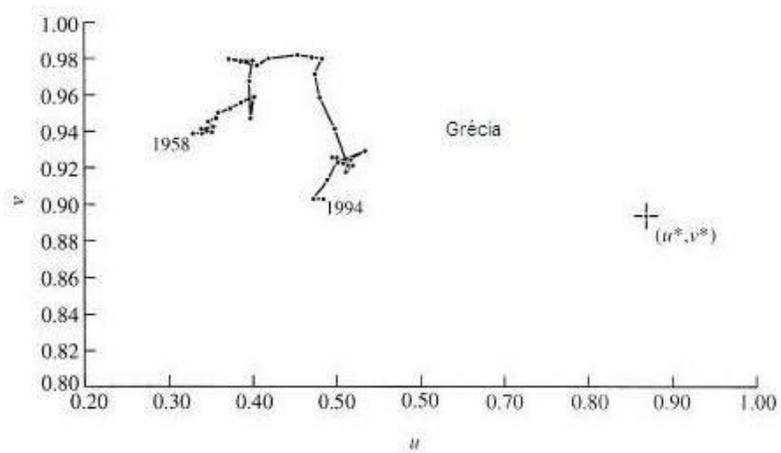
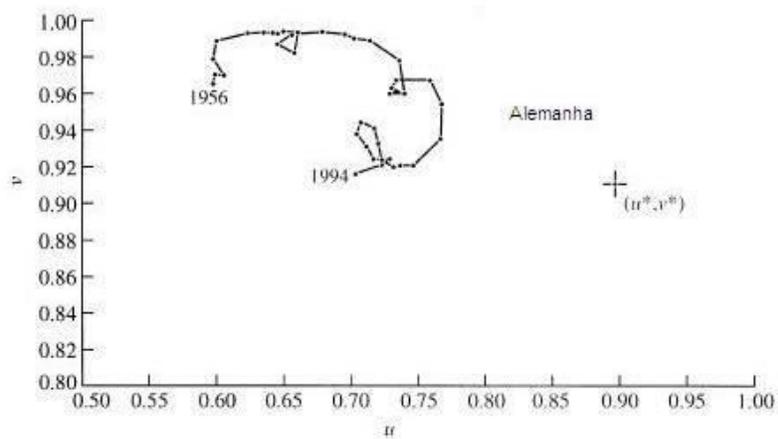


Figura 7: Diagrama  $u$  e  $v$ , para Alemanha e Grécia.

FONTE: Harvie, D. Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. **Cambridge Journal of Economics**. n. 24, p.358-361, 2000.

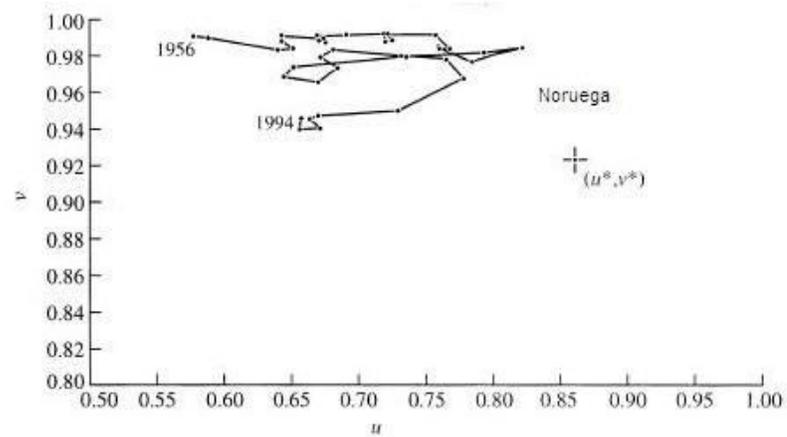
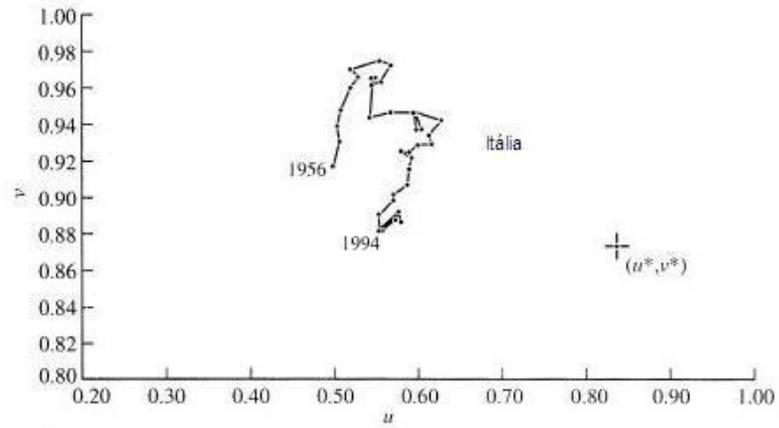


Figura 8: Diagrama  $u$  e  $v$ , para Itália e Noruega.

FONTE: Harvie, D. Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. **Cambridge Journal of Economics**. n. 24, p.358-361, 2000.

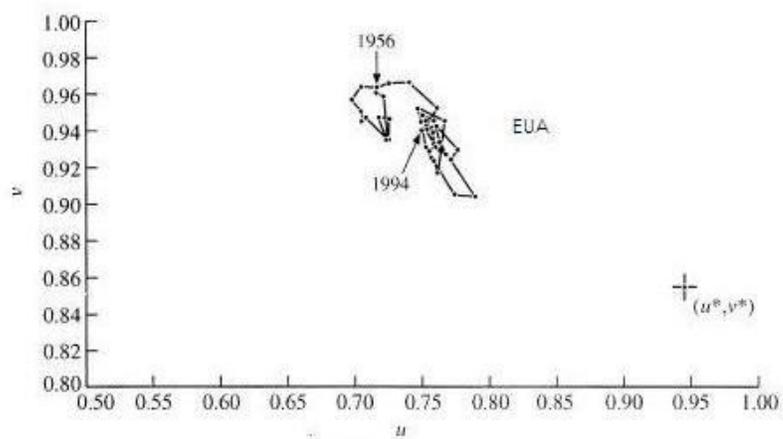
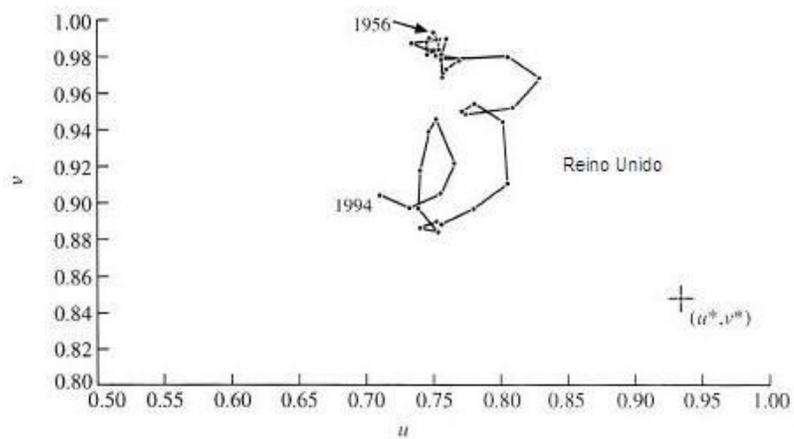


Figura 9: Diagrama  $u$  e  $v$ , para Reino Unido e EUA.

FONTE: Harvie, D. Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. **Cambridge Journal of Economics**. n. 24, p.358-361, 2000.

Harvie (2000) efetua sua análise em dois momentos. Primeiro, considera as trajetórias de  $u$  e  $v$  obtidas e após, avalia os resultados alcançados econometricamente.

Segundo ele, as trajetórias de  $u$  e  $v$  fornecem um suporte qualitativo ao Modelo de Goodwin, uma vez que uma alta taxa de emprego é seguida por elevação da participação do salário no produto; isso é seguido por uma queda no emprego que aparentemente conduz à queda da participação do salário em todos os 10 países da amostra. O movimento ocorre de maneira próxima ao demonstrado no modelo. A análise indica, para todos os 10 países, a existência de três quartos de ciclo para o período enfocado, iniciando em uma situação de baixa participação do salário no produto e alta taxa de emprego e terminando em uma de baixa participação de salário e baixo desemprego (Harvie, 2000).

Porém, inseridos nesse grande ciclo parcial, parecem surgir subciclos para alguns países, sendo os exemplos mais óbvios o Canadá (Figura 5) e Noruega (Figura 8). Harvie sugere uma explicação para os subciclos concebendo-os como ciclos e que mudanças estruturais impactando os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$ , e  $k$  ao longo do período causam alterações de direção do ciclo para um menor emprego e um crescimento marginal da participação dos trabalhadores no produto. Para os EUA, identificam-se subciclos de 10 anos; para a Finlândia, subciclos ao longo dos anos 70; e um pequeno subciclo para o Reino Unido em meados dos anos 80. Para os demais países, os subciclos podem ser causados por distúrbios aleatórios dos dados (Harvie 2000).

Os valores estimados  $\hat{u}^*$  e  $\hat{v}^*$  apresentados na Tabela 5 excedem os valores estimados através de dados em todos os casos (o centro estimado econometricamente encontra-se fora da trajetória do ciclo). Baseado nesses resultados, Harvie considera que o modelo, apesar de semelhanças qualitativas com as trajetórias empíricas, é inadequado do ponto de vista quantitativo (Harvie, 2000). Ou seja, a interação dinâmica das variáveis possui o comportamento previsto pelo modelo. Porém o teste construído por Harvie indica que o modelo é ineficiente para prever os resultados quantitativos do comportamento das variáveis.

É significativo que, em seu trabalho, Harvie não discuta o resultado obtido para o período do ciclo, bem como não efetue uma discussão explícita sobre a questão da instabilidade estrutural do Modelo de Goodwin. Distúrbios nos parâmetros estimados podem acarretar mudança qualitativa no retrato de fase do sistema, conduzindo a estimativas quantitativas discrepantes. O próprio cálculo do período de oscilação é efetuado através de uma linearização próxima ao equilíbrio (como apresentado por Atkinson), o que tende a acarretar a possibilidade de desvios dos resultados. Esse pode ser o caso das discrepâncias

entre o período estimado (Tabela 5) e as trajetórias apresentadas nos gráficos. Implicitamente, Harvie indica que o Modelo de Goodwin é adequado para a análise de ciclos de longo prazo, dada a concepção de que ele é qualitativamente válido. Os períodos de oscilação dos ciclos calculados econometricamente estimam um ciclo com duração de, em média, 1,5 ano. Essa extrema discrepância não é discutida por Harvie.

O autor afirma que a concepção original do modelo enfocava apenas objetivos teóricos. Como o modelo apresenta um bom desempenho sob o ponto de vista qualitativo (o comportamento dinâmico das variáveis ajusta-se ao previsto por ele), possui natureza não-linear e permite facilmente a introdução de extensões, justificam-se pesquisas teóricas mais extensas (Harvie, 2000)

Os trabalhos apresentados acima evidenciam que não existe uma metodologia definitiva para o tratamento empírico do Modelo de Goodwin. Dada a sua simplicidade, seus pressupostos e a presença de instabilidade estrutural, as análises empíricas tendem a apresentar limitações. Entretanto o comportamento das variáveis demonstra que a relação entre participação no produto e nível de emprego apresenta um comportamento compatível com o proposto pelo modelo.

Em uma apreciação geral sobre os tratamentos empíricos do Modelo de Goodwin, Veneziani e Mohun (2006) afirmam que não é explicitamente apresentada evidência da presença de comportamentos cíclicos de longo prazo, argumentando que um ciclo, ou mesmo um terço de ciclo, como demonstrado por Harvie (2000), é questionável como prova. O exame dos dados apresentado por Desai (1984) apresentam indicação semelhante.

Na visão de Veneziani e Mohun (2006), o modelo isola as forças básicas que condicionam o conflito de classes. Eles consideram que o Modelo de Goodwin é um modelo teórico para a compreensão do conflito distributivo e não uma completa descrição de um ciclo de longo ou curto prazo. Entretanto esses autores concordam com Solow (1990), ao considerarem que o Modelo de Goodwin se identifica com ciclos de curto prazo.

Veneziani e Mohun (2006) discordam da visão de Harvie (2000) de que o modelo formaliza movimentos cíclicos de longo prazo. Esses autores afirmam que ele somente pode ser vinculado a um movimento cíclico de longo prazo, se associado à compreensão de perturbações estruturais e à mudança estrutural de natureza descontínua nos sistemas econômicos analisados.

Em síntese, pode-se afirmar que a literatura empírica sobre o Modelo de Goodwin concorda que ele modelo identifica um comportamento real. A dinâmica proposta por

Goodwin pode ser observada a partir das evidências empíricas. Entretanto, sob a perspectiva quantitativa, surgem diferentes análises sobre algumas características do modelo.

Isso ocorre especialmente na questão da periodicidade dos ciclos. O período é determinado quantitativamente pelos parâmetros do modelo. Como este se baseia em um conjunto de premissas simples, ao mesmo tempo em que apresenta instabilidade estrutural, as estimativas desses parâmetros se prestam a diferentes resultados e interpretações. As discussões sobre ciclos de curta ou longa duração são exemplos disso.

Estas questões indicam a necessidade de maiores pesquisas vinculadas ao Modelo de Goodwin e aos métodos empíricos adequados ao seu estudo. Esse tema será discutido mais detidamente nas considerações finais.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho objetivou discutir o Modelo de Goodwin em sua formulação original, através da apresentação de suas propriedades e características. Foram abordadas as principais contribuições da literatura sobre o tema, tanto do ponto de vista teórico como do empírico.

O Modelo de Goodwin é semelhante ao modelo presa-predador de Lotka-Volterra, concebido originalmente para o estudo da dinâmica de duas populações: uma de presas e a outra de predadores. As propriedades matemáticas do Modelo Lotka-Volterra encontram-se presentes no Modelo de Goodwin, sendo este um sistema dinâmico que é oscilatório, conservativo e apresenta instabilidade estrutural.

Goodwin (1967) parte de algumas premissas simplificadoras que permitem a elaboração de um modelo de relação presa predador para a interação dinâmica entre a taxa de ocupação da força de trabalho e a participação dos trabalhadores no produto. Dentre as premissas principais, destacam-se a hipótese de progresso técnico *a lá* Harrod, a razão capital produto constante e o uso de uma aproximação linear para a Curva de Phillips.

O modelo assim obtido apresenta como principal característica a capacidade de gerar ciclos nos quais ocorrem interações dinâmicas entre a taxa de emprego e a participação dos trabalhadores no produto. A dinâmica proposta por ele pode ser descrita da seguinte maneira. A elevação do emprego conduz ao aumento da participação dos trabalhadores no produto. O aumento da participação dos trabalhadores no produto desestimula o investimento dos capitalistas, reduzindo, assim, o emprego. Essa redução do emprego conduz a uma redução da participação dos trabalhadores no produto. Por fim, a menor participação dos trabalhadores no produto estimula o investimento por parte dos capitalistas, o que acarreta crescimento do emprego. E, assim, o ciclo ocorre indefinidamente.

O Modelo de Goodwin mostra-se como um artefato teórico válido para a compreensão da relação dinâmica entre o emprego e a distribuição de renda, tanto no curto como no longo prazo. Ele permite um tratamento mais complexo dessa dinâmica ao ressaltar que a relação entre essas duas variáveis é parcialmente competitiva e parcialmente cooperativa.

Cada variável pode ser associada a uma das classes sociais envolvidas no processo econômico. Dessa forma os trabalhadores vinculam-se à participação do trabalho no produto, e os capitalistas associam-se à taxa de emprego (que é uma medida de uso de capacidade). A

relação estabelece-se de maneira que os trabalhadores são os predadores, e os capitalistas são as presas. Em alguns momentos, a relação entre essas classes é de conflito; em outros, é de cooperação.

O modelo permite, assim, uma abordagem teórica da questão da distribuição de riqueza que acaba por ser equidistante tanto do conflito entre trabalhadores e capitalistas, proposta pelo marxismo ortodoxo, como da complementaridade de interesses dessas duas classes, proposta pela economia neoclássica.

O Modelo de Goodwin apresenta influência marxista na medida em que formaliza a idéia da ocorrência de ciclos para o caso da composição orgânica do capital constante. Porém não é uma formalização estrita da teoria marxista, pois não contempla o caso da composição orgânica do capital variável e a questão correlata da queda tendencial da taxa de lucro.

O principal debate teórico provocado pelo Modelo de Goodwin é a questão da instabilidade estrutural. Alguns autores propõem alterações em sua estrutura a fim de eliminar essa característica, que é considerada um inconveniente. Outros consideram a instabilidade necessária, devido ao vínculo do modelo ao marxismo. A visão tradicional é a de que os modelos econômicos devem ser estruturalmente estáveis. Atualmente, essa visão tem sido contestada por alguns autores.

Do ponto de vista empírico, os estudos sobre o modelo indicam que este possui significação qualitativa. Isso ocorre pelo fato de que as variáveis que o constituem (taxa de emprego e participação dos trabalhadores no produto) interagem dinamicamente nos termos previstos por ele. Entretanto, de uma perspectiva quantitativa, o modelo não é capaz de fornecer estimativas precisas para os valores assumidos pelas variáveis de interesse. Isso é visto como consequência das premissas que ele adota e da sua natureza esquemática. Assinala-se que essas limitações já eram indicadas pelo próprio Goodwin (1967).

A partir dessas considerações, algumas indicações de utilização do Modelo de Goodwin podem ser efetuadas.

Em uma perspectiva teórica, constata-se que o modelo, dada a sua estrutura simples, se presta à construção de diversas extensões que incorporem novas variáveis. Apesar da existência de alguns artigos publicados com esse objetivo, trata-se ainda de um campo fecundo para novas pesquisas de caráter teórico e empírico.

Um elemento teórico que carece de estudos mais aprofundados é o que concerne ao período de oscilação do ciclo de Goodwin. Como o período do ciclo é determinado pelos parâmetros do modelo e a determinação quantitativa desses parâmetros é problemática, esse tema presta-se a discussões sobre perspectivas de longo e curto prazos.

Já em termos de tratamentos empíricos, o modelo carece de uma metodologia definida para seu estudo. A questão sobre a vantagem que métodos como o proposto por Tarrasow (2010) possuem em relação às estratégias de análise de dados mais simples, como a adotada por Harvie (2000), é um tema aberto a pesquisa.

Outro ponto a ser explorado em pesquisas futuras que utilizem o Modelo de Goodwin é a extensão dos trabalhos empíricos às economias em estágios de desenvolvimento distintos da economia européia ou da norte-americana. Esse tipo de abordagem permitirá exercícios comparativos do ponto de vista qualitativo, podendo abrir novas linhas interpretativas.

Por fim, constata-se que o instrumental matemático que o modelo utiliza é de manipulação acessível e incorpora diversos elementos relevantes para a construção de modelos econômicos. Assim, o estudo do Modelo de Goodwin apresenta potencial para ser uma ferramenta pedagógica que: (a) permite a introdução ao estudo de relações dinâmicas entre variáveis, (b) pode ser utilizada como ilustração ao estudo de estratégias de construção de modelos de dinâmica não-linear e (c) presta-se às discussões sobre a existência e a relevância da questão da estabilidade/instabilidade estrutural.

O Modelo de Goodwin oferece várias possibilidades de estudo e pesquisa. Sua utilização como ferramenta de estudo e de pesquisa é de extrema relevância para uma perspectiva dinâmica das ciências econômicas.

## REFERÊNCIAS

AGUIAR-CONRARIA, L. **A note on the Stability Properties of Goodwin's Predator-Prey Model**. Braga: Departamento de Economia, Universidade de Minho, 2007. Disponível em <[http://www3.eeg.uminho.pt/economia/nipe/docs/2007/NIPE\\_WP\\_5\\_2007.PDF](http://www3.eeg.uminho.pt/economia/nipe/docs/2007/NIPE_WP_5_2007.PDF)>. Acesso em: 10.04.2010.

ATKINSON, A. B., The timescale of economic models: how long is the long run? **The review of economic studies**, Oxford, v.36, n.2, p.137-152, April 1969.

BERRYMAN, A. **Lotka Volterra-Model**. Washington: Washington State University, Disponível em <<http://classes.entom.wsu.edu/543/LVmodel.htm>>. Acesso em: 19.07.2010.

BALDUCCI, R., CANDELA, G. RICCI, G. A generalization of R. Goodwin model with rational behaviour of economic agents. In: GOODWIN R., VERCELLI, A., KRUGER, M. (Eds) **Nonlinear Models of Fluctuating Growth**. Berlin: Springer-Verlag, 1984. p.175-204.

BARBOSA-FILHO, N. H., TAYLOR, L. Distributive and Demand cycles in the U.S. economy – A structuralist Goodwin model. **Metroeconomica**, v.57, n.3, p. 389-411, 2006.

CAFFE, R. Financeirização do subdesenvolvimento: O modelo Furtado-Goodwin e a estagnação latino americana. In: **Encuentro de Latinoamericanistas Españoles (12. 2006. Santander): Viejas y nuevas alianzas entre América Latina y España**. Santander, 2006. Disponível em: < [http://econpapers.repec.org/paper/haljournal/halshs-00103411\\_5fv1.htm](http://econpapers.repec.org/paper/haljournal/halshs-00103411_5fv1.htm)>. Acesso em: 24 de Fevereiro de 2010.

CHIANG, A. **Fundamental Methods of Mathematical Economics**. New York : McGraw-Hill, 1984. 788p.

CHOI, H. Goodwin's growth cycle and the efficiency wage hypothesis. **Journal of Economic Behavior and Organization**, Amsterdam, v. 27, p. 223-235, 1995.

DESAI, M. Growth cycles and inflation in a model of class struggle. **Journal of Economic Theory**, Ithaca, v. 6, p. 527-545, 1973.

DESAI, M. An econometric model of the share of wage in national income: UK 1855-1965. In: GOODWIN R., VERCELLI, A. KRUGER, M. (Eds) **Nonlinear Models of Fluctuating Growth**. Berlin: Springer-Verlag, 1984. p. 253-277.

DESAI, M. ORMEROD, P. Richard Goodwin: A short appreciation. **The Economic Journal**, London, v. 108, n. 450, p. 1431-1435, Set. 1998.

DESAI, M., *et al.* A clarification of the Goodwin model of the growth cycle. **University College London Discussion Papers in Economics**, London, 04-04, 2004. Disponível em <<http://eprints.ucl.ac.uk/2575/>>. Acesso em: 24.06.2010.

DRUMOND, C. Ciclos e acumulação capitalista: O modelo de “Goodwin” com composição técnica variável. **Fórum BNB de desenvolvimento regional**. 2010. disponível em <<http://www.bnb.gov.br/content/aplicacao/eventos/forumbnb2010/docs/ciclos.pdf>> . Acesso em 11.12.2010.

FEINSTEIN, C. **National Income, Expenditure and Output of the United Kindom 1855-1965**. Cambridge: Cambridge University Press, 1972. p.244.

FLASCHEL, P., Some stability properties of Goodwin’s growth cycle. A critical elaboration. **Zeitschrift fur Nationalökonomie**, Berlin, v.44, n.1, p.63-69, 1984.

FLASCHEL, P.; LADESMANN, M. Richard Murphy Goodwin (1913-1996): His legacy continued. **Structural Change and Economic Dynamics**, Amsterdam, n.17, p. 379-381, 2006.

FLASCHEL, P. *et al.* Long cycles in employment, inflation and real unit wage costs, qualitative analysis and quantitative assessment. **American journal of applied sciences**, p.69-77, 2005.

FOLEY, D., MICHL, T. **Growth and distribution**, Cambridge: Harvard University Press, 1999. 355 p.

GANDOLFO, G. **Economic Dynamics**. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 675 p.

GOODWIN, R. M. A growth cycle. In: FEINSTEIN, C.H. **Socialism, Capitalism and Economic Growth**. Cambridge: Cambridge University Press, 1967. p.54-58.

GOODWIN R. M. A growth cycle In: HUNT, E. K.; SCHWARTZ, J. G. **A critique of economic theory**. Harmonsworth: Peguin, 1972. p. 442-449.

GOLDSTEIN, J. P. Predator-Prey model estimate of the cyclical profit squeeze. **Metroeconomica**, v.50, n.2, p.139-17, 1999.

GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields**. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 459 p.

HARVIE, D. Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries. **Cambridge Journal of Economics**. n. 24, p.349-376, 2000.

HINRICHSSEN, D.; PRITCHARD, A. **Mathematical Systems Theory I: Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness**. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 804 p.

HIRSCH, M.; SMALE, S. **Differential equations, dynamical system and linear algebra**. San Diego: Academic Press, 1974. 359 p.

POHJOLA, M. Stable, Cyclic and Chaotic Growth: The Dynamics of a Discrete-Time Version of Goodwin's Growth Cycle Model. **Zeitschrift fur Nationalökonomie**, Berlin, v.41, n. 1-2, p.27-38. 1981.

KOT, M. **Elements of Mathematical Ecology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 453 p.

MATTEO, M.; SORDI S. Richard M. Goodwin: a pioneer in the field of economic dynamics between the two Cambridges. **Department of economic policy, finance and development working papers**, 0709. Università di Siena, 2009. Disponível em <<http://www.depfid.unisi.it/images/pdf/text709.pdf>>. Acesso em: 10 de março de 2010.

MARX, K. **O capital**. Vol I, T 2. São Paulo: Abril S.A. cultural, 1984. 306 p.

MEHRLING, P. A Classical Model of the Class Struggle: A Game-Theoretic Approach. **The Journal of Political Economic**. Chicago, v.94 n.6, p. 1280-1303. 1986.

PICHARDO, G. Notas para las sesiones. In: **Curso: Mudança Estrutural e Crescimento Econômico**. Porto Alegre, Maio de 2009. 104p.

PUNZO, L. Towards a disequilibrium theory of structural dynamics Goodwin's contribution. **Structural Change and Economic Dynamics**. Amsterdam, n. 17, p.382-399. 2006.

SAMUELSON, P. A. A universal cycle? In: \_\_\_\_\_. **The collected scientific papers III**, Cambridge: MIT Press, 1972a. p. 473-485.

SAMUELSON, P. A. A generalized predator-prey oscillation in ecological and economic equilibrium. In: \_\_\_\_\_. **The collected scientific papers III**, Cambridge: MIT Press, 1972b. p. 473-485.

SATO, Y. Marx-Goodwin Growth Cycles in a Two Sector Economy. **Zeitschrift fur Nationalokonomie**, Berlin, v.45, n.1, p.21-34. 1985.

SHAH, A., DESAI, M. Growth cycles with induced technical change. **The Economic Journal**. London. v.91 n. 364, p. 1006-1010. Dec 1981.

SHIH, S. The period of Lotka-Volterra system. **Taiwanese Journal of Mathematics**. Kaohsiung. V.1 n. 4. Dez. 1997. Disponível em: <[www.math.nthu.edu.tw/~tjm/abstract/9712/tjm9712\\_9.pdf](http://www.math.nthu.edu.tw/~tjm/abstract/9712/tjm9712_9.pdf)>. Acesso em: 06.10.2010.

SHILNIKOV L. *et al.* **Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: part II**. Singapore: World Scientific Publishing, 2001. 592 p.

SOLOMOU, S. **Phases of economic growth 1850-1973: Kondratieff waves and Kuznets swings**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 197p.

SOLOW, R. Goodwin's Growth cycle: reminiscence and rumination. In: VELUPILLAI, K. (ed.) **Nonlinear and multisectoral macrodynamics**. London: Macmillan. 1990. p. 31-41.

SPORTELLI, M. A Kolmogoroff Generalized Predator-Prey model of Goodwin's Growth Cycle. **Zeitschrift fur Nationalokonomie**, Berlin, v. 61, n.1, p.35-64. 1995.

TARASSOW, A. The empirical relevance of Goodwin's business cycle model for US economy. **MPRA Paper 21012**, Munich: University Library of Munich, 2010.

TAYLOR, L. **Reconstructing Macroeconomics**. Cambridge: Harvard University Press, 2004. 442 p.

THOM, R. **Structural Stability and Morphogenesis: an Outline of a General Theory of Models**. Reading: Benjamin and Cummings, 1975. 404 p.

VAN DER PLOEG, F. Economic Growth and Conflict Over the Distribution of Income. **Journal of Economic Dynamics and Control**. Amsterdam, n. 6. p.253-279. 1983.

VENEZIANI, R. **Structural Stability and Goodwin's A Growth Cycle: A Survey**. London: London School of Economics and Political Sciences. 2001. Disponível em: <[www.entelugieinaudi.it/pdf/Pubblicazioni/Temi/T\\_24.pdf](http://www.entelugieinaudi.it/pdf/Pubblicazioni/Temi/T_24.pdf)>. Acesso em: 06.02.2010.

VENEZIANI, R.; MOHUN, S. Structural Stability and Goodwin's growth cycle. **Structural Change and Economic Dynamics**. Amsterdam, n. 17, p.437-451. 2006.

VELUPILLAI, K. Some stability properties of Goodwin's growth cycle. **Zeitschrift für Nationalökonomie**, Berlin, v. 39, n. 3-4, p.245-257. 1979.

VERCELLI A. **Methodological Foundations of Macroeconomics: Keynes and Lucas**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 269 p.

WEIBIN, Z. Cyclical Economic Growth-Re-Examining the Goodwin Model. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica**, Beijing, v.7 n.2, p. 114-120. 1991.

WOLFSETTER, E. Fiscal policy and the Classical Growth cycle. **Zeitschrift für Nationalökonomie**, Berlin, v.42, n. 4, p.375-393 1982.