



## Divulgando a Geometria Dinâmica na web: construção de utilitários com o software GeoGebra

*Diego Eduardo Lieban<sup>1</sup>  
Tháisa Jacintho Müller<sup>2</sup>*

### RESUMO

A tecnologia, quando bem utilizada, tem demonstrado ser uma grande aliada na construção do conhecimento matemático, e a utilização de softwares de Geometria Dinâmica ganha destaque especial neste cenário. Pensando nisto, criou-se um site com objetivo principal de divulgar produções já realizadas com o software GeoGebra, tanto por parte dos autores como por seus alunos. A partir desta divulgação pretende-se, além de disponibilizar materiais de apoio na web para professores, alunos ou demais interessados, incentivar a prática criativa e promover discussões acerca dos temas envolvidos, tais como o uso da tecnologia no ensino da Matemática e do software em questão ou até mesmo dos conteúdos matemáticos abordados. Até o presente momento, a divulgação do site e dos materiais aconteceu basicamente em cursos de extensão, em sala de aula ou em eventos de modo geral. Ainda assim, já se pode observar resultados positivos e espera-se, com esta iniciativa, contribuir cada vez mais com a aprendizagem da Matemática.

**Palavras – chave:** Geometria Dinâmica. Utilitários. GeoGebra. Disponibilização de Material.

### 1. Introdução

Neste trabalho, relatamos uma proposta de divulgação da Geometria Dinâmica através da elaboração de um site no qual apresentamos, de forma dialogada, alguns arquivos que podem auxiliar professores do Ensino Básico e Superior no desenvolvimento de vários conteúdos com seus alunos. A fim de compartilhar parte de nossa prática e difundir a aplicação de alguns modelos que criamos, disponibilizamos o material na rede para uso e eventuais adaptações. Entre os tópicos abordados, encontram-se, por exemplo, Geometria Plana e Espacial, Trigonometria, Números Complexos, Derivadas e Integrais.

---

<sup>1</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul. Mestre em Matemática (UFRGS). E-mail: diegolieban@yahoo.es

<sup>2</sup>Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul / Universidade do Vale do Rio dos Sinos. Mestre em Matemática (UFRGS). Doutoranda em Informática na Educação (UFRGS). E-mail: thaisamuller@gmail.com

No site, que pode ser acessado em <https://sites.google.com/site/geogebando/>, além de seções de construções sugeridas para Educação Básica e Superior, existe também uma seção com trabalhos de alunos, produzidos em disciplinas de Ensino Médio, Graduação e Pós-Graduação ministradas em nossas turmas regulares ou em cursos de extensão.

Todas as produções apresentadas no referido site foram construídas com o software GeoGebra, escolhido por nós entre os muitos softwares de Geometria Dinâmica<sup>3</sup> conhecidos, por ser um software livre e com comandos simples que facilitam o processo de familiarização do aluno com esse recurso. Além disso, este software traz todas as vantagens que consideramos essenciais para o trabalho com Geometria Dinâmica, tais como interatividade e visualização de propriedades através da fácil manipulação de objetos.

Por fim, destacamos que o site construído tem também como objetivo motivar professores e alunos a criarem seus próprios arquivos, bem como possibilitar, de certa forma, discussões acerca dos temas abordados e do uso da tecnologia na Educação Matemática de um modo geral.

## **2. Matemática e Tecnologia: uma união possível**

Ao refletirmos sobre a utilização da tecnologia como suporte à construção do conhecimento, podemos pensar sobre como se dá esta construção, ou ainda, como fazer uso de uma ferramenta, como o GeoGebra, para quebrar a “tradição” de exercícios repetitivos e fórmulas.

Porém, não é suficiente apenas disponibilizar ferramentas se a aplicação delas não for pensada e estudada previamente. Por este motivo, o que buscamos é oferecer condições para que o professor de Matemática, através de materiais de apoio devidamente explorados, reforce sua autoconfiança e conhecimento e tenha mais iniciativa com o uso da tecnologia. Acreditamos, assim como Barcelos, Passerino e Behar (2011) que “é importante saber onde e quando usar (ou não) as tecnologias. Para tanto, é relevante que os professores sejam preparados para estas novas práticas, afinal desempenham papel de destaque na integração da escola à cultura digital.”

Podemos pensar também sobre os papéis do professor e do aluno diante da tecnologia. Baseados nas ideias de Isotani e Brandão (2006), afirmamos que o uso de recursos tecnológicos no ensino incentiva a participação ativa do aluno, bem como faz do professor o

---

<sup>3</sup>Para Gravina et. al. (2011) um software de Geometria Dinâmica é “uma mídia digital que disponibiliza régua e compasso virtuais, que são instrumentos clássicos com os quais são feitas as construções geométricas, só que agora em ambiente virtual”. (p.26)

seu parceiro, diferentemente daquele ser detentor do conhecimento, como era visto há tempos atrás. Porém, a transição do método tradicional de ensino para o ensino auxiliado por computador requer adaptação tanto por parte do professor como do aluno, que precisa abandonar o comportamento passivo, buscar constantemente desafios e interagir com colegas e professores.

Defendemos, mais especificamente, a utilização de softwares de Geometria Dinâmica nas aulas de Matemática, uma vez que estes possibilitam a experimentação, permitindo uma inversão da ordem tradicional de ensino, começando agora pela investigação e depois partindo para a teorização (BORBA e PENTEADO, 2007). Além disso, estes autores ainda ressaltam que esta prática é enriquecedora tanto para o professor quanto para o aluno:

Nem sempre é possível conhecer de antemão as possíveis respostas que aparecem na tela. É preciso entender as relações que estão sendo estabelecidas pelo *software*. Numa sala de aula, isso constitui um ambiente de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. (Borba e Penteado, 2007, p. 58)

Por fim, entendemos que esta experimentação é etapa fundamental na construção do conhecimento, uma vez que estimula a investigação. Além disso, os arquivos que apresentamos promovem a interatividade, criando ambientes ricos para a aprendizagem:

[...] nos Ambientes Interativos de Aprendizado, o aprendizado é entendido como a construção individual do conhecimento a partir de atividades de exploração, investigação e descoberta. Sistemas, nessa classe, são um análogo dos sistemas físicos estudados por cientistas: não ensinam nem instruem, apenas têm um determinado comportamento. É o aprendiz, como cientista, que aprende os princípios, analisando o comportamento do sistema em experimentação (Thompson, 1987, apud BARANUSKAS et. al, 1999, p. 54).

Recursos como a experimentação não são naturais com uma abordagem com lápis, papel e demais instrumentos de desenho. Além de exigir muita precisão ao manusear com algumas ferramentas, demandaria algum tempo. A Geometria Dinâmica (GD), ao contrário, propicia que com um simples arrastar de mouse, o aluno perceba a preservação, ou não, de certas propriedades e isso acabe por estimular a capacidade do aluno em conjecturar e estabelecer relações para então, a partir de uma etapa de identificação dos objetos, construir o processo dedutivo (demonstração), tão importante não só em geometria como em outras áreas da Matemática.

O professor, portanto, deve assumir um papel de parceiro, conduzindo atividades que visem à exploração e descoberta e favoreçam a criatividade e o envolvimento do aluno com o assunto em questão. Deste modo, podemos introduzir o conceito matemático dos objetos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa de GD, surgindo daí o processo de argumentação e dedução.

Corroborando com esta perspectiva, Zorzan (2007) alega que:

Nesse sentido, os recursos tecnológicos desse contexto precisam ser estudados, analisados, para servirem de constructos a novas maneiras e possibilidades de constituição do saber escolar. De modo especial, o ensino da matemática não pode mais ater-se a um ensino memorístico, no qual se enfatizam as tabuadas e o exercício de cálculos, pois essas atividades não atendem às necessidades sociais. Assim, diante do desenvolvimento do pensamento, do conhecimento, da produção e da cultura, o ensino da matemática, como também das outras áreas do conhecimento, necessita de transformações nos aspectos didático-metodológicos. (p. 87)

Em resumo, como a GD possibilita visualizar uma mesma construção de diversas formas, e assim facilitar a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos, podemos utilizar um programa de GD para revelar relações geométricas intrínsecas que poderiam passar despercebidas numa representação estática. Com isso, o professor pode, e deve, incentivar o espírito investigativo do aluno, solicitando ao final uma justificativa para as relações encontradas (uma demonstração), podendo ser mais formal de acordo com o nível de aprendizagem do aluno.

### 3. Concepção do site

Podemos observar, enquanto professores de cursos de Licenciatura em Matemática ou Ensino Médio, que vícios a fórmulas e dependência excessiva de calculadora são comuns na realidade de nossos alunos. Esta situação torna-se ainda mais crítica na medida em que estamos formando futuros professores. Ressaltamos, aqui, que não consideramos prejudicial o uso de instrumentos que possam facilitar o processo de aprendizagem, desde que sejam utilizados de forma a propiciar situações realmente significativas.

Preocupados com este fato, pensamos em difundir uma proposta que possa servir de motivação a professores que tenham interesse de desenvolver seus próprios **utilitários** – termo que usamos para nos referir aos objetos de aprendizagem desenvolvidos para as aulas de Matemática. A opção por este termo tem como objetivo reforçar a pertinência do uso das ferramentas construídas, atendendo aos interesses específicos do próprio autor e permitindo a adaptação por outros usuários, uma vez que propomos o compartilhamento de arquivos em um espaço comum.

Muitas de nossas concepções sobre o uso de tecnologias no ensino da Matemática e, conseqüentemente, a inspiração para o trabalho apresentado aqui, foram sendo moldadas também por nossa participação no curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática, oferecido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul em parceria com a Universidade Aberta do Brasil. Neste curso, atuamos como tutores a distância, tendo

oportunidade de desenvolver práticas com professores da rede pública, usando tecnologias, aprimorando nossas próprias práticas com o software GeoGebra. Percebemos, assim, a necessidade de atualização de muitos destes professores e começamos a buscar alternativas para amenizar suas dificuldades, tendo as atividades desenvolvidas nos diferentes módulos da Especialização como referência. Deste modo, reforçamos nosso papel de multiplicadores e difusores do uso do software GeoGebra (e da tecnologia de um modo geral), sempre atentando para as devidas correlações conceituais e os potenciais de exploração das atividades pensadas.

Com relação aos exemplos utilizados em nosso site, os categorizamos sob os seguintes aspectos:

- Arquivos de **exploração livre**, que têm especial contribuição no processo de “conjecturação” dos usuários, uma vez que vão experimentando as diferentes situações que o utilitário permite e, a partir de observações pela interação, estabelecem relações e refinam suas percepções sobre o conteúdo em questão.

Exemplo: Portão de Garagem (FIGURA 1)

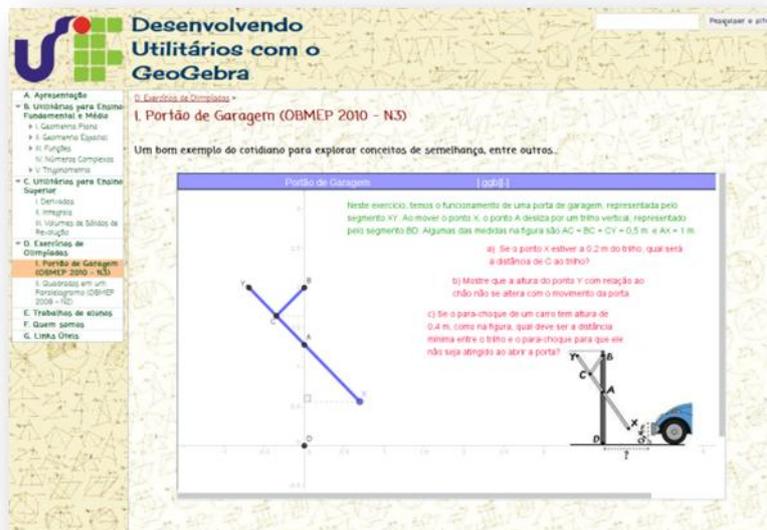


FIGURA 1: Arquivo de exploração livre  
 FONTE: <https://sites.google.com/site/geogebbrando>

Este arquivo, em particular, permite a simulação do movimento de abertura e fechamento de um portão de garagem. Assim, o aluno pode perceber que, ao arrastar o portão através de um ponto livre, preserva-se a altura do ponto extremo superior. A experimentação se dá no “manuseio” do portão, simulando uma situação cotidiana. A ideia é que o aluno perceba a ocorrência do fato a partir de conceitos de semelhança e

também da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Dentre os utilitários apresentados no site, além do especificado acima, classificamos como de exploração livre os que denominamos pirâmides regulares, modelagem de caixa, quadrados em um paralelogramo e funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

- Arquivos de **exploração direcionada**, que buscam sugerir orientações para os usuários de maneira que essas o conduzam a um resultado desejado, seja com questionamentos ou dicas, que aparecem como elementos clicáveis, reforçando a interação do usuário com o utilitário.

Exemplo: Números Complexos (FIGURA 2)

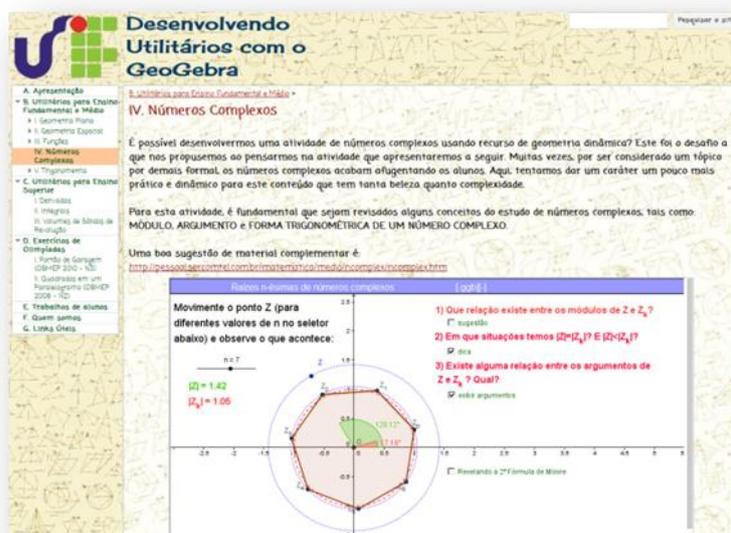


FIGURA 2: Arquivo de exploração direcionada  
FONTE: <https://sites.google.com/site/geogebando>

Este utilitário tem como objetivo explorar, tanto algebricamente como geometricamente, as raízes de ordem  $n$  de um número complexo. Através de questionamentos, para os quais é possível solicitar alguma dica, tentamos conduzir o aluno a entender que o módulo da raiz  $n$ -ésima de um número complexo  $z$  é a raiz  $n$ -ésima do módulo de  $z$ , e que isso não significa, necessariamente, que o módulo da raiz é menor que o módulo de  $z$ . Estes fatos, bem como a relação entre argumentos, podem ser verificados através da movimentação do ponto  $z$  presente na tela, culminando com a apresentação da fórmula de Moivre.

Fazem parte desta categoria também os utilitários relativos ao ciclo trigonométrico e à área de intersecção entre triângulos.

- Arquivos de **recurso/suporte** para demonstrações ou deduções de resultados clássicos.  
Exemplo: Volume da Esfera (FIGURA 3)



FIGURA 3: Arquivo de recurso/suporte  
FONTE: <https://sites.google.com/site/geogebando>

Uma demonstração em Matemática consiste em uma sucessão de etapas que são sustentadas por argumentações consistentes e resultados previamente conhecidos e aceitos com verdadeiros. Muitas vezes, entretanto, depende da capacidade de visualização do leitor ou ouvinte, habilidade esta que certamente se desenvolve em diferentes níveis em cada indivíduo. Em arquivos como o do volume da esfera, procuramos fazer uso do software GeoGebra para contribuir no sentido de usar do apelo visual do arquivo para permitir que os resultados sejam explorados a partir de então. Especificamente neste arquivo que exibimos (FIGURA 3), a ideia é que o usuário “enxergue” as seções determinadas em uma esfera e uma anticlipsisidra pelo corte de um plano (no arquivo, representados pelas regiões de cor roxa). Com o ponto H, ao lado, ele pode movimentar e perceber os diferentes comportamentos que essas seções assumem, observando as similaridades no centro e nas extremidades, quando as regiões são máximas e mínimas (desaparecem), respectivamente, em ambos os sólidos. Sugerimos, então, que só a partir daí e pautado em algumas discussões com os alunos, quando acreditamos que eles já desconfiem da igualdade das regiões, é que se recorra ao procedimento formal, no qual usamos de semelhança para demonstrarmos

que, de fato, as regiões têm mesma área e, portanto, os sólidos, pelo Princípio de Cavalieri, os mesmos volumes.

Como arquivos de recurso/suporte para demonstrações ou deduções de resultados clássicos, além do volume da esfera, temos os seguintes utilitários: teorema de Pitágoras, área do círculo e área do trapézio.

- Arquivos que sirvam como **recurso didático na elucidação de conceitos**, procurando auxiliar na visualização ou comportamento de procedimentos nos quais os alunos costumam apresentar dificuldades.

Exemplo: Volumes de Sólidos de Revolução (FIGURA 4)



FIGURA 4: Arquivo de recurso didático na elucidação de conceitos

FONTE: <https://sites.google.com/site/geogebando>

Explicar certos conceitos depende muitas vezes do potencial intuitivo do ouvinte/leitor que nem sempre é apurado suficientemente. Da mesma forma que nos arquivos citados no item anterior, entendemos que disponibilizar um recurso visual e, em alguns casos, interativo, contribui significativamente para uma melhor apropriação do conhecimento. No exemplo que apresentamos aqui, o usuário tem condições de avaliar sob diferentes ângulos o comportamento dos sólidos de revolução, ou seja, aqueles que são obtidos pela rotação de uma curva. No arquivo original, que pode ser baixado através do site, o usuário consegue, ainda, gerar as funções a partir das quais, por suas rotações, deseja criar os sólidos. Uma importante aplicação do cálculo integral é revisitada, assim, de maneira interativa e envolvente.

Classificamos também como recurso didático na elucidação de conceitos os seguintes

utilitários: sólidos de revolução, integrais definidas, derivadas, cilindro de revolução e cone de revolução.

Com esta divisão, pretendemos explicitar as diferentes possibilidades de exploração do software e sugerir que seja feito um planejamento cuidadoso na elaboração de utilitários de acordo com as necessidades de cada conteúdo.

Dentro desta perspectiva, podem ser pensados em arquivos que permitem a visualização de propriedades como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero inscrito em uma circunferência ser constante, a soma dos lados opostos de um quadrilátero circunscrito também ser constante, a preservação da área quando temos triângulos de mesma base e o vértice oposto variando (desde que tenha a altura preservada), a perpendicularidade de uma reta tangente a uma circunferência com o raio da mesma no ponto de tangência, entre outros.

#### **4. Considerações Finais**

Devido ao caráter da proposta de disponibilização de materiais na rede, não temos, até o presente momento, instrumentos suficientes para avaliar o retorno do site por usuários que não sejam alunos, colegas ou pessoas próximas. Com este público obtivemos uma resposta positiva. Percebemos que os professores, alunos e futuros professores com os quais tivemos contato consultaram os utilitários sugeridos e alguns os utilizaram como inspiração para suas construções, o que está evidenciado na seção destinada a trabalhos de alunos.

A opção por compartilhar com professores e demais interessados atividades apoiadas na tecnologia e já utilizadas em nossas práticas, assim como promover um maior contato destes professores com o software, a partir de construções que os auxiliem em suas aulas, mostrou que tal prática deve ser incentivada, uma vez que interfere substancialmente na forma de abordagem com seus alunos, oportunizando momentos concretos de percepção e consequentemente de aprendizagem.

#### **REFERÊNCIAS**

BARANUSKAS, M. C. C., et. al. Uma taxonomia para ambientes de aprendizado baseados no computador. In: VALENTE, J.A. (Org.). *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999. p. 49-68.

BARCELOS, G. T., PASSERINO, L. M., BEHAR, P. A. , Redes sociais na internet: ambiente pessoal de aprendizagem na formação de professores iniciantes de matemática. *Revista Novas*

*Tecnologias na Educação*, Porto Alegre, v.9, n 1, julho, 2011. Disponível em: <<http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/21902/12706>>. Acesso em: 20/10/2011.

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

GRAVINA, M.A., et. al. Geometria Dinâmica na Escola. In: GRAVINA, M.A. et. al. (Orgs). *Matemática, Mídias Digitais e Didática – tripé para a formação de professores de Matemática*. Editora da UFRGS, 2011, p. 26-45.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O. Como usar a Geometria Dinâmica? O papel do professor e do aluno frente às novas tecnologias. In: Congresso da SBC, 26., 2006, Campo Grande. *Anais...* Campo Grande, SBC, 2006.

ZORZAN, A. S. L.; Ensino-Aprendizagem: Algumas tendências na educação matemática. In: GÜLLICH, R. I. C (Org.). *Educar pela pesquisa: Formação e processos de estudo e aprendizagem com pesquisa*, 2007.