UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2011, Número 26, páginas 57-71
ISSN: 1815-0640

A planilha como suporte à compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática

Elisabete Rambo Braga; Lorí Viali

Resumo

Esta investigação teve como objetivo a análise das potencialidades da planilha como recurso auxiliar na compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática. Como suporte teórico foi utilizado a teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval. As atividades de coordenação dos registros de representação algébrico, tabular e gráfico das funções tanto afim quanto quadráticas foram analisadas quanto a possibilidade de transferência entre esses registros. Concluiu-se que a utilização da planilha promoveu a compreensão desses conceitos no que diz respeito a mobilização entre as suas várias representações.

Abstract

This study investigated the spreadsheet potential as an auxiliary resource to facilitate the understanding of the concepts of linear and quadratic functions. The theory of semiotic representation registers of Raymond Duval was used as a theoretical framework. The activities of registers coordination involving the algebraic, tabular and graphical representation were analyzed concerning the possibilities of exchange among these registers. It was concluded that the spreadsheet promoted the comprehension of the concepts in regards to the mobilization among its representations.

Resumen

Este estudio tuvo como objetivo analizar el potencial de la hoja de cálculo como ayuda en la comprensión de los conceptos de funciones afín y cuadrática. Fue utilizado como soporte teórico la teoría de las representaciones semióticas de los registros de Raymond Duval. Las actividades de coordinación de los registros de la representación algebraica, de tabla y gráfica, tanto de la función afín cuanto cuadrática fueran analizadas cuanto la posibilidad de transferencias entre estos registros. Se concluyó que el uso de hojas de cálculo ha promovido la comprensión de estos conceptos con respecto a la movilización entre sus distintas representaciones.

1. Introdução

O estudo de funções, nas séries finais do ensino fundamental, tem como finalidade a observação de regularidades, a descrição de generalizações de padrões numéricos ou geométricos e a utilização da linguagem matemática para expressar fatos genéricos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p.81) reforçam essa idéia, ao destacar que no quarto ciclo (7ª e 8ª séries):

o ensino da Matemática deve visar o desenvolvimento do pensamento numérico, por meio de situações que levem o aluno a [...] observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Na educação básica, verifica-se, atualmente, que é dada ênfase na representação algébrica, ocasionando dificuldades na compreensão da variação entre as grandezas relacionadas entre si por uma lei física ou de formação. De acordo com Borba e Penteado (2005), as representações tabulares e gráficas praticamente não são utilizadas, devido à dificuldade em construí-las, empregando apenas os recursos de lápis e papel.

A Matemática, de forma mais ampla, visa ao desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento crítico, por meio do estudo das regularidades provenientes da observação do mundo real e das abstrações humanas. Nesse sentido, o aprendizado de funções contribui para o alcance de seus objetivos, à medida que possibilita aos alunos o desenvolvimento de formas de raciocínio e a comunicação, utilizando as representações algébrica, tabular e gráfica.

É com a ideia de discutir essas possibilidades de representações que nos propomos a analisar o uso da planilha, como um facilitador na aprendizagem da noção das funções afim e quadrática, baseando-se na teoria de Raymond Duval[1] dos Registros de Representações Semióticas[2].

2. A compreensão do conceito de função e a teoria de Duval

Por meio da análise histórica do desenvolvimento do conceito de função, percebe-se que essa noção foi reformulada e ampliada a partir de suas representações semióticas: algébrica, tabular e gráfica. De acordo com Duval (2003, p.13): "É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático."

Moura e Moretti (2003, p. 69) destacam que o desenvolvimento do conceito de função foi marcado por etapas:

Na Antiguidade há o estudo de casos particulares de dependência entre duas variáveis não havendo, contudo, a noção geral de quantidade variável e funções. Já na Idade Média estas noções gerais são expressas pela primeira vez sob a forma geométrica e mecânica, mas na qual cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definido por uma descrição verbal ou por um gráfico. E só no Período Moderno, final do século XVI e especialmente durante o século XVII, que expressões analíticas e funções começam a prevalecer. Estes estágios refletem, na realidade, o caminho percorrido pelo homem através da história rumo à generalização e à formalização do conceito de funções. O processo de abstração demonstra uma real e profunda compreensão do conceito ao mesmo tempo em que é fator de construção desta compreensão.

Ao analisar os referidos aspectos históricos verifica-se que as representações tabular, gráfica e algébrica estava presentes. E, portanto, a história da Matemática

[1] Filósofo e psicólogo francês, seus estudos são direcionados à psicologia cognitiva, enfatizando a atividade matemática e os problemas referentes à sua aprendizagem.
[2] Denominação utilizada para a ciência geral do signo; semiologia.

mostra a necessidade de se desenvolver o conceito de função por meio da articulação de suas representações e não como um enfoque isolado.

A atividade matemática consiste na mudança das representações, de forma intrínseca, por meio de dois tipos de transformações: tratamento e conversão (DUVAL, 2003; 2006). Para Duval (2003; 2006), os tratamentos são transformações de representações dentro de um único sistema de registro. As operações realizadas, em um mesmo sistema de notação, podem ser consideradas um exemplo de tratamento; enquanto que a transformação que exige uma mudança de registro, sem a troca do objeto, é denominada conversão. Esse aspecto é mais complexo que o tratamento, pois exige que o sujeito reconheça o objeto nas suas diferentes representações.

No caso das conversões, os estudantes podem não reconhecer o objeto ao articularem os diferentes tipos de registros, o que ocasiona dificuldades na compreensão do conceito envolvido, esse obstáculo na aprendizagem é denominado por Duval (2003, p. 15) de “fenômeno de não-congruência”.

Os objetos de estudos na matemática, diferentemente da física, da química, da biologia, e de outros domínios do conhecimento científico, não são acessíveis por meio da percepção ou de instrumentos. É necessária a utilização de uma linguagem simbólica e de suas representações semióticas para que os conceitos matemáticos sejam compreendidos Duval (1999; 2003; 2006). O mesmo autor afirma que, na Matemática, encontra-se a maior quantidade de representações semióticas, sendo que algumas são específicas desse domínio como a linguagem algébrica e as notações.

Verifica-se que as dificuldades dos alunos, na construção do conceito de função, concentram-se na não articulação entre duas ou mais representações de um mesmo objeto, restringindo-se, apenas, ao tratamento de um único tipo de registro. Em alguns casos, negligencia-se o fato de que o estudo das funções contempla os diferentes tipos de representação de forma intrínseca, optando-se por enfatizar apenas o aspecto algébrico.

O aluno compreende determinado tópico à medida que ele realiza a coordenação entre as representações, realizando as devidas conversões, isto é, modificando a forma como o conhecimento é representado, objetivando a complementaridade entre esses registros. Em consonância com a teoria de Duval, Damm (1999) enfatiza que não há construção de um determinado conhecimento matemático sem que haja mobilização entre seus registros.

É imprescindível a articulação entre duas representações de um mesmo tópico a fim de que haja apreensão do conceito. A mudança de registro não implica apenas a alteração da forma de tratamento de um mesmo objeto, mas, para haver a articulação entre esses aspectos, é necessário explicitar suas propriedades e diferenças, sendo essa uma condição essencial para a compreensão de um conceito (DUVAL, 2003).

O acesso a um determinado objeto matemático ocorre apenas por meio de sua representação, por isso é imprescindível que haja a distinção entre o objeto em questão e as suas representações. Ademais, de acordo com Duval (1999), para que haja o entendimento sobre um determinado tópico, de Matemática, não pode haver confusão entre o objeto e suas respectivas representações. Por exemplo, os números não devem ser identificados como dígitos e as figuras geométricas, mesmo construídas com precisão, representam casos particulares e não podem ser consideradas como provas para uma determinada propriedade.

Enfatiza-se, também, que ao fazer a transposição entre a representação algébrica de uma função e seu respectivo gráfico, diz-se que houve uma conversão da representação, conservando o objeto. Normalmente os gráficos são construídos no plano cartesiano a partir da localização de cada par ordenado, sendo que o valor da função f em um ponto (x, f(x)) é calculado por meio da expressão algébrica da função f. E, para a construção de uma nova representação gráfica, semelhante à anterior, todo o processo é repetido. No entanto, se forem consideradas todas as funções pertencentes a uma mesma "família", os demais gráficos podem ser construídos mediante movimentos geométricos, como, por exemplo, translação e simetria axial, possibilitando, dessa forma, a análise das alterações ocorridas na representação gráfica a partir da modificação dos parâmetros da expressão algébrica da função.

Moretti (2003, p.159) corrobora essa idéia ao afirmar que:

> [...] na translação de uma curva cuja forma já é conhecida, esse tipo de transformação pode contribuir para que o aluno perceba o traçado/eixo como uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica muito próxima de uma perspectiva preconizada nos trabalhos de Duval.

A tabela, o gráfico e a expressão algébrica de uma função propiciam uma representação parcial, com especificações próprias e, quando articuladas, permitem a complementaridade entre os registros, possibilitando a compreensão de novos aspectos sobre esse objeto de estudo.

3. A Planilha e a compreensão do conceito de função

Encontram-se disponíveis no mercado diversos programas que podem ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Muitos deles, apesar de apresentarem, em sua interface, bons recursos de hipermídia, reproduzem modelos tradicionais de ensino, nos quais os alunos testam seus conhecimentos, respondendo a exercícios repetitivos ou do tipo tutorias, lêem definições e propriedades, para, então, responder a questões relacionadas ao assunto tratado. Dentro da perspectiva de que o aluno é o construtor do próprio conhecimento matemático, existem programas em que é possível elaborar conjecturas, testar hipóteses, estabelecer relações e generalizar.

Em consonância com essa concepção, Morgado (2003) subdivide esses programas em dois subgrupos. Na primeira categoria, encontram-se os softwares projetados para fins educacionais e que podem ser utilizados como recursos pedagógicas. Dentre eles, destacam-se: Cabri-Géomètre, Modellus, Graphmatica, Logo e o Winplot. No segundo subgrupo, têm-se os aplicativos produzidos com finalidades mais amplas e que podem ser explorados com fins educativos. São os construtores e transformadores gráficos, calculadores numéricos, programas que viabilizam a criação e manipulação de banco de dados e as planilhas.

A planilha possui uma gama extensa de funções e fórmulas pré-programadas. As categoriais são divididas em: financeira, data e hora, matemática e trigonométrica, estatística, procura e referência, banco de dados, texto, lógica e engenharia. Isto facilita a utilização desse software no ensino fundamental e médio, pois praticamente não existe a necessidade de programação ou da utilização de comandos complexos. Nesse aspecto o aplicativo possui ainda a virtude de ter uma sintaxe simples e de fácil compreensão.

Morgado (2003, p 26) enfatiza a perspectiva de interação, ao fazer uso da planilha em atividades educacionais:

> É importante ressaltar que as construções por meio de planilhas eletrônicas possibilitam interatividade, ou seja, uma relação dinâmica entre as ações do aluno e as reações do ambiente, resultado de suas operações mentais. Os objetos matemáticos que podem ser representados na tela do computador (fórmulas, tabelas, gráficos, etc.) constituem-se na materialização de ações mentais dos alunos, utilizando os comandos disponíveis pelo aplicativo.

Devido à possibilidade de escrever equações em sintaxe própria e simples, executar cálculos com rapidez e propagar as atualizações e alterações de forma automática, é possível que o usuário se concentre no assunto principal sem perder o foco em outras tarefas auxiliares e paralelas. O software permite a construção gráfica, viabilizando a coordenação das múltiplas representações de uma função e, conseqüentemente, possibilitando a compreensão desse conceito. Além disso, alguns aspectos como, por exemplo, a translação e simetria de funções, podem ser facilmente construídas, com base nas vantagens mencionadas acima. Essas características, aliadas ao recurso de criação de gráficos, são aliados que facilitam o aprendizado.

4. Metodologia

Esta pesquisa foi desenvolvida de acordo com o paradigma pós-positivista, uma vez que, nessa concepção, a realidade é construída a partir da relação pesquisador/co-pesquisadores. Nesse modelo, o pesquisador participa do processo de forma gradual, pois está inserido no contexto em que se realiza a investigação.

A investigação utilizou-se da abordagem naturalística – construtiva. Nessa concepção, os sujeitos envolvidos - pesquisador e demais participantes - são considerados construtores da realidade, sendo valorizados seus conhecimentos prévios e suas percepções. Há, portanto, a superação da neutralidade: aspecto que permite ao pesquisador ser o principal responsável pela coleta de dados. Tais informações são, então, reunidas a partir do envolvimento com os fenômenos e são organizadas em categorias emergentes, objetivando a descrição, a interpretação e a teorização de forma a compreendê-las gradualmente.

A investigação foi desenvolvida com alunos da 8ª série (a grande maioria com idade de 14 anos) do ensino fundamental de uma escola particular de Porto Alegre. Esse estabelecimento apresenta cinco turmas desse nível, com cerca de trinta alunos cada uma. Há quatro Laboratórios de Informática, todo com dezoito computadores, todos com acesso à Internet. Os educandos utilizam os recursos computacionais de forma sistemática sob a orientação dos professores com atividades específicas em cada disciplina.

Inicialmente, foi aplicado um questionário composto por perguntas fechadas e algumas abertas com o objetivo de coletar informações dos participantes. O instrumento de coleta foi dividido em cinco partes. A primeira tendo como objetivo conhecer o perfil dos alunos participantes em relação às atividades mais freqüentes realizadas no computador e a média de horas diárias dedicadas à realização dessas tarefas. Já na segunda parte o propósito foi verificar a freqüência com que eram utilizados o processador de texto, a planilha, o software de apresentação, o correio eletrônico e o navegador, bem como a de levantar outras tecnologias que os estudantes poderiam estar utilizando. O terceiro bloco de perguntas destinou-se a apreciar a constância com que eram usados softwares específicos para a Matemática. A quarta parte destinou-se a verificar os conhecimentos dos respondentes em relação a planilha. O último bloco teve como propósito a identificação de algumas variáveis intervenientes no processo como a idade e o sexo dos respondentes, o ano de ingresso na escola e a escolaridade dos pais.

Ao se realizar a análise do questionário aplicado, constatou-se que os estudantes apresentam características semelhantes, tanto no que se referia ao uso do computador em suas atividades diárias e ao domínio de aplicativos, como também no que diz respeito ao conhecimento de recursos computacionais específicos para a aprendizagem da Matemática. Em função dessa homogeneidade das turmas, foram selecionados trinta alunos, de acordo com seus conhecimentos sobre a planilha. O grupo foi formado por quinze meninos e quinze meninas, sendo que doze deles nunca haviam trabalhado com a planilha, onze, algumas vezes, dois, com freqüência e cinco não tinham tido sequer conhecimento a respeito de tal recurso.

Assim a análise de toda as atividades realizadas foi feita a partir dos protocolos escritos desses trinta alunos. Nesse grupo, há discentes que apresentam características diferenciadas quanto ao conhecimento da planilha e à utilização desse recurso, objetivando-se, com isso, a investigação da apreensão do conhecimento de função numa classe heterogênea em relação a tais aspectos.

Embora a presente pesquisa seja de cunho qualitativo, a opção pela aplicação do primeiro questionário foi motivada pela necessidade de caracterizar inicialmente o grupo, quanto ao uso da tecnologia de informação e comunicação, para, então, selecionar um grupo menor de alunos, considerando a variável interveniente: familiaridade com o recursos computacionais, em especial com a planilha.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 117):

> [...] os questionários podem servir como uma fonte complementar de informações, sobretudo na fase inicial e exploratória da pesquisa. Além disso, eles podem ajudar a caracterizar e a descrever os sujeitos do estudo, destacando algumas variáveis [...].

Conforme Minayo (1998, p. 22): “O conjunto de dados quantitativos e qualitativos, porém, não se opõem. Ao contrário, se complementam, pois a realidade abrangida por eles interage dinamicamente, excluindo qualquer dicotomia”.

5. Apresentação e análise de atividades referentes às funções de primeiro e segundo graus

Estas atividades tiveram como objetivo proporcionar situações de aprendizagem que privilegiassem a complementaridade entre os registros algébrico, tabular e gráfico das funções afim e quadrática, conforme preconiza a teoria de Duval. Essa proposta foi efetivada mediante a utilização de um aplicativo, construído pela pesquisadora, que permite ao usuário visualizar as alterações tabulares e gráficas ocorridas, de forma simultânea, por meio da modificação dos parâmetros dessas funções. Damm (2008, p. 185) reforça a importância de se propiciar aos estudantes o trabalho com as diversas representações de um mesmo objeto, exemplificando essa posição por meio do desenvolvimento do conceito de função.

Por exemplo, quando trabalhamos com as funções, os gráficos, as tabelas e as equações são todos registros parciais desse objeto. Cada um desses registros é parcial e possui uma especificação própria. Perceber essas especificidades a cada registro e reforçá-las é um caminho para o entendimento do objeto como um todo.

Para a aplicação das tarefas, foram disponibilizados dois períodos de 50 minutos: um no turno da manhã e outro no da tarde. Ressalta-se, ainda, que um dos participantes não compareceu à aula nesse dia e que dois estiveram presentes apenas pela manhã, desse modo, seus roteiros ficaram incompletos.

A seguir, apresenta-se a descrição do aplicativo, abordando aspectos da sua construção e da sua utilização.

5.1. Descrição do aplicativo

O aplicativo para o estudo da função afim e quadrática foi desenvolvido sobre a a planilha Excel. Ele pode ser caracterizado por uma interface visível ao usuário, denominada de *front-end* e comandos ocultos denominados de *back-end*. O *front-end* é constituído por uma interface, em que se visualiza as representações das funções e por um formulário destinado a reunir e configurar as informações a serem usadas em cálculos e análises). O *back-end* consiste de vários procedimentos envolvendo algoritmos responsáveis pelo cálculo dos pontos utilizados na representação gráfica, pelo cálculo das raízes das funções (y = 0) e pela análise dos resultados. Para isto foram utilizadas funções do tipo SE ... ENTÃO ... encadeadas.

A planilha é um programa que fornece um ambiente (framework) computacional muito favorável para aplicativos dessa natureza, visto que a interação entre o front-end (formulário de interface) e o *back-end* (comandos ocultos) dá-se de modo simples e direto, bastando algumas vinculações entre células. No formulário (*front-end*), também foram utilizados controles (pequenos aplicativos que podem ser customizados), disponíveis na planilha, para variar os coeficientes das funções.

A interface do aplicativo é composta por três barras de rolagem (que determinam os valores dos coeficientes tanto da função afim quanto da quadrática), por uma tabela com valores pré-definidos para a variável independente e com os respectivos valores da variável dependente, calculados automaticamente e, finalmente, por um plano cartesiano, no qual são construídos os gráficos vinculados à referida tabela. Destaca-se, ainda que os usuários têm acesso aos zeros das funções, ao valor do discriminante (com a sua análise) juntamente com as coordenadas do vértice da função quadrática.

O conjunto de valores assumidos pelos parâmetros de cada função é formado por números inteiros entre -50 e 50. Eles podem ser modificados mediante cliques nas setas das barras de rolagem, ou então, arrastando-se o cursor à direita ou à esquerda. As modificações tabulares e gráficas são realizadas automaticamente pelo aplicativo, na medida, em que os parâmetros (coeficientes) são manipulados.

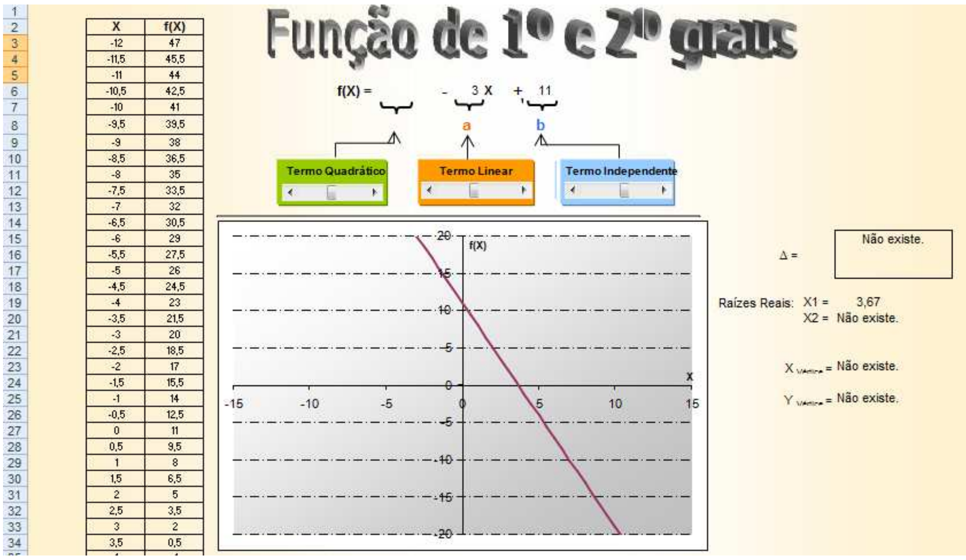

Figura 1 – Interface do aplicativo, exemplificando uma função afim

A Figura 1 exemplifica as representações algébrica, tabular e gráfica da função afim, enquanto que a

Figura **2** mostra um exemplo de uma função quadrática construídas com o recurso do aplicativo. Convém ressaltar que o aplicativo foi disponibilizado na intranet da escola e utilizado de maneira compartilhada por todos os alunos participantes ou não do experimento.

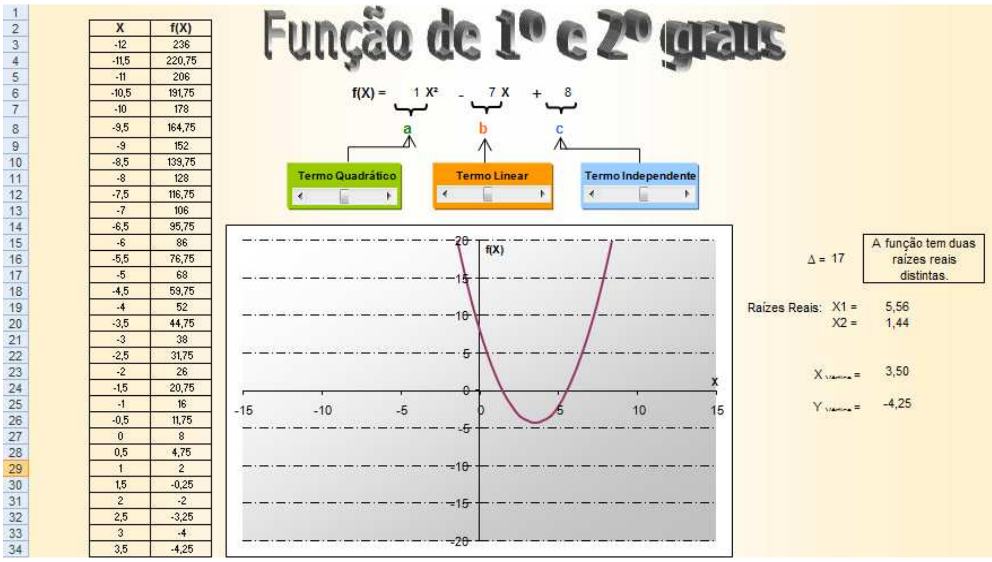

Figura 2 – Interface do aplicativo, exemplificando uma função quadrática

5.2 Apresentação e análise das atividades

As atividades foram introduzidas por meio de uma explicação sobre a utilização do aplicativo. *O aplicativo a ser utilizado nesta atividade visa à construção gráfica de funções de 1º e 2º graus, a partir da modificação dos parâmetros das respectivas funções. Para tanto, basta clicar nas setas de cada um dos termos: a da direita faz com que o coeficiente aumente o seu valor, e a da esquerda, diminua. Ou, então, podes movimentar a barra de rolagem para a direita ou para a esquerda.*

Num primeiro momento, os estudantes foram orientados a alterar os parâmetros das funções e a observar as modificações na tabela e no gráfico, a fim de se familiarizarem com os recursos disponibilizados pelo aplicativo. Nessa ocasião, os alunos foram incentivados a comparar as funções afim e quadrática, por meio da análise dos pontos de intersecção com os eixos das ordenadas e abscissas e do crescimento e/ou do decrescimento nas suas diferentes representações.

a) Utiliza o aplicativo para construir os gráficos das funções de 1º grau, determinadas nas atividades a_1, a_2 e a_3, e completa-as a seguir.

Atividade a_1 Função	O gráfico intercepta o eixo-y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo- x ? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?
f(x) = -10x				
f(x) = -5x				
f(x) = x				
f(x) =5 x				
f(x) = 10x				

Após essa exploração inicial, os discentes foram orientados a responder o roteiro, a seguir, composto por seis tabelas (três sobre função de 1º grau e três sobre de 2º grau) e por seis questões, que visavam à apreciação das regularidades apresentadas em cada uma das funções analisadas.

Dos vinte e nove respondentes, 58,6% responderam corretamente todos os itens da tabela acima; 17,2% escreveram, de forma incorreta, as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico com os eixos, colocando apenas “0”. Houve, ainda, 10,3% que analisaram a função f(x) = 0 e não f(x) = x, conforme solicitado.

Destaca-se que 3,4% completaram a tabela conforme descrição feita nos dois itens anteriores e que outros 3,4% consideraram, erroneamente, f(x) = x e f(x) = 10x decrescente.

***a_{11})** Tu deves ter verificado que, quanto maior é o coeficiente **a** (coeficiente angular), maior é a inclinação da reta. Além disso, essas funções são sempre crescentes ou decrescentes. Qual a relação existente entre o coeficiente **angular** das funções de 1º grau e oseu crescimento ou o decrescimento?*

Dentre os participantes, 76% afirmaram que, quando o coeficiente angular é positivo, a função é crescente e, quando é negativo, é decrescente. Enquanto que 10,3% alunos analisaram o ângulo de inclinação das retas, descrevendo que, quanto maior fosse o coeficiente a, maior seria o ângulo de inclinação com o eixo das abscissas e menor será o ângulo em relação às ordenadas. Já, 10,3% dos estudantes, fizeram a apreciação de forma incorreta e 3,4% não responderam à questão.

Atividade a_2 Função	O gráfico intercepta o eixo y ? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta a o eixo x ? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?
f(x) = x - 15				
f(x) = x - 10				
f(x) = x				
f(x) = x + 10				
f(x) = x + 15				

Inicialmente, foram analisadas e categorizadas as respostas dadas às duas primeiras colunas da tabela a_2, conforme mostra a Tabela 1:

Fazem parte da Categoria A as respostas que determinam as coordenadas do ponto de interseção com o eixo das ordenadas do tipo (0, y) e com o eixo das abscissas (x, 0). Foram reunidas, na Categoria B, as respostas que escreveram, de forma incorreta, as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico com os eixos, colocando apenas o valor de x para a interseção com a abscissa e o valor y para a ordenada.

Na Categoria C, os alunos responderam incorretamente sobre o ponto de intersecção dos gráficos das funções f(x) = x -14 e f(x) = x + 15 com o eixo-x, visto que, no aplicativo, esses pontos não são obtidos por meio de inspeção visual. Para Duval (1999), não há entendimento de um determinado objeto sem sua visualização. Para esse autor, a visão permite o acesso direto ao objeto, enquanto a visualização é baseada "na produção de uma representação semiótica" (DUVAL, 199, p. 13) e torna visível tudo aquilo que não é acessível pela visão. Na Categoria D, fazem parte as respostas que apresentam, simultaneamente, as características das Categorias B e C. Enquanto que na Categoria E, foram reunidas as respostas que apresentam todas as coordenadas invertidas, do tipo (y, x). E, por fim, na Categoria F, tem-se essa mesma inversão apenas para as duas últimas funções.

Tabela 1 – Distribuição das respostas do item a_2

Categorias	Alunos	Percentual
A – Responderam corretamente todos os itens	14	48,4
B – Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos, omitindo a coordenada "0" em ambos os casos	3	10,3
C – Consideraram que as funções f(x) = x – 15 e ef(x) = x + 15 não interceptam o eixo das abscisas	6	20,7
D – Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos, omitindo a coordenada "0" em ambos os casos e consideraram que as funções f(x) = x – 15 e f(x) = x + 15 *e* não interceptam o eixo das abscisas	1	3,4
E – Inverteram as coordenadas dos pontos em todos os itens	1	3,4
F – Inverteram as coordenadas dos pontos nos dois últimos itens	2	6,9
G – Responderam, corretamente, apenas para a função f(x) = x	2	6,9
Total	29	100,0

Nas respostas dadas às duas últimas colunas, observou-se que 72,5% dos estudantes responderam corretamente todos os itens; 17,3% consideraram, de maneira incorreta, as duas últimas funções decrescentes; 3,4% avaliaram incorretamente as duas primeiras; e outros 3,4%, as três primeiras, também considerando-as decrescentes. Os demais responderam incorretamente todos os itens.

***a_{21})** Qual a relação existente entre o coeficiente **b** (coeficiente linear) das funções afins e seus respectivos gráficos?*

Apenas um aluno identificou que o coeficiente linear determina o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e define quantas unidades o gráfico translada para cima (b > 0) ou para baixo (b < 0) no referido eixo. Enquanto que 31% dos integrantes fizeram referência que o coeficiente "b" determina o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas e 38,1% mencionaram a translação ocorrida no gráfico no eixo das ordenadas, mediante a alteração do coeficiente "b".

Já 6,9% dos alunos destacam que os gráficos são paralelos entre si, sem mencionar a função do coeficiente "b". Observou-se, também, que 10,3% identificaram que as funções afins da tabela a_2 são estritamente crescentes, sem determinar a relação existente entre seus coeficientes lineares e os respectivos gráficos. Outros 10,3% responderam de forma incorreta ou não responderam à questão.

Atividade a_3 Função	O gráfico intercepta o eixo-y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo-x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?
f(x) = -15				
f(x) = -10				
f(x) = 0				
f(x) = 10				
f(x) = 15				

Em relação às respostas dadas na tabela a_3, verificou-se que todos os alunos reconheceram que as funções não são crescentes, nem decrescentes. Consequentemente, serão apreciadas as respostas dos itens que analisam os pontos de interseção dos gráficos com os eixos.

Nas respostas dadas às duas primeiras colunas, observou-se que 31% dos discentes responderam de forma precisa, identificando os pontos de intersecção por meio de pares ordenados. Verificou-se que 6,9% dos participantes reconhecem o ponto de intersecção, embora esses não tenham sido identificados mediante um par ordenado. Já 38,1% identificam apenas um ponto de intersecção do gráfico da função f(x) = 0 com o eixo-x, não havendo a percepção de que o respectivo gráfico coincide com o eixo das abscissas em todo o conjunto dos números reais.

Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com o eixo das ordenadas, omitindo a coordenada “0” e, para f(x) = 0, identificaram que o ponto de intersecção com o eixo das abscissas é apenas (0, 0) 13,7% dos participantes. E, 6,9% dos alunos, não identificaram nenhum ponto de intersecção da função f(x) = 0 com o eixo das abscissas. Não responderam 3,4% dos estudantes.

***a_{31})** Além do fato de serem retas, o que os gráficos construídos na atividade a_3 têm em comum?*

As respostas à questão a_{31} foram organizadas e categorizadas e são apresentadas na.

Tabela 2 – Distribuição das respostas do item a_{31}

Categorias	Alunos	Percentual
A – Reconheceram que os gráficos são paralelos ao eixo das abscissas	8	27,7
B – Reconheceram que os gráficos são paralelos ao eixo das abscissas e perpendiculares ao eixo das ordenadas	2	6,9
C – Identificaram que os gráficos cruzam o eixo das ordenadas	2	6,9
D – Identificaram que apenas a função f(x) = 0 intercepta o eixo das abscissas	2	6,9
E – Identificaram o movimento de translação ocorrido nos gráficos a partir da modificação do coeficiente "b"	4	13,8
F – Identificaram que os gráficos não são decrescentes nem crescentes	7	24,1
G – Responderam de forma incorreta	3	10,3
H – Não responderam	1	3,4
Total	29	100,0

Encontram-se, na Categoria A, as respostas que identificaram que os gráficos são paralelos ao eixo-x. Na Categoria B é ressaltado que os gráficos são paralelos ao eixo das abscissas e, também, perpendiculares às ordenadas. Na Categoria C, têm-se as respostas que mencionam que os gráficos interceptam o eixo-y em um único ponto. Na E, as respostas reconhecem que, na função f(x) = 0, o gráfico coincide com a abscissa. Na Categoria F, as respostas identificam que as funções são constantes, sem que seja feito uso dessa nomenclatura.

As funções do tipo y = b são denominadas funções constantes.

A partir da questão b, a seguir, serão analisados vinte e sete protocolos de registros dos alunos, visto que dois deles não compareceram à segunda aula destinada à realização da presente atividade.

***b)** Utiliza o aplicativo para construir os gráficos das funções de segundo grau, determinadas nas tabelas b_1, b_2 e b_3, e completa-as a seguir.*

Atividade b_1 Função	O gráfico intercepta o eixo y ? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x ? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?	Coordenadas do vértice
$f(x) = x^2$					
$f(x) = 5x^2$					
$f(x) = 10x^2$					
$f(x) = 20x^2$					

De maneira geral, os estudantes não apresentaram dificuldades em completar a tabela acima, todos responderam corretamente todos os itens. Desses, 48,1% utilizaram-se da linguagem algébrica para responder para quais valores de x as funções são crescentes e decrescentes, enquanto que 29,6% usaram a linguagem natural.

Ainda não escreveram os pontos de intersecção com os eixos de maneira adequada 22,2% dos respondentes: sendo que, dentre esses, 50%, utilizaram a linguagem algébrica nas duas últimas colunas, e outros 50% fizeram uso da linguagem natural.

***b_{11})** Compara os gráficos construídos na **tabela b_1**. O que acontece com o gráfico da função $f(x) = x^2$ à medida que aumentamos o valor de seu coeficiente?*

A Tabela 3, a seguir, mostra a categorização feita a partir da apreciação das respostas a questão b_{11}.

Tabela 3 – Distribuição das respostas do item b_{11}

Categorias	Alunos	Percentual
A – Reconheceram que a abertura da parábola diminui à medida que o coeficiente a aumenta	20	74,1
B – Identificaram que o gráfico se aproxima do eixo das ordenadas	4	14,8
C – Responderam de forma incorreta	3	11,1
Total	27	100,0

A Figura 3 exemplifica as respostas da Categoria A:

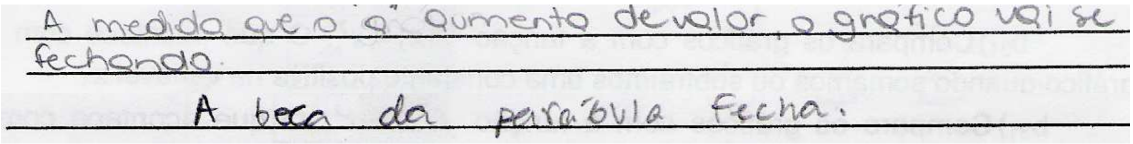
A medida que o a aumento de valor, o grafico vai se fechando.
A boca da parábola fecha.

Figura 3 – Protocolo de registro de aluno – item b_{11} – Categoria A

Enquanto, na Figura 4, tem-se um exemplo de resposta da Categoria B:

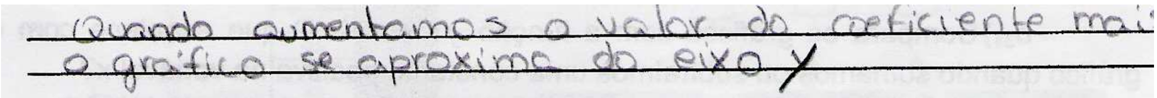
Quando aumentamos o valor do coeficiente mai
o gráfico se aproxima do eixo y

Figura 4 – Protocolo de registro de aluno – item b_{11} – Categoria B

Atividade b_2 Função	O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?	Coordenadas do vértice
$f(x) = x^2 - 15$					
$f(x) = x^2 - 10$					
$f(x) = x^2$					
$f(x) = x^2 + 10$					
$f(x) = x^2 + 15$					

Verificou-se que 55,6% dos participantes responderam a todos os itens corretamente, fazendo uso da linguagem algébrica para completar a terceira e quarta colunas e 18,5% também responderam de forma correta, utilizando a linguagem natural para responder a terceira e quarta colunas. Responderam de forma incompleta as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e utilizaram a linguagem algébrica para completar a terceira e quarta colunas 11,1% dos estudantes. Enquanto que 11,1% dos discentes responderam de forma incorreta e 3,7% não responderam.

b_{21}) *Compara os gráficos construídos na* ***tabela b_2*** *com a função $f(x) = x^2$. O que acontece com os gráficos quando somamos ou subtraímos uma constante positiva para obter uma nova função?*

A análise dos protocolos revelou que 55,6% dos alunos reconheceram que o gráfico translada conforme é somada ou subtraída uma constante positiva; 7,4% identificaram que a coordenada y do vértice é positiva, quando é somada uma constante positiva, e negativa, quando é subtraída uma constante positiva; 3,7% perceberam que a coordenada y do vértice é negativa, quando é subtraída uma constante positiva; outros 3,7% perceberam que, quando é somada uma constante positiva, o gráfico não intercepta o eixo das abscissas e, quando é subtraída uma constante positiva, o gráfico intercepta o eixo. Enquanto que 7,4% fizeram referência ao movimento de translação ocorrido e 22,2% responderam de forma incorreta ou não responderam.

Dica: *Para utilizar o aplicativo, deves, primeiramente, desenvolver os produtos notáveis das funções.*

Atividade b_3 Função	O gráfico intercepta o eixo y ? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x ? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?	Coordenadas do vértice
$f(x) = (x - 7)^2$					
$f(x) = (x - 5)^2$					
$f(x) = x^2$					
$f(x) = (x + 5)^2$					
$f(x) = (x + 7)^2$					

Em relação à primeira questão da tabela acima, dentre os vinte e sete protocolos analisados 33,3% responderam corretamente, identificando o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas como sendo (0, c), em que "c" é o termo independente da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Entretanto, 51,8% dos alunos afirmaram que não há ponto de interseção das funções, com exceção de $f(x) = x^2$, uma vez que não é possível observar esses pontos na construção gráfica disponibilizada pelo aplicativo. Destaca-se, ainda, que 14,8% não responderam essa questão. Os demais itens da tabela foram respondidos de maneira correta, por 77,8% dos participantes; de forma incorreta, por 7,4%; e não responderam 14,8%.

b_{31}) *Compara os gráficos com a função $f(x) = x^2$. O que acontece com o gráfico quando somamos ou subtraímos uma constante positiva na variável x?*

A respeito dessa questão, 55,5% dos alunos fizeram referência ao movimento de translação sobre o eixo das abscissas, enquanto que 44,4% responderam de forma incorreta ou não responderam. A Figura 5, abaixo, exemplifica as respostas corretas.

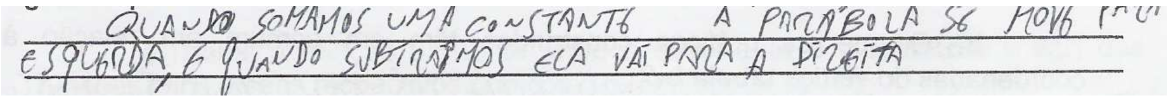
QUANDO SOMAMOS UMA CONSTANTE A PARÁBOLA SE MOVE P
ESQUERDA, E QUANDO SUBTRAÍMOS ELA VAI PARA A DIREITA

Figura 5 – Protocolos de registros de alunos – item b_{31}

6. Considerações finais

Ao fazer uso da planilha, a conversão entre os diferentes tipos de registros de uma função é facilitada, possibilitando, assim, a experimentação, a visualização e a transposição de suas representações algébricas, tabulares e gráficas de forma dinâmica. Na construção gráfica em mesmo plano cartesiano, os estudantes, às vezes, digitavam de forma incorreta alguma das fórmulas que definiam a família de uma determinada função. Ao analisarem a referida construção, esses alunos percebiam que havia algum erro, pois a representação gráfica não mantinha as características dessa família de curvas. Ao fazerem essa apreciação, os alunos selecionavam o intervalo de células onde fora escrita a expressão algébrica e podiam corrigir algum erro cometido nessa fórmula através de reedição do conteúdo da primeira célula e da propagação da correção para as demais e, dessa forma, o software atualizava o gráfico automaticamente. Esse recurso permitiu, então, que os usuários observassem, instantaneamente, o efeito das alterações.

Constatou-se que as atividades, baseadas na transposição entre as diversas representações de uma função, aliadas à utilização da planilha, possibilitaram uma interpretação global das variáveis. Isto permitiu que os alunos se detivessem no entendimento das alterações gráficas ocorridas a cada modificação paramétrica e não na construção gráfica por intermédio de várias substituições na expressão algébrica, como ocorre no trabalho feito com o uso de lápis e de papel.

A utilização desse aplicativo permitiu um estudo global e qualitativo das funções de 1º e 2º graus, explorando a conversão entre suas representações e, desse modo, manipulando variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada um dos registros algébrico, tabular e gráfico.

Bibliografia

Borba M. de C., Penteado M. (2005): *Informática e Educação Matemática.* Autêntica, Belo Horizonte, Brasil.

BRASIL (1998): Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática - 3º e 4º Ciclos. Brasília, Brasil.

Damm R. (1999). Registros de representação.In: S. D. A. Machado (org.). *Educação Matemática: uma introdução*. 135-153. EDUC, São Paulo, Brasil.

Duval Raymond (1999).Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *The Psycology of Mathematics Education* v.1, n. 1, 2-26.

Duval, R (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: S. D. A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Papirus, Campinas, Brasil.

Duval, R. (2006).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.*Educational Studies in Mathematics*, v. 61, n. 1, 103-131.

Fiorentini Dario; Lorenzato Sergio (2006): *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Autores Associados, Campinas, Brasil.

Minayo M. C. de Souza (1998).Ciência, Técnica e Arte: O Desafio da Pesquisa Social. In: M. C. de Souza Minayo (Org.). *Pesquisa Social: teoria método e criatividade.* 9-29. Vozes, Petrópolis, Brasil.

Morgado M. J. L. (2003). Formação de professores de matemática para o uso pedagógico de planilhas eletrônicas de cálculo de análise de um curso a distância via Internet. 2003. 284 f. Tese (Doutorado em Educação) - UFSC, Florianópolis.

Moura M. O. de, Dias Moretti V. (2003). Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. Ciência & Educação, v. 9, n. 1, 67-82.

Moretti M. T. (2003).A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In:, S. Dias A. Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.* 149-160. Papirus, Campinas, Brasil.

Elisabete Rambo Braga. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela PUCRS. Professora do colégio Farroupilha. erambo@ibest.com.br

Lorí Viali. Doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina, com doutorado sanduíche na University of South Florida, Tampa, FL. Professor permanente do EDUCEM (Mestrado em Educaçào em Ciências e Matemática da PUCRS). Professor Titular da Faculdade de Matemática da PUCRS. Professor Adjunto do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. viali@pucrs.br, viali@mat.ufrgs.br