

---

## **Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar**

---

### **Marcelo Cavasotto**

Professor, PUCRS/Faculdade de Física

marcelo\_cavasotto@yahoo.com.br

### **Lori Viali**

Professor, UFRGS

viali@puers.br

### **Resumo**

Este artigo relata uma investigação sobre as dificuldades no processo de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, para o qual foi adotada a metodologia de Análise de Erros. Tal investigação foi realizada em uma universidade da rede privada e foram analisadas as provas realizadas por estudantes de duas turmas de Cálculo no decorrer do semestre, além de terem sido entrevistados alunos, monitores e professores da disciplina. Esse estudo permitiu concluir que o maior obstáculo enfrentado pelos educandos não está nos conteúdos específicos do Cálculo, mas sim nos conhecimentos da Matemática básica, estudados nos níveis Fundamental e Médio.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Ensino e Aprendizagem de Cálculo. Análise de Avaliações. Análise de Erros. Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo.

---

## **Difficulties in learning calculus: what the errors may suggest**

---

### **Abstract**

This article reports an investigational approach to Differential and Integral Calculus learning process in which an Error Analysis was adopted as a method. The study was carried out in a private university and the test results from two Calculus classes were analyzed throughout the semester. Students, monitors and professors went through an interview process, as well. This research concluded that the greatest obstacle faced by students in this discipline is not the specific content of calculus, but the basic knowledge of mathematics, which is studied in the elementary and high levels.

**Keywords:** Mathematics Education. Calculus Teaching and Learning. Evaluation Analysis. Error's Analysis. Difficulties in Understanding Calculus.

## **1. INTRODUÇÃO**

Nas últimas décadas, podemos perceber um movimento crescente de reflexões a respeito de temas relacionados à Educação Matemática. A variedade de tópicos é grande e abrange todos os níveis de ensino nos aspectos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático. No ensino superior, conforme Malta (2004), a maioria das preocupações converge para as disciplinas iniciais, na área das ciências exatas.

Pode-se afirmar, baseando-se na comunicação informal que ocorria entre professores de nossas melhores universidades, que a atenção para essa questão foi provocada pelo crescente índice de reprovação nas disciplinas básicas, em especial as disciplinas de Cálculo. (MALTA, 2004, p. 41).

Especificamente sobre o ensino de Cálculo, existem muitas linhas de pesquisa já contempladas e outras em desenvolvimento. Em uma investigação inicial, ao consultar dissertações cujos focos estavam em questões relativas ao ensino dessa disciplina, percebemos que embora exista preocupação com os índices de reprovação e sejam propostas alternativas metodológicas, ficou uma lacuna no sentido de tentar compreender que tipos de obstáculos, especificamente, os alunos não conseguem vencer. Muito se discute sobre o assunto, em geral os discursos giram em torno de críticas em relação à qualidade de ensino nos níveis Fundamental e Médio. Mas, como podemos perceber isso não tem ajudado, de uma forma efetiva ao menos, na mudança deste quadro. Ainda que se propusessem alterações significativas nos níveis Fundamental e Médio teríamos uma geração de estudantes em déficit com a aprendizagem, sem falar na questão do quanto é difícil propor e executar tais mudanças.

Por não acreditarmos que os conteúdos específicos da disciplina sejam o principal obstáculo propusemos este estudo. A intenção foi refletir sobre as dificuldades dos alunos, tentando localizá-las de acordo com o nível de ensino, bem como proporcionar reflexões sobre modalidades de serviço de apoio ao ensino de Cálculo, que poderiam ser propostas para a superação desse problema.

## **2. A ANÁLISE DE ERROS**

A primeira etapa da investigação consistiu em tentar entender os tipos de dúvidas que os estudantes apresentam nas disciplinas iniciais de Cálculo. Quando se fala em dificuldades de aprendizagem a primeira lembrança que nos vem são os erros cometidos pelos alunos. Embora existam muitos fatores que influenciam no nível de aprendizagem, tais como, por exemplo, hábitos de estudo, aspectos psicoemocionais e situação sócio-econômica, é possível entender muitas das dificuldades por meio da análise de erros.

Em todas experiências de uso dos erros, relatadas por Borasi, destacam-se as discussões, registradas pela pesquisadora, que permitiram não só o desenvolvimento de sua própria pesquisa sobre uso dos erros, como também a utilização desses erros para o ensino de Matemática. Nesse sentido é que Borasi (1996, p.3) considera serem os erros “oportunidades para a aprendizagem e pesquisa”, afirmativa com a qual concordo e na qual me baseio para o desenvolvimento de pesquisas na área, bem como no uso que tenho feito dos erros durante mais de duas décadas. (CURY, 2007, p. 38).

Podemos atribuir à análise de erros, enquanto linha de pesquisa, um caráter diagnóstico. De acordo com Cury (2007) é possível entender como se dá o processo de construção do conhecimento por parte dos alunos por meio de suas produções escritas. Assim, a partir dessas produções podemos compreender as dificuldades com relação aos conteúdos e, então, torna-se viável a elaboração de estratégias efetivas para a superação de tais dificuldades.

As ações diagnósticas buscam construir um conhecimento sistematizado sobre as necessidades e dificuldades dos alunos, visando ao aprimoramento das abordagens no ensino do Cálculo. O conhecimento construído através desses estudos [...] poderá contribuir para a elaboração e implementação de estratégias didáticas mais efetivas [...] permitindo uma articulação entre conhecimentos prévios e novos, a superação de noções mais ingênuas por noções mais elaboradas e o desenvolvimento das habilidades necessárias ao uso dessas noções na resolução de problemas. (DOERING, C. I.; NÁCUL, L. B. C.; DOERING, L. R.; 2004, p. 220).

## **2.1. A análise de erros enquanto linha de pesquisa**

Conforme Cury e Cassol (2004), a análise de erros como abordagem de pesquisa em Educação Matemática pode ser apresentada nas formas de identificação e classificação, identificação e classificação com consequências e diagnóstica.

### **2.1.1. Identificação e classificação**

O foco da pesquisa está direcionado para a detecção e classificação dos erros cometidos pelos alunos, sendo que, na maioria das vezes, a análise dos mesmos se coloca apenas como uma forma de criticar os estudantes ou ainda o ensino que receberam. Em geral, não há a preocupação em investigar as causas dos erros, nem mesmo é cogitada a possibilidade de aproveitá-los.

### **2.2.2. Identificação e classificação com conseqüências**

Nesse segundo tipo, de forma análoga ao anterior, também ocorre a detecção e classificação dos erros. No entanto, a preocupação maior está relacionada com as causas e as conseqüências destes erros, levando em consideração os conteúdos, a origem das dificuldades, as concepções dos alunos, bem como as implicações deste problema no processo de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático.

### **2.2.3. Diagnóstica**

Finalmente, o foco se desloca em direção às atividades propostas para os educandos. A análise dos erros é baseada nas soluções encaminhadas pelos alunos e leva em consideração a teoria sobre a qual foi elaborada a proposta. A preocupação maior não está nos erros, mas sim no processo de ensino e aprendizagem, em particular no funcionamento cognitivo do aluno.

Ainda segundo Cury e Cassol (2004), geralmente na etapa de análise dos dados se elaborada uma classificação para os erros, que são listados ou é indicada a frequência em que ocorre cada tipo. Com relação às entrevistas, podem ser transcritas ou ainda submetidas à análise de conteúdo.

## **2.2. A análise de erros enquanto metodologia de ensino**

Do ponto de vista da didática de ensino da Matemática podemos aproveitar positivamente os erros cometidos pelos estudantes. Sentar com os alunos e discutir os caminhos que eles seguiram para solucionar uma determinada questão pode promover o diálogo entre educador e educando. A respeito dessa interação, Cury (2007) sugere que:

[...] a análise qualitativa das respostas dos alunos, com uma discussão aprofundada sobre as dificuldades por eles apresentadas, apoiada em investigações já realizadas é, talvez, a melhor maneira de aproveitar os erros para questionar os estudantes e auxiliá-los a (re)construir seu conhecimento. (CURY, 2007, p. 27).

Com relação ao diálogo em sala de aula, Freire (2003) também o encara de forma positiva e entende que deve ser estimulado, pois proporciona ao educador reconstruir suas concepções a respeito do tema em questão, conhecer melhor os educandos e compreender como está se processando neles a aquisição do conhecimento. Além disso,

O objeto a ser conhecido, num dado lugar, vincula esses dois sujeitos cognitivos, levando-os a refletir juntos sobre o objeto. O diálogo é a confirmação

conjunta do professor e dos alunos no ato comum de conhecer e reconhecer o objeto de estudo. Então, em vez de transferir o conhecimento estaticamente, como se fosse uma posse fixa do professor, o diálogo requer uma aproximação dinâmica na direção do objeto. (FREIRE, 2003, p. 124).

Acreditamos que o vínculo referido por Freire (2003) possa ser interpretado como o contrato didático defendido por Silva (1999), o qual só existe em função da aprendizagem dos alunos e a cada nova etapa é renegociado e renovado. Conforme Silva (1999), de um modo geral, a prática de ensino mais comumente vista em aulas de Matemática é aquela na qual o professor expõe determinado conteúdo, mostra alguns exemplos no quadro e em seguida aplica exercícios. Aos alunos, entendendo ou não a aula, cabe o papel de solucionar as questões e, se encontrar dificuldades, solicitar auxílio ao professor.

Ainda segundo Silva (1999), tal prática ocorre frequentemente nas aulas de Cálculo, quando, por exemplo, se está desenvolvendo o estudo de integrais mediante uma lista de regras de integração e o simples “adestramento” por meio de exercícios. Desta forma, não se trabalha efetivamente o significado da integração, nem se questiona a integrabilidade das funções.

Silva (1999) apresenta um caso no qual o professor introduz um determinado conceito novo não mais por meio de uma aula expositiva, mas por intermédio de atividades elaboradas a partir de situações-problema, fazendo com que os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. Com relação a essa prática, o autor acredita que o papel do aluno se assemelha ao de um pesquisador e prevê a progressão do saber. Além disso,

[...] O erro não é mais uma falha que se deve evitar a qualquer preço. Ele pode contribuir para a construção do conhecimento. Entretanto, convém notar que existem muitos tipos de erros e que nem todos são, necessariamente, construtivos do conhecimento. (SILVA, 1999, p. 48).

Outro aspecto importante com relação a erro é o de que ele traz consigo aquilo que o aluno já sabe (ou não sabe) sobre o assunto em estudo. Vasconcellos (2004) afirma que um conhecimento novo somente é possível quando construído a partir de conhecimentos prévios. Para ele, o professor deve promover esse confronto, provocando a contradição entre os modelos mentais que os educandos trazem com o real.

O professor parte do que o aluno tem de quadro de significação e vai introduzindo, pela problematização, novos elementos para a análise. O conhecimento

anterior do aluno, como foi apontado, não pode ser desprezado, pois o novo vai ser construído a partir do existente, a não ser que entendamos que o conhecimento vai ser transmitido e depositado na cabeça do aluno de acordo com aquilo que falamos. (VASCONCELLOS, 2004, p. 89).

Finalmente, podemos ainda pensar na didática da análise de erros como uma forma de aprender a aprender. Logicamente isso depende da forma com a qual o educador faz os questionamentos e encaminha a superação das dificuldades encontradas pelos educandos. Ele pode, por exemplo, ao invés de mostrar o caminho correto ou a solução pronta, sugerir que os estudantes pesquisem sobre o tema em estudo, orientando-os com relação às fontes a serem pesquisadas, a fim de que eles superem suas dificuldades com o próprio esforço. Assim,

Compreender o sentido de um texto implica estabelecer relações entre texto e significado, colocar em movimento modos de entender e compreender, indagar possibilidades alternativas de compreensão, perceber e dar sentidos e assim por diante [...] Aparecendo a elaboração própria, torna-se visível o saber pensar e o aprender a aprender. (DEMO, 2005, p. 24).

### **3. METODOLOGIA**

Inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica sobre as técnicas de análise de erros. Para tanto, foram analisados artigos e pesquisas que utilizaram essa mesma metodologia, aplicada em disciplinas da Matemática de ensino superior. Dentre as opções da literatura, foi utilizado o trabalho da professora Helena Noronha Cury sobre análise de erros.

Serviu como objeto inicial de estudo a sondagem, que foi uma prova aplicada em todas as turmas no início do semestre, cujo objetivo era verificar o nível de conhecimento dos alunos em Matemática. Essa avaliação consistia em uma folha com dez exercícios que envolviam conteúdos relativos à Matemática estudada nos níveis de ensino Fundamental e Médio, relevantes para os estudos de Cálculo. A sondagem foi realizada no início do semestre, logo nas primeiras semanas de aula.

Além da sondagem, foram estudadas avaliações realizadas por duas turmas ao longo do semestre, tendo sido analisados ao todo seis provas, duas de sondagem e quatro da disciplina. Com relação às análises dos erros cometidos pelos alunos nestas atividades, na maioria dos casos não ocorria um único erro em uma mesma questão. Aconteciam erros em série. Contudo, para efeitos de classificação nesta pesquisa, foram considerados apenas os erros iniciais e que geraram a sucessão posterior.

Nessa etapa foram formuladas quatro categorias e os erros encontrados nas análises foram classificados em erro em conteúdo de ensino fundamental, erro em conteúdo de ensino médio, erro em conteúdo de ensino superior ou erro de interpretação.

Para a realização das provas, os alunos poderiam confeccionar um material de consulta, que consistia em uma folha de ofício, a qual poderia ser preenchida em frente e verso, com informações que considerassem relevantes. A folha de consulta era entregue junto com a prova e isso viabilizou que estivessem disponíveis para estudo. Esse material também foi analisado, pois poderia conter indícios das dificuldades na aprendizagem da disciplina, particularmente naquelas reconhecidas pelos estudantes como tal.

Com a finalidade de melhor compreender os componentes da amostra analisada (alunos, monitores e professores), foram elaborados questionários específicos para cada grupo. Esses questionários continham perguntas objetivas e algumas de caráter subjetivo para verificar os diferentes pontos de vista sobre os problemas, já referidos, na aprendizagem dessa disciplina. Ao todo, colaboraram nessa etapa 72 alunos, 8 professores e 4 monitores. Com os questionários foi possível esboçar um perfil dos alunos, conhecer seus interesses e envolvimento com o estudo. Já no questionário aplicado aos monitores e professores o objetivo foi verificar o tipo de questionamento recebido, as propostas sugeridas como solução e suas percepções sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos.

### **3.1. Os questionários**

Os estudantes de engenharia, conforme apurado, são na maioria do sexo masculino, jovens com idade até 30 anos, provenientes de escolas particulares, onde cursaram o ensino médio tradicional em turno diurno. O questionário também permitiu verificar que a maior parte desses educandos não trabalha (56%), além de manter o hábito de estudar somente em véspera de provas ou sequer isso. Poucos responderam que frequentam as monitorias quando estão com dúvidas (cerca de 10% dos alunos entrevistados), dentre os quais metade trabalha e tem uma carga horária superior a 40 horas semanais. Dos que não trabalham apenas dois disseram que buscam apoio dos monitores. O que talvez nos permita questionar: caso houvesse mais horários de atendimento compatíveis com os horários de trabalho, maior seria o número de consultas aos monitores? Entre os que não têm o hábito de estudar ou estudam somente na véspera das provas, 18 não trabalham. Dos 40 que não trabalham 29 disseram que não frequentaram as oficinas. Curiosamente, 20 desses 29 alunos apontaram que gostariam que fossem proporcionados momentos para discutir e analisar questões de provas e trabalhos, fora do horário de aula.

Aos monitores foram feitas seis perguntas, no sentido de tentar identificar o tipo de dúvidas que os alunos trazem, bem como se são sempre os mesmos que

freqüentam a monitoria. Quatro monitores colaboraram com a pesquisa e relataram que, em média, entre 10 e 20 alunos são atendidos diariamente, sendo em algumas ocasiões um número inferior e, quando se aproximam as avaliações atendem um número superior de educandos. Quando questionados se saberiam identificar se são sempre os mesmos alunos que freqüentavam a monitoria durante o semestre, três respostas sim e uma não. Um dos monitores chegou a comentar que no transcorrer do semestre, os alunos que fazem consultas vêm aprofundar/aperfeiçoar seus conhecimentos, enquanto nas vésperas de provas ele atende pessoas com muitas dificuldades, que querem aprender tudo na última hora.

Com relação ao tipo de questionamento que os alunos fazem, apontaram dúvidas com relação ao conteúdo e resolução de questões de trabalhos ou provas como as solicitações mais freqüentes nas consultas. Também complementaram que os estudantes têm dúvidas relativas aos três níveis, sem destacar nenhum em particular. Quando foram solicitados a destacar algum assunto específico ou recorrente dentre as dúvidas apresentadas pelos alunos, as respostas apontaram para fatoração, resolução de equações, funções, limites, derivadas, integrais e geometria analítica.

O questionário aplicado a oito professores continha nove perguntas. Conforme relatado, o número de alunos nas turmas variou entre 45 e 60, o que fornece uma noção da dificuldade para acompanhar e atender tantos estudantes na disciplina. Com relação às reprovações, os educadores responderam que variam entre 15 e 20. Considerando as 10 turmas atendidas pelos professores entrevistados, presume-se que cerca de um terço dos alunos são reprovados a cada semestre.

Uma das perguntas solicitava que os professores destacassem as principais causas das reprovações. Eles apontaram a falta de conhecimentos preliminares e a falta do hábito de estudar como os principais culpados do insucesso. Com relação aos tipos de questionamentos que os educandos fazem em sala de aula, aos educadores foram dadas algumas alternativas e as respostas apareceram nas quantidades apresentadas no diagrama apresentado na Figura 1.

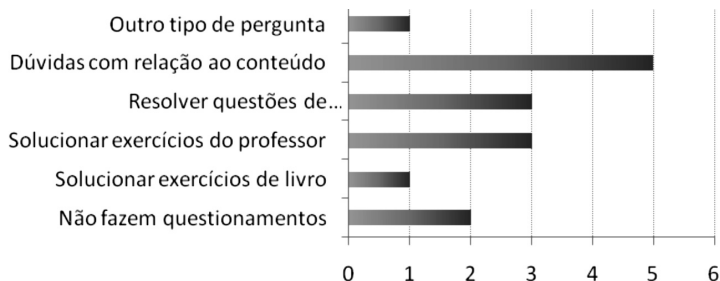


Figura 1 – Tipo de questionamentos feitos em sala de aula



Os educadores também foram solicitados a relacionar as dúvidas apresentadas pelos alunos com os níveis de ensino fundamental, médio ou superior. Nesse item, apontaram para conteúdos do ensino fundamental (principalmente) e médio. Quando questionados se poderiam especificar algum assunto dentre as dúvidas apresentadas pelos alunos, as respostas se concentraram em Álgebra, Funções, Trigonometria e Fatoração. Houve ainda referências as propriedades das operações e também sinais. Além das questões já relatadas, os educadores também opinaram a respeito do apoio oferecido pelos monitores, se é suficiente ou não. Dois professores responderam que sim, três acreditam que não e os demais responderam que em parte.

Finalizando esse questionário, foram pedidas sugestões para os serviços de apoio ao ensino de Cálculo. As respostas para este item foram propor atividades que levem os educandos a pensar, cursos de extensão com matemática de ensino fundamental e médio, grupos de estudo orientados por monitores e trabalho paralelo em oficinas temáticas, incentivando os alunos a freqüentarem as oficinas e laboratórios de aprendizagem.

#### **4. ANÁLISE DOS ERROS**

Serviram como objeto de estudo, além da sondagem, as avaliações realizadas por duas turmas (A e B) ao longo do semestre. Ao todo foram analisados seis provas, duas de sondagem e quatro da disciplina. Para exemplificar como os erros foram analisados e classificados nessa etapa da investigação, seguem as análises de três questões das diferentes avaliações estudadas (sondagem, primeira avaliação e segunda avaliação). As resoluções foram transcritas tais como encontradas nas provas.

##### **4.1. cometidos na sondagem**

Em um primeiro momento desta investigação, foi analisado um material elaborado por professores de Cálculo, cuja finalidade seria verificar o nível de conhecimento matemático dos alunos matriculados na disciplina. Este procedimento foi chamado de sondagem e consistia em uma folha com dez exercícios, os quais envolviam conteúdos relativos à Matemática estudada nos níveis Fundamental e Médio, de acordo com o que pode ser considerado relevante para os estudos de Cálculo.

Conforme visto, a análise de erros enquanto linha de pesquisa pode ter um caráter diagnóstico, possibilitando a compreensão das dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes. Como a intenção nessa investigação foi compreender e, de alguma forma, tentar identificar o fenômeno do insucesso na aprendizagem do Cálculo, o material produzido pelos alunos que participaram da sondagem pode ser considerado como uma fonte de informações. Analisando esse material, procuramos

não apenas quantificar acertos e erros, mas também considerar os tipos de equívocos cometidos nessa atividade. Assim, verificando as produções dos alunos, categorizamos os diferentes tipos de erros e, promovendo os devidos agrupamentos, buscamos localizar as dificuldades, relacionando-as a conteúdos de ensino Fundamental ou Médio.

Sondagem, primeira questão:

Se  $x \neq 0$  e  $x \neq 2$ , simplifique a expressão  $\frac{x^3 + x^2 - 6x}{8x^2 - 16x}$ .

Dos 94 alunos que participaram da sondagem, 50 erraram a questão. Consideramos erros de potenciação, simplificação e respostas incompletas como erro em conteúdo de ensino fundamental. Já os que fizeram substituições numéricas ou resolveram a expressão como equação, tiveram o erro classificado como de interpretação, pois provavelmente não entenderam o que o enunciado estava pedindo.

Muitos alunos iniciaram os procedimentos de uma forma adequada, mas não deram sequência à questão. Alguns extraíram as raízes das equações do numerador e do denominador em separado e não souberam o que fazer com elas. Outros conseguiram colocar o  $x$  em evidência em ambas, mas após simplificarem essa etapa, não perceberam que poderiam fazer mais um passo e obter uma solução ainda mais simples para o exercício.

Com relação aos erros ao trabalharem com potências, o mais comum foi adicionar os termos com índices diferentes, fazendo a soma dos expoentes, sem considerar a sucessão de equívocos posteriores.

Por exemplo:

$$\frac{x^3 + x^2 - 6x}{8x^2 - 16x} = \frac{2x^5 - 6x}{8x^2 - 16x} = \frac{8x^5}{8x^2} = x.$$

Outro equívoco presente nesse exercício foi o de substituição numérica, quase todas o foram por  $x = 1$  (afinal, o enunciado dizia que  $x \neq 2$  e  $x \neq 0$ ). Ocorreu apenas um caso de substituição por outro número, que foi o três. Um segundo erro comum foi tentar resolver a expressão como se fossem duas equações (uma do numerador e outra do denominador).

Apesar de todos os equívocos apontados, acreditamos que o maior obstáculo nessa questão foi na interpretação do enunciado. O problema deve ser a deficiência na leitura, a sensação que passa é de que não existe um significado, há apenas a busca por um resultado, uma resposta.

De posse das sondagens realizadas em duas turmas (94 alunos ao todo), foi analisado o material e logo foi possível identificar que em cada questão existem tipos de erros que se repetem de forma análoga, ou que estão relacionados de alguma forma. A Figura 2, ilustra o percentual de erros observados em cada uma das categorias.

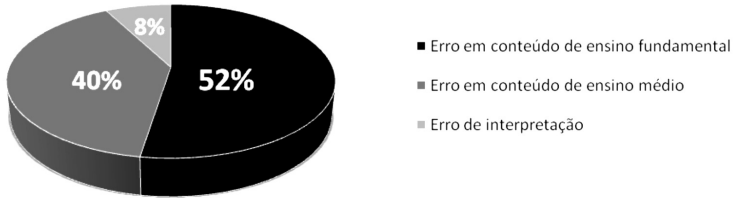


Figura 2 – Distribuição dos erros cometidos na sondagem

#### 4.2. cometidos na primeira avaliação

Por se tratar de duas provas muito parecidas (das duas turmas), com questões semelhantes, foram unificadas as análises dos erros dessa etapa. Ao todo, 104 alunos realizaram a avaliação, considerando as duas turmas.

Na segunda questão da primeira avaliação, para as duas turmas foram feitas as mesmas perguntas, mudando-se apenas a lei de formação das funções. Os enunciados foram:

Turma A

$$\text{Seja } f(x) = \sqrt{x+1} + 4$$

Turma B

$$\text{Seja } f(x) = \sqrt{x-2} - 1$$

Para ambas os mesmos subitens:

- O domínio da  $f$  é \_;
- $f(3) =$  \_;
- $f(x) = 7$  se  $x =$  \_;
- Faça um esboço do gráfico de  $f(x)$ ;
- A imagem de  $f$  é \_.

Para ilustrar, mostraremos como foi feita a análise dos itens a e c. No item a, na turma A, dentre os que demonstraram compreender a definição de domínio, mas optaram por uma estratégia equivocada para determiná-lo, a maioria cometeu o seguinte engano:

$$f(x) = \sqrt{x+1} + 4 \rightarrow x + 1 + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 5.$$

Alguns desconsideraram o 4 (quatro) e não realizaram cálculos, determinando  $x \geq 0$  como domínio.

Na turma B, alguns alunos responderam que o domínio da função seria todo o conjunto dos reais. Como não constava desenvolvimento nessas soluções, imagino que foram respostas aleatórias. Já os que erraram ao responder que seria  $[3; \infty)$ , acreditamos que cometeram o seguinte equívoco:

$$\sqrt{x-2-1} \geq 0.$$

No item c, percebemos a falta de conhecimento de operações com radicais, embora tenham ocorrido, também, erros em operações elementares, resolução de equação de 1º grau e outros erros de manipulação algébrica. Seguem algumas das soluções analisadas, para exemplificar os erros encontrados nessa questão:

$$\sqrt{7+1} + 4 = \sqrt{8} + 4$$

$$\sqrt{x+1} + 4 = 7 \rightarrow \sqrt{x+1} = 7 - 4 \rightarrow \sqrt{x+1} = 3 \rightarrow x + 1 = 3^2 \rightarrow x = 10$$

$$\sqrt{x+1} + 4 = 7 \rightarrow \sqrt{x+1} - 3 = 0 \rightarrow x = \sqrt{x+1} - 3$$

$$\sqrt{x+1} + 4 = 7 = \sqrt{x+1} + 4 = \sqrt{x+1} - 3 = 0 = x + 1 - 3 = x = 2$$

$$\sqrt{x+1} + 4 = 7 \rightarrow \sqrt{1x} + 4 = 7 \rightarrow 1x + 4 = 7 \rightarrow 1x = 7 - 4 \rightarrow x = 3$$

A figura a seguir apresenta a distribuição dos erros encontrados na primeira avaliação:

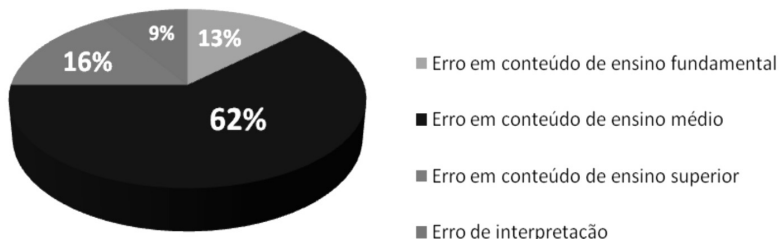


Figura 3 – Distribuição dos erros cometidos na primeira avaliação

### 4.3. cometidos na segunda avaliação

Na sétima questão da segunda avaliação, assim como na prova anterior, o mesmo enunciado para as duas turmas, “encontre as derivadas das funções abaixo definidas e escreva o resultado de forma simplificada”, mudando-se apenas as funções envolvidas. Para a turma A, as funções foram:

$$\text{a) } f(x) = 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{x^3} - \sqrt{x^3}$$

$$\text{b) } f(s) = \frac{s + 1}{s^2 - 1}$$

Já para a turma B:

$$\text{a) } f(x) = 2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x^3}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{t^2 + 1}{t + 4}$$

No item a, foram encontrados muitos erros de sinal, manipulação algébrica e operações elementares. Alguns educandos erraram na escolha da regra de derivação e outros derivaram a função duas vezes. Boa parte dos erros nesse item foram decorrentes do trabalho inadequado no momento de derivar o radical.

Seguem alguns exemplos dos erros analisados nessa questão.

$$\text{a. } f'(x) = 12x^3 - 8x + \frac{1}{3x^2} - \sqrt{3x^2}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 8x + \frac{x^{-2}}{3} - 3x^2$$

$$f'(x) = 12x^3 - 3x^2 + \frac{x^{-2}}{3} - 8x$$

$$y' = 12x^3 - 8x + 0 - \sqrt{x^3}$$

$$y' = 12x^3 - 8x - \sqrt{x^3}$$

$$b. y = 2x^4 - 4x^3 + x^{-2} - x^{1/3}$$

$$y' = 8x^3 - 12x^2 - 2x^{-1} - \frac{1}{3} x^{-4/3}$$

$$y' = 8x^3 - 12x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{3\sqrt[4]{x^3}}$$

No item b ocorreram muitos erros por simplificações inadequadas e de sinais. Encontramos também erros nas escolhas da regra de derivação. Houve aluno que se equivocou com a regra do quociente. Dois alunos encaminharam bem suas soluções, mas por algum motivo (provavelmente dúvidas na manipulação algébrica) pararam e deixaram a questão incompleta. Segue uma amostra dos erros encontrados nesse exercício:

$$\frac{g' - f \cdot g - f'}{g^2} \Rightarrow (t + 4)^2 = t^2 + 4$$

$$\frac{2t^2 + 8t - t^2 + 1}{t^2 + 8t + 16} = \frac{t^2 + 1}{t^2 + 16} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{t(t + 4) + 1}{t(t + 8) + 16} = \frac{t + 4 + 1}{t + 8 + 16} = \frac{t + 5}{t + 24}$$

$$\frac{(t^2 + 1) + 2}{16} = \frac{t^2 + 1}{8}$$

De forma análoga à prova anterior, também nessa etapa foram unidas as análises dos erros cometidos pelos alunos das duas turmas. Ao todo, 95 alunos realizaram a segunda avaliação, sendo que um entregou a prova totalmente em branco. A distribuição dos erros encontrados nessa atividade foi de acordo com a figura a seguir:

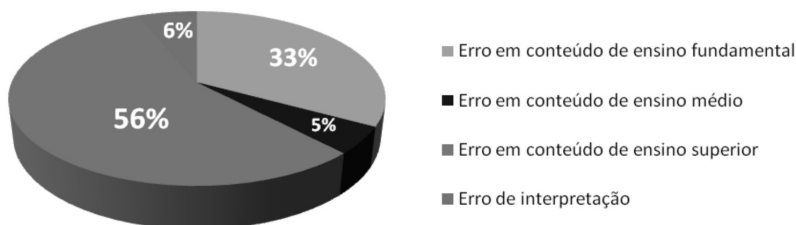


Figura 4 – Distribuição dos erros cometidos na segunda avaliação

#### 4.4. Análise do material de consulta para as provas

A análise desses materiais se mostrou produtiva. Grande parte se apresentava de forma confusa. A falta de organização e a poluição visual de alguns dificultaram essa etapa da investigação. Ocorreram situações nas quais o aluno apenas copiou anotações de sala de aula ou exercícios com enunciados completos e resoluções, tendo inclusive quem colasse cópias com reduções de páginas de cadernos (que poderiam ser de colegas). Foram encontradas, também, listas com regras de derivação, sendo que tais regras eram fornecidas nas provas. Esse tipo de procedimento demonstra o desconhecimento, por parte dos alunos, do que lhes pode ser útil ou onde buscar informações que sejam de ajuda efetiva nas avaliações.

Entre esses materiais foram registrados resumos de conteúdos tais como: funções trigonométricas, logaritmos (propriedades), conjuntos (definição de função), função exponencial, função inversa, gráficos, produtos notáveis, vetores, limites e continuidade de funções, fórmulas de geometria analítica, e tabelas com valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Como se percebe, os conteúdos nos quais sentem menos segurança, e onde buscam mais apoio, são, em grande parte, os de ensino médio. Para os de ensino superior, regras de derivação, na própria prova havia uma fonte de consulta anexa. Já os conteúdos de ensino fundamental, assunto sobre os quais incide um grande número de erros, houve apenas uma referência que foram os produtos notáveis.

Com isso, podemos concluir que falta aos alunos noção do que é necessário conhecer para resolver o tipo de exercício cobrado nas avaliações, além de senso crítico sobre as próprias dificuldades em relação à matemática. Justamente sobre os conteúdos em que incide o maior número de erros praticamente não há registro no material autorizado à consulta.

#### 4.5. Dados finais da etapa de análise de erros

Ao todo foram analisadas 4423 questões, com 1603 acertos e 813 questões deixadas em branco. As 2007 questões erradas se distribuíram da seguinte forma:

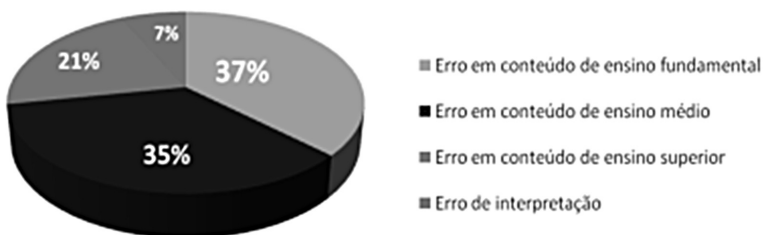


Figura 5 – Distribuição dos erros ao final da etapa de análise

## **5. Considerações finais**

Nas pesquisas em Educação Matemática é possível apurar que a análise de erros pode ser vista sob duas perspectivas não estanques: como linha de pesquisa em Educação Matemática e como metodologia de ensino. Cada qual apresenta suas próprias características e uma pode motivar a ocorrência da outra. Em ambas torna-se evidente o quanto podemos aprender (e compreender) a partir dos erros cometidos pelos alunos.

No caso específico do Cálculo, a análise de erros pode ter um caráter diagnóstico com relação às dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes, em particular aqueles que estão ingressando em um curso superior. Assim,

Para cada erro detectado e classificado nessas pesquisas com alunos de Cálculo, poderia ser modificada a metodologia de trabalho, buscando maneiras de desafiar os estudantes. (CURY, 2007, p. 60).

Toda essa problemática que orbita a disciplina de Cálculo I provoca reflexões no sentido de repensar as didáticas atuais, apontando para mudanças metodológicas, uma vez que se torna evidente a impossibilidade de aceitar que tudo continue como está.

Nesse sentido,

As pesquisas sobre erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores, pois, ao investigar erros, ao observar como os alunos resolvem um determinado problema, ao discutir as soluções com os estudantes, os licenciandos em Matemática estarão refletindo sobre o processo de aprendizagem nessa disciplina e sobre as possíveis metodologias de ensino que vão implementar no início de suas práticas, podendo ajudar seus alunos logo que detectarem alguma dificuldade. (CURY, 2007, p. 93).

Para propor tais mudanças, é necessário compreender a origem do problema e parece adequado utilizar os métodos da análise de erros para tal finalidade, tendo em vista as reflexões apresentadas neste artigo. Com relação às dificuldades em motivar mudanças nas práticas letivas tradicionais, reconhecemos que não é uma tarefa fácil. Afinal,

A educação é muito mais controlável quando o professor segue o currículo padrão e os estudantes atuam como se só as palavras do professor contassem. Se os professores ou os alunos exercessem o poder de produzir conhecimento



em classe, estariam então reafirmando seu poder de refazer a sociedade. A estrutura do conhecimento oficial é também a estrutura da autoridade social. É por isso que predominam o programa, as bibliografias e as aulas expositivas como formas educacionais para conter os professores e os alunos nos limites do consenso oficial. (FREIRE, 2003, p. 21).

Participaram desta pesquisa estudantes de cursos de Engenharia, que responderam a questionário e tiveram suas produções analisadas. Neste grupo destacaram-se algumas características que formam um breve perfil. Em sua maioria esses acadêmicos formam um grupo de faixa etária jovem, proveniente de escolas da rede privada e com períodos de tempo disponíveis para o estudo. Esse tempo, todavia, nem sempre se revelou produtivo tendo em vista que mais da metade confessou não ter o hábito de estudar ou o fazendo apenas em véspera de provas.

Também colaboraram nesse processo professores e monitores envolvidos com a disciplina, trazendo suas percepções e sugestões. Tanto um grupo quanto o outro faz referências às dificuldades que são decorrentes de déficit de aprendizagem nos níveis fundamental (principalmente) e médio. A falta do hábito de estudar regularmente é outro item por eles apontado como um dos causadores dos problemas existentes. O material de consulta para as provas é bastante esclarecedor nesse sentido.

Nesta investigação pudemos verificar que muitos dos alunos, mesmo reclamando do déficit existente em sua educação, verdadeiras lacunas oriundas dos níveis de ensino fundamental e médio, ainda assim não freqüentavam as oficinas complementares. E isso, muitas vezes, mesmo com tempo disponível. Observamos, todavia, que a maior procura pelas monitorias se dá justamente por parte daqueles alunos com menor tempo disponível para isso. Por isso, é sugestão de que os horários disponibilizados para tais encontros observem essa questão e contemplem essa categoria de acadêmicos: que trabalham e estudam concomitantemente.

Com relação à forma de trabalho nas monitorias e demais atividades de apoio ao ensino de Cálculo, sugerimos metodologias que possibilitem uma participação diferente por parte do educando, que ele passe de uma atitude passiva para uma postura ativa na construção do conhecimento. Que exista diálogo, que os alunos sejam motivados a fazer perguntas, participar. Que os grupos em atendimento sejam menores, possibilitando que os estagiários dêem conta de atender e acompanhar os alunos de uma forma mais próxima. A própria análise de erros seria uma ótima alternativa metodológica, pois possibilita essa aproximação e interação entre educador e educando. Além disso,

Quando um erro é usado como fonte de novas descobertas, está sendo considerada a possibilidade de que este erro se transforme em um problema para que

os alunos (e o professor) se debruçam sobre ele e tentem inventar soluções que promovam o aprendizado. [...] Não se trata, de forma alguma [...] de fazê-lo repetir, tediosamente, exercícios semelhantes. (CURY, 2007, p. 80).

Com relação à análise de erros, verificamos que é possível aplicá-la para refletir e buscar a compreensão das dificuldades que os alunos trazem ao ingressar em uma universidade. Analisar a produção escrita dos alunos permite localizar as deficiências existentes e que provocam as dificuldades constatadas, e isso de acordo com o nível de ensino ou ainda apontando conteúdos específicos.

Sobre as dificuldades, inicialmente suspeitamos serem de ensino médio, particularmente no que diz respeito às funções. Entretanto, constatamos que muitos dos erros analisados tinham suas origens no ensino fundamental. Com relação a estes conteúdos, a preocupação não é recente, pois Cury (2007) comenta outros trabalhos em análise de erros que externam esta mesma preocupação, mormente sobre álgebra, especialmente em fatoração, simplificação, produtos notáveis e equações, tal como nas análises aqui apresentadas. Outro tipo de dificuldade verificado está relacionado aos gráficos de funções também citados por Cury (2007).

Embora em uma parcela menor, foram igualmente constatadas dificuldades de interpretação de enunciados, bem como de expressão, no momento em que isso era solicitado em justificativas para as respostas apresentadas. Com relação à linguagem, a preocupação é compartilhada há muito por professores da área. Malta (2004, p.43) aponta a necessidade “*de os alunos serem conduzidos a desenvolver suas capacidades de leitura em Matemática e de expressão do próprio raciocínio que os levam à compreensão e utilização dos resultados matemáticos*”. Constata-se que essa deficiência é geradora de erros. Se os alunos não compreendem o que é pedido, aumentam as dificuldades em processar as respostas. Sem saber o que é pedido, fica a questão: como produzir uma resposta satisfatória?

Acreditamos que também os problemas na confecção do material de consulta para as provas estejam ligados à linguagem. Pois muitos deles são confusos, desorganizados, visualmente poluídos, evidenciando indícios de má organização textual. Tal como as justificativas em muitos exercícios analisados.

Outra ocorrência, presente nas três avaliações estudadas, que provocou inquietações e reflexões, foram às questões deixadas em branco. O que teria desmotivado ao menos uma tentativa de solução ou mesmo um “chute”? Penso que o medo de errar, de “passar vergonha” por proceder de forma equivocada no desenvolvimento. Afinal, durante toda vida estudantil “aprendemos” que é feio errar, que os erros devem ser apagados com a borracha. Essa é outra questão que poderia ser investigada em estudos futuros.

No presente estudo, pudemos verificar erros de ensino fundamental e médio que não interferem apenas na aprendizagem dos conceitos do Cálculo dos cursos de Engenharia, mas também em outras disciplinas de Matemática do ensino superior. No caso específico dessa disciplina, constatamos que os equívocos se concentram na utilização de regras inadequadas para derivar e integrar funções, bem como aqueles de construção ou interpretação de gráficos. Portanto, seria relevante um estudo posterior que investigasse mais a fundo esse tipo de dificuldade.

Finalizando, mergulhar no universo da análise dos erros cometidos pelos alunos nas avaliações proporcionou inúmeras reflexões, sendo muitas vezes difícil manter o foco. Sabemos, também, que o término dessa investigação não significa uma despedida dos erros (e suas análises), pois ainda os encontraremos muitas vezes na vida docente. Esperamos, com este estudo, ter contribuído de alguma forma para futuras reflexões e discussões a respeito das dificuldades na aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral.

## Referências

- CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Porto Alegre: Autêntica, 2007.
- CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. *Acta Scientiae*, v. 6, n. 1, p. 27-36, Jan/Jun 2004.
- DEMO, P. **Educar pela pesquisa**. Campinas: Autores Associados, 2005.
- DOERING, C. I.; NÁCUL, L. B. C.; DOERING, L.R. Programa pró-cálculo da UFRGS in CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p.201-23.
- FREIRE, P.; SCHOR, I. **Medo e ousadia: o cotidiano do professor**. São Paulo: Paz e Terra, 2003.
- MALTA, I. Linguagem, leitura e matemática. In CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p 41-62.
- SILVA, B. A. Contrato didático. In MACHADO, S. A. D. (org). **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 43-64.
- VASCONCELLOS, C. dos S. **Construção do conhecimento em sala de aula**. São Paulo: Libertad, 2004.

Submetido em dezembro de 2010

Aprovado em junho de 2011