FACULDADE DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Elisabete Rambo Braga

A COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DAS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL COM O RECURSO DA PLANILHA

Porto Alegre
2009

ELISABETE RAMBO BRAGA

A COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DAS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL COM O RECURSO DA PLANILHA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Dr. Lorí Viali

PORTO ALEGRE
2009

B813 Braga, Elisabete Rambo
A compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática no Ensino Fundamental com o recurso da planilha / Elisabete Rambo Braga; orientador Lorí Viali. – Porto Alegre, 2009.
208f. : il.

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Faculdade de Física. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

1. Matemática – Aprendizagem. 2. Funções – Matemática. 3. Matemática – Ensino Fundamental. I. Viali, Lorí II. Título

CDU – 51:371.3

Catalogação: Karin Zanona Caselli CRB 10/1106

ELISABETE RAMBO BRAGA

A COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DAS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL COM O RECURSO DA PLANILHA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em 07 de Janeiro de 2009, pela Banca Examinadora.

BANCA EXAMINADORA:

Prof°. Dr. Lorí Viali – PUCRS

Prof°. Dr. Dalcídio Moraes Cláudio – PUCRS

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Alice Gravina – UFRGS

Dedico este trabalho ao meu marido,
Fernando Chaves Braga, pela paciência,
compreensão e companheirismo.
Ao meu filho, Lucas Rambo Braga, por
compreender minha ausência.
Aos meus pais, Helmuth e Terezinha Rambo,
como forma de gratidão.

AGRADECIMENTOS

A Deus, princípio de tudo.

Ao professor Dr. Lorí Viali, pela orientação na realização deste trabalho, contribuindo significativamente com sua experiência na área da Educação Matemática.

À escola em que trabalho, por autorizar a realização dessa pesquisa em suas dependências.

Aos meus queridos alunos, pela participação e pelo aprendizado.

À minha amiga Maria do Carmo Hornos Steffens, pela dedicação à revisão lingüística desse trabalho.

“Queres aprender? Estuda!

Queres aprender mais? Procura um bom mestre!

Queres aprender ainda mais?

Ensina aos outros o que aprendeste!”

(Chiara Lubich)

RESUMO

A presente dissertação investigou o processo de compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática em alunos da 8ª série do ensino fundamental, mediante a utilização da planilha. Essa pesquisa foi desenvolvida em uma escola da rede particular de ensino de Porto Alegre e foi dividida em três etapas: aplicação de um questionário inicial, objetivando a caracterização dos estudantes e a delimitação da amostra de trinta discentes com características diferenciadas quanto ao conhecimento e à utilização da planilha; aplicação das atividades no laboratório de informática, evidenciando a possibilidade de transferência entre os registros algébrico, tabular e gráfico dessas funções e, por fim, a aplicação de um segundo questionário, com o propósito de avaliar o trabalho realizado. À luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, é que foram discutidas e analisadas as referidas tarefas. Os dados coletados foram analisados mediante a categorização das respostas dos participantes às questões feitas nos roteiros e suas respectivas construções algébricas, tabulares e gráficas. Concluiu-se que a utilização desse recurso promoveu a compreensão do conceito de função na perspectiva de um trabalho que enfatizou a conversão entre os registros de representação das funções de 1º e 2º graus, conforme preconiza a Teoria de Duval. A análise do último instrumento revelou, ainda, que a utilização da planilha nas aulas de Matemática facilita a aprendizagem do conteúdo desenvolvido de um modo diferente do modelo tradicional.

Palavras-chave: Funções Afim e Quadrática. Registros de Representação Semióticos. Ensino de Função com a Planilha.

ABSTRACT

This dissertation investigated the comprehension process of the concepts of affine and quadratic functions in eighth graders with the help of a spreadsheet. This research was developed in a private school in Porto Alegre and was divided in three stages: application of a questionnaire with the purpose of providing characteristics about the students and originating the choice of a sample group made up of thirty students with distinctive features as for knowledge and use of the spreadsheet; application of eight tasks in the computer laboratory, showing up the possibility of transference between the registers of algebraic, tabular and graphic of these functions, and, then, the application of a final questionnaire aiming at assessing the work done. The above mentioned tasks were discussed and analyzed in the light of the theory of Registers of Semiotic Representations by Raymond Duval. The collected data were interpreted through the categorization of the answers provided by the participants to the questions made in the handouts and their respective algebraic, tabular and graphic representations. It is concluded that the use of this tool favored the comprehension of the concept of function in the perspective of a project that emphasized the conversion between the representation registers of the affine and quadratic functions, according to Duval's theory. The analysis of the last tool indicated that the use of a spreadsheet in Math classes still facilitates the content learning process developed in a distinctive way from the traditional model.

Keywords: Affine and quadratic functions. Registers of Semiotic Representations. Teaching functions with a spreadsheet.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste início de milênio, vivemos a Era da Tecnologia e da Comunicação. Acessar e utilizar adequadamente as informações possibilita aos indivíduos a formação de uma "bagagem" cultural adequada ao exercício da cidadania consciente. Os computadores estão cada vez mais inseridos na sociedade atual e sua presença cultural amplia-se a cada dia. Conseqüentemente, o processo de ensino e aprendizagem não pode se manter alheio a essa realidade.

Partindo dessa premissa, a escola deve contribuir efetivamente na construção do conhecimento dos seus discentes, proporcionando a eles uma experiência educacional diversificada, que atenda às suas necessidades e a seus interesses. Levando em consideração a velocidade das descobertas tecnológicas, se faz necessária uma educação permanente, que vise ao desenvolvimento de habilidades para obtenção e utilização das informações. É fundamental que cada educando se aproprie de conceitos e procedimentos que viabilizem sua formação integral, tornando-se um cidadão engajado na sociedade.

Ao fazer uso do computador em sala de aula, o professor deve privilegiar a interatividade com *softwares* que apresentem uma interface amigável e que possibilitem livre iniciativa e autonomia na obtenção de informações e na análise dos resultados. É possível que a interatividade auxilie no significado do objeto do conhecimento. A interatividade é, portanto, um componente essencial no trabalho didático.

Pais (2006, p.16) retoma essa idéia, ao afirmar que:

> Existem tecnologias que favorecem mais diretamente a expansão das condições de elaboração do conhecimento. Estas se caracterizam pela melhoria das condições de aprendizagem e isto depende da maneira como ocorre a relação usuário e informações contidas no software utilizado. Tudo indica que quanto mais interativa for essa relação, maior será o significado do conhecimento para o sujeito.

Nessa perspectiva, me propus a investigar a compreensão do conceito de função, com a utilização da planilha, permitindo a experimentação, a coordenação e a visualização conjunta de suas representações analítica, tabular e gráfica. Além disso, objetivou-se a exploração de um determinado modelo de função nas condições mais diversas, de forma a facilitar a apreensão dessa noção por meio da modificação de seus parâmetros e da análise das conseqüências dessas alterações.

A matemática, para ser útil, deve ajudar a entender a realidade. Se o aluno perceber as funções como modelos, terá mais oportunidades de ver a matemática dessa forma. A manipulação paramétrica tem, por isso, a finalidade de fazer que o discente incorpore essa idéia.

Tal estudo tem como finalidade a observação de regularidades, a descrição de generalizações, de padrões numéricos ou geométricos e da utilização da linguagem matemática (a álgebra), para expressar fatos genéricos. De acordo com Gravina (2004, p.107): “A matemática é criação humana voltada ao estudo de regularidades, quer sejam advindas das percepções sobre o mundo real, quer sejam emergências num quadro puramente abstrato.”

A escolha desse tema baseou-se em dois fatores. O primeiro consiste na sua relevância social, ou seja, na aplicabilidade do conceito de função em diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo: na Física (cinemática), na Biologia (crescimento populacional), na Geografia (expectativa de vida, desmatamento) e na Economia (variação da inflação). Nesse sentido, são esclarecedoras as palavras de Braga (2006, p. 15):

> [..].passou-se a dar importância cada vez maior ao caráter integrador das diversas representações de função no estabelecimento de conexões entre os diferentes ramos da matemática, dessa com outras ciências e, também, com situações do cotidiano dotadas de significação real para os estudantes.

Godino, Batanero e Font (2003) reforçam essa idéia, ao afirmarem que as aplicações matemáticas marcam presença na Física, Biologia, Política, Economia e na sociedade em geral. Além disso, ressaltam a importância de serem utilizadas situações e exemplos que proporcionem a percepção, por parte do aluno, desse amplo campo de fenômenos que a Matemática permite organizar.

O segundo fator reside na possibilidade de utilizar o computador como instrumento de mobilização para a apreensão do conhecimento, permitindo o uso de múltiplas estratégias e objetivando, desse modo, a compreensão do conceito de função, além do desenvolvimento do raciocínio e do pensamento crítico.

A mobilização tem como objetivo possibilitar o vínculo significativo inicial entre o sujeito e o objeto do conhecimento, provocar a necessidade de conhecimento do mesmo, a fim de que ocorra maior interação entre o indíviduo e o conceito a ser desenvolvido, entendida, aqui, como disposição para o ato de conhecer. O ponto de partida da ação educativa é fazer com que o sujeito considere o objeto em questão um assunto essencial para o seu conhecimento. Para tanto, cabe ao professor conhecer e atuar, a partir da realidade, tendo dela uma visão mais abrangente. Além disso, o docente deve apresentar um profundo conhecimento sobre o objeto de estudo e sobre a sua psicogênese, destacando-se, também, que a intencionalidade desse educador deve ser capaz de provocar a intencionalidade do educando, fazendo-o ter clareza dos objetivos a serem alcançados, a fim de que sua ação seja intencional (VASCONCELOS, 1995).

A idéia de desenvolver esse trabalho, envolvendo os conceitos das funções de 1º e 2º graus em ambiente informatizado, surgiu de minha prática docente com alunos de 8ª série.

A noção de função, comumente, é desenvolvida, nesse nível, através da apresentação de sua definição e, então, se parte para o trabalho com gráficos e tabelas. Baseada em minha experiência, pude perceber o quanto o caminho inverso seria mais natural, ou seja, o quanto esse tema se tornaria mais acessível se iniciássemos com problemas do cotidiano, montando tabelas, lendo, interpretando e construindo gráficos e aplicando, quando possível, o conceito de proporcionalidade. Esse tipo de trabalho objetiva, portanto, maior compreensão dessa noção por parte dos alunos, uma vez que, diariamente, nos deparamos com situações que são aplicações desse conceito.

Acredito que os alunos de 8ª série devam compreender o significado desse tema, sem precisarem utilizar-se da definição rigorosa que estabelece a correspondência entre os elementos de dois conjuntos.

É imprescindível que a noção de função seja desenvolvida a partir de situações variadas, visando ao estabelecimento das conexões entre esse assunto e a realidade, aplicando-o, também, em outras áreas do conhecimento. Devemos, portanto, fazer uso da contextualização como estratégia fundamental na compreensão desse conceito.

Além disso, em minha prática docente, procuro fazer uso das novas tecnologias como um recurso no processo educacional, pois o dinamismo da imagem, proporcionado por um ambiente virtual, aliado a um planejamento adequado por parte do professor, facilita o entendimento dos conceitos abordados.

Do mesmo modo, a possibilidade de um *feedback* imediato implica uma maior interação entre o educando e o objeto do conhecimento.

Em virtude de todos esses aspectos, é fundamental que os alunos utilizem esses recursos, através da exploração de *softwares* que propiciem não só a aprendizagem da matemática, como, em especial, o entendimento do conceito de função.

A presente dissertação foi, na intenção de analisar tal problemática, estruturada em onze capítulos:

O capítulo 1 é dedicado à descrição da relevância do tema proposto e de sua relação com o histórico da autora, bem como à análise das potencialidades do uso das tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem, em especial no trabalho com funções.

No segundo capítulo, são descritos o objetivo geral e os específicos dessa investigação.

O capítulo 3 apresenta algumas pesquisas realizadas em Educação Matemática referentes ao tema proposto nessa dissertação, além de trazer o problema e as questões de pesquisa.

O capítulo 4 é dedicado à apresentação dos pressupostos teóricos divididos em três categorias principais: a evolução histórica do conceito de função, a compreensão do conceito de função e a Teoria de Duval e, finalmente, a compreensão do conceito de função mediante a utilização de *software* com recursos gráficos. A primeira parte consiste na análise histórica do desenvolvimento do conceito de função, apresentando alguns povos e matemáticos que contribuíram para a construção dessa noção. Já na segunda parte, é realizada a apresentação do referencial teórico que norteou a pesquisa denominado Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, a qual enfatiza a necessidade de coordenação dos registros gráfico, tabular e algébrico para ocorrer apreensão do conceito de função. A última categoria objetivou a apreciação das potencialidades da planilha na compreensão do conceito de função afim e quadrática por meio da coordenação dos referidos registros.

O capítulo 5 traz, por sua vez, a descrição da metodologia empregada na pesquisa, ressaltando alguns aspectos sobre os participantes, os instrumentos aplicados e as atividades realizadas.

Apresenta-se no capítulo 6 a análise do questionário, bem como a caracterização da amostra definida a partir da aplicação desse instrumento.

O capítulo 7 propõe-se a descrever as atividades realizadas referentes à função do 1º grau, além de analisar os resultados obtidos, destacando o comportamento do grupo frente às tarefas propostas.

De forma semelhante, o capítulo 8 é reservado para a apresentação das atividades, visando ao desenvolvimento do conceito de função do 2º grau, à apreciação dos protocolos de registros dos participantes e aos comentários sobre a reação do grupo ao realizar a seqüência de tarefas proposta.

O capítulo 9 é destinado à exposição e à apreciação da última atividade aplicada que objetivou a complementaridade entre os diferentes tipos de registros das funções afins e quadráticas, mediante a utilização de um aplicativo construído com os recursos da planilha.

No capítulo 10 são feitas as apreciações do questionário final, respondido pelos participantes da pesquisa, que visou à avaliação do trabalho realizado.

Conclusivamente, são apresentadas as considerações finais sobre a pesquisa realizada, vislumbrando algumas possibilidades de trabalhos futuros. Além disso, após as referências bibliográficas, têm-se os apêndices com os questionários e as atividades.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

Investigar e avaliar como ocorre o processo de compreensão do conceito de função, segundo a Teoria de Duval, em alunos do ensino fundamental – 8ª série – mediante a utilização da planilha.

2.2 Objetivos Específicos

3.2.1 Relacionar os registros de representações semióticas, mobilizados no processo de compreensão do conceito de função, segundo a Teoria de Duval.

3.2.2 Analisar os protocolos de registros dos alunos, realizados nas atividades propostas.

3.2.3 Investigar a contribuição da utilização da planilha no desenvolvimento do conceito das funções afim e quadrática.

3.2.4 Investigar a opinião dos participantes da pesquisa sobre a contribuição da planilha para a aprendizagem do conceito de funções afim e quadrática.

3 PROBLEMAS

3.1 Problema de Pesquisa

Em várias situações do cotidiano, as relações expressam uma função e, no entanto, parece haver certa dificuldade na tentativa de desenvolver esse assunto em sala de aula. É fato, portanto, que utilizamos o conceito de modo tão natural, somente enquanto esse não é associado à função matemática de forma rigorosa.

Minha experiência, como educadora, tem mostrado que muitas dessas dificuldades na aprendizagem dessa noção são resultantes da forma como é desenvolvido esse tópico em algumas escolas. Inicia-se o desenvolvimento desse assunto, apresentando-se ao aluno a definição que estabelece certo tipo de correspondência entre dois conjuntos, enfatizando-se apenas a representação algébrica e, imediatamente, trabalhando-se exercícios de fixação, sem que seja feita uma conexão com a realidade.

Esse tipo de abordagem acarreta dificuldades no desenvolvimento do pensamento funcional, uma vez que não aperfeiçoa a idéia de transformação, de grandezas que se modificam interdependentemente. É justamente a noção de variabilidade que torna as funções um instrumento fundamental para físicos, químicos, economistas e biólogos, por exemplo. Além disso, essa noção é aplicável a diversas situações do dia-a-dia, como o consumo de combustível, o pagamento do imposto de renda, o pagamento de uma corrida de táxi, entre outras, e, no entanto, parece haver certa complexidade na compreensão desse assunto, quando associado à função matemática.

Godino e Font (2004) assinalam a dificuldade dos alunos em diferenciar variáveis de incógnitas. Uma variável tem como característica fundamental a possibilidade de representar números quaisquer, enquanto a incógnita representa um único número desconhecido em uma equação.

Além disso, vários pesquisadores em Educação Matemática apontam obstáculos na apreensão do conceito de função. Tais dificuldades são resultantes da variedade de noções que estão relacionadas ao pensamento funcional. (MENDONÇA e OLIVEIRA, 1999). Dentre esses aspectos, destacam-se: as representações gráficas, tabulares e algébricas, o reconhecimento de variáveis dependentes e independentes, a noção de conjuntos numéricos, domínio e imagem.

Couy e Frota (2007) realizaram uma investigação junto a alunos de um curso de especialização em Educação Matemática, analisando as idéias desses docentes quanto à variação de funções de variável real, por meio da visualização gráfica, incentivando a transposição entre suas formas de representação. Os resultados obtidos com esse trabalho demonstraram certa dificuldade, por parte desses professores, na compreensão dos gráficos e no estabelecimento das conexões entre vários tipos de representação de uma função. As autoras alertam que esses empecilhos podem ser resultantes do pouco contato que os discentes têm com a construção gráfica no decorrer de suas trajetórias estudantis.

A pesquisa realizada por Zuffi (2001) também foi direcionada a professores. Segunda a autora, os docentes que participaram dessa investigação apresentaram dificuldades em conceituar função.

Pelho (2003) ressalta que a dificuldade dos alunos na apreensão do conceito de função reside na falta de compreensão das variáveis, no não entendimento da idéia de dependência funcional entre as mesmas e a não articulação entre as diferentes representações desse conceito.

Lopes (2004) enfatiza que, na abordagem do conceito de função, é dada ênfase ao “tratamento algébrico” (LOPES 2004, p. 54), privilegiando o emprego de exercícios mecânicos, sem haver significado para o estudante.

De acordo com Borba e Penteado (2005), as representações tabulares e gráficas praticamente não são utilizadas, devido à dificuldade em construí-las, empregando–se apenas o lápis e o papel.

Impulsionada por meu interesse como professora e pesquisadora e pela consulta feita em várias pesquisas, proponho um trabalho que se utilize de um ambiente informatizado para o desenvolvimento do conceito de função, na perspectiva de responder à seguinte questão norteadora: **como a utilização da planilha pode contribuir para a compreensão do conceito de função?**

No intuito de construir possíveis respostas para o questionamento acima exposto, é pertinente salientar que foram desenvolvidas noções básicas das funções afim e quadrática, visto que essa investigação teve como participantes estudantes da 8ª série do ensino fundamental. Esse trabalho teve como enfoque a análise dos procedimentos feitos pelos alunos na coordenação das múltiplas representações de uma função, identificando as variáveis dependentes e independentes. Desse modo, os discentes relacionaram a variação das grandezas envolvidas e exploraram os movimentos geométricos dos gráficos e, mais precisamente, consideraram as modificações ocorridas a partir de translações e simetrias.

3.2 Questões de Pesquisa

4.2.1 Ao utilizar a planilha como recurso no processo de compreensão do conceito de função, como ocorre a coordenação dos registros de representação tabular, gráfico e analítico?

4.2.2 Como são respondidas as questões propostas aos discentes em atividades que utilizam a planilha como recurso para a aprendizagem?

4.2.3 De que forma a utilização da planilha pode contribuir no processo de apreensão do conceito das funções afim e função quadrática?

4.2.4 Como os discentes avaliam a utilização da planilha para a aprendizagem do conceito das funções afim e quadrática?

4 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Na presente dissertação, os pressupostos teóricos foram desenvolvidos em três categorias principais: evolução histórica do conceito de função, a compreensão do conceito de função e a Teoria de Duval e, finalmente, a compreensão do conceito de função mediante a utilização de *software* com recursos gráficos.

4.1 Evolução Histórica do Conceito de Função

Tem-se por objetivo abordar algumas contribuições dos matemáticos no decorrer dos séculos na construção do conceito de função. Ressalta-se que essa noção evoluiu a partir da motivação despertada pelos problemas matemáticos em cada época.

Segundo Youschkevick (1976 citados por PELHO, 2003), a evolução do conceito de função divide-se em três etapas principais: Antigüidade, fase que se caracteriza pelo estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, não havendo a noção de variáveis; Idade Média, onde prevalecem as descrições gráficas e verbais expressas sob a forma geométrica e mecânica; e, finalmente, o Período Moderno, que é destacado pela hegemonia das expressões analíticas da função.

Ao analisar aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de função, observa-se que as representações tabular, gráfica e algébrica estão presentes. Moura e Moretti (2003, p. 69) destacam que a evolução desse conceito foi marcada por etapas:

> Na Antigüidade há o estudo de casos particulares de dependência entre duas variáveis, não havendo, contudo, a noção geral de quantidade variável e funções. Já, na Idade Média, estas noções gerais são expressas pela primeira vez sob a forma geométrica e mecânica, mas na qual cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definido por uma descrição verbal ou por um gráfico. E só no Período Moderno, final do século XVI e especialmente durante o século XVII, que expressões analíticas e funções começam a prevalecer. Estes estágios refletem, na realidade, o caminho percorrido pelo homem através da história rumo à

> generalização e à formalização do conceito de funções. O processo de abstração demonstra uma real e profunda compreensão do conceito ao mesmo tempo em que é fator de construção desta compreensão.

Godino, Batanero e Font (2003) afirmam que a análise histórica mostra que a matemática é um conjunto de conhecimentos em constante evolução, e esse progresso ocorre a partir da necessidade de resolver determinados problemas matemáticos, internos à própria área ou aplicáveis a outros contextos, relacionando-os com outros domínios do conhecimento.

De acordo com esses autores, a evolução da Matemática não ocorreu somente em razão do acúmulo de conhecimentos. Os conceitos matemáticos, conforme se sabe, foram sendo modificados em seus significados, no transcorrer do tempo, foram ampliados, aprimorados ou revisados, adquirindo maior relevância, ou também, ocupando plano secundário.

Nessa perspectiva, verifica-se que o conceito de função também se modificou no decorrer dos séculos. Embora não haja consenso entre os autores quanto à origem desse conceito, a idéia de funcionalidade é atribuída aos babilônios e ao uso de tabelas entre os gregos, estabelecendo conexão entre a Matemática e a Astronomia.

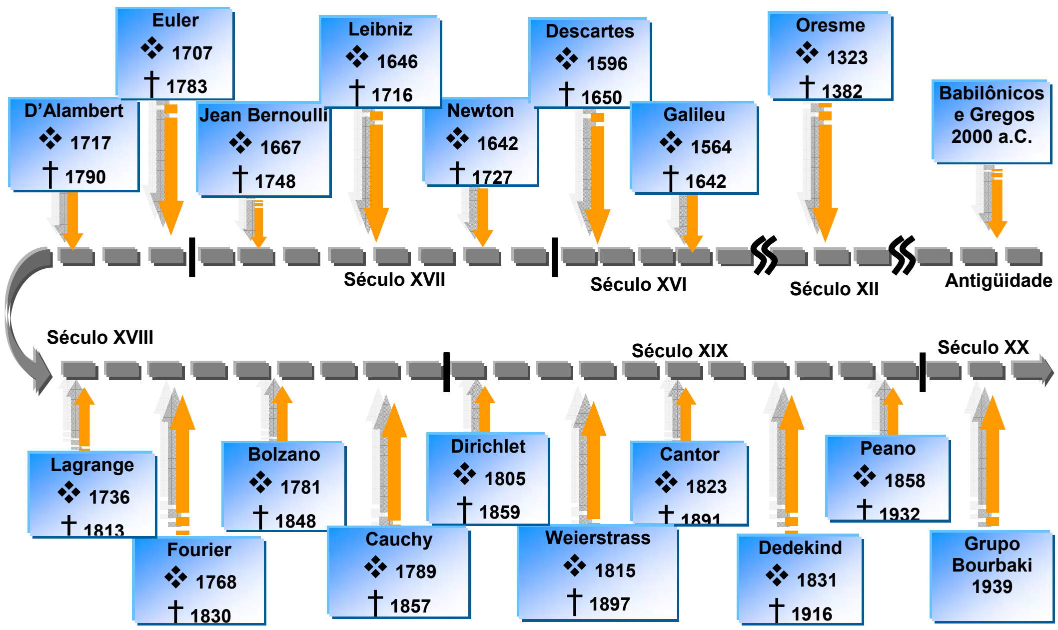


Figura 1 – Principais povos e matemáticos que contribuíram para a evolução do conceito de função

Vários estudiosos, no decorrer dos séculos, contribuíram para o desenvolvimento desse conceito. A Figura 1 mostra uma linha do tempo, apresentando os principais matemáticos e povos que contribuíram para o desenvolvimento desse conceito.

Nicole Oresme (1323 – 1382), teólogo e matemático francês, descreveu graficamente a relação de dependência entre a velocidade e o tempo para um corpo em movimento com aceleração constante. O eixo horizontal – longitude – representava o tempo, e o vertical – latitude – a velocidade. A grande contribuição de Oresme foi representar a função de uma variável por meio de uma curva. Ele fez uso dessa idéia de forma eficaz apenas para a função linear.

De acordo com Boyer (1974), Oresme dedicou-se ao estudo do modo como uma função varia, isto é, à equação diferencial da curva e à forma como a área sob a curva varia, ou seja, à integral da função.

Já Galileu Galilei (1564–1642) verificou que, desprezando a resistência do ar, todo corpo, abandonado de uma altura próxima à superfície da Terra, cai em queda livre, independentemente de seu tamanho, de sua massa e de sua forma. Segundo Eves (2005, p. 354): "Galileu estabeleceu a lei segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda." Essa linguagem denota que Galilei se utilizava do conceito de proporção para estabelecer uma relação funcional entre a distância percorrida por um corpo até chegar ao chão e o tempo gasto durante essa queda, considerando que esse objeto está sujeito à aceleração da gravidade.

Após o Renascimento, a álgebra formal avançou, sendo que o ápice desse processo ocorreu com a publicação de *La Geómètrie* por René Descartes (1596 – 1650). De acordo com Boyer (1974), praticamente toda essa obra está dedicada à aplicação da álgebra à geometria. Verifica-se que a teoria das funções utilizou-se da obra de Descartes, uma vez que, no referido trabalho, há o estabelecimento da relação de dependência entre quantidades variáveis através do uso de equação em x e y. No entanto, há uma diferença substancial na forma de analisar essas relações atualmente. Na época de Descartes, os parâmetros e incógnitas eram vistos como segmentos e, hoje em dia, como números.

O delineamento do conceito de função tem suas primeiras e relevantes contribuições a partir dos trabalhos desenvolvidos por Issac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). O primeiro contribuiu por meio da publicação do *Method of Fluxions, em 1736*. Nesse trabalho, Newton descrevia a geração de uma curva, por meio do movimento contínuo de um ponto, sendo que a abscissa e a ordenada desse ponto gerador eram consideradas variáveis. Essas quantidades variáveis foram chamadas de "fluentes" por Newton (EVES, 2005). Leibniz – por sua parte - utilizou o termo função pela primeira vez com a mesma conotação que é utilizada atualmente. Nesse período, as definições desse conceito eram determinadas a partir de uma expressão algébrica. Ressalta-se, ainda, que Newton e Leibniz desenvolveram seus estudos de forma independente, por haver certa rivalidade entre eles.

O estudo das curvas exponenciais é atribuído a Jean Bernoulli (1667 – 1748). Bernoulli tinha vago conceito de função. De acordo com Boyer (1974, p. 311), essa noção era expressa por: "uma quantidade composta de qualquer modo de uma variável e constantes quaisquer."

Coube, então, a Leonhard Euler (1707 – 1783), a ampliação do significado de função, por meio do estudo de processos infinitos, além da contribuição expressiva para o desenvolvimento da linguagem simbólica, com o uso de notações utilizadas hoje em dia. Euler pesquisou as funções logarítmicas, dedicando-se, principalmente, ao estudo dos logaritmos de números negativos. De acordo com Euler, esses números não são reais como havia afirmado Jean Bernoulli e Jean-le-Rond D'Alembert (1717 – 1790), mas imaginários (BOYER, 1974).

D'Alembert se correspondeu com Euler sobre o "problema das cordas vibrantes", envolvendo o estudo de equações diferenciais e de funções diferenciáveis. Além disso, procurou melhorar o conceito de limite, contribuindo indiretamente com o aperfeiçoamento da definição de função (ZUFFI, 2001).

Jean Louis Lagrange (1736 – 1813) foi um grande matemático do século XVIII, colaborando com a precisão da análise e com a definição de função. Apesar de Lagrange não ter obtido o sucesso esperado, sua influência foi muito significativa para o desenvolvimento da chamada "Era do Rigor" no século XIX. Em sua obra, *Théorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel*, Lagrange representou uma função $f(x)$ por uma série de Taylor, fazendo uso, pela primeira vez, da notação de derivada usada atualmente.

Em sua concepção, "[...] as funções representam operações distintas que se realizam sobre quantidades conhecidas para obter os valores de quantidades desconhecidas. Em outras palavras, uma função é uma combinação de operações." (PELHO, 2003, p. 21).

Lagrange ainda escreveu outras duas grandes obras: O *Traité de Résolution dês Equations Numériques de Tous Degrés* (1767), na qual descreve o método de aproximação das raízes de uma equação por meio de frações contínuas, e a *Mécanique Analytique* (1788), que contém as equações gerais dos movimentos de um sistema dinâmico (EVES, 2005).

O século XIX, por sua vez, foi marcado pelo rigorismo no pensamento matemático. Destacam-se na introdução desse aspecto Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Carl Friederich Gauss (1777 – 1855).

Cauchy dedicou-se especialmente às teorias das funções de uma ou mais variáveis. Zuffi (2001, p. 13) apresenta essa definição:

> Chamam-se funções de uma ou mais varáveis quantidades variáveis às quantidades que se apresentam, no cálculo como resultados de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis.

É pertinente sublinhar que essa definição não esclarece a origem dessas operações (ZUFFI, 2001).

Bernhard Bolzano (1781 – 1848) desenvolveu idéias semelhantes às de Cauchy. Em 1840, Bolzano percebeu que "a infinidade de números reais é de tipo diferente da infinidade de inteiros, sendo não enumerável." (BOYER, 1974, p. 381).

Karl Weirstrass (1815 – 1897), matemático alemão, contribuiu com a teoria das funções complexas por meio das séries de potências, demonstrando interesse especial por funções inteiras e funções definidas por produtos infinitos. Weirstrass ficou conhecido como o "pai da análise", por ter dado inicio à chamada aritmetização da análise, reduzindo seus princípios ao conceito de número real.

Joseph Fourier (1768 - 1830) contribuiu para a evolução do conceito de função, ao afirmar que qualquer $y = f(x)$ pode ser representada por uma série, conhecida atualmente como Série de Fourier. Para essa representação, basta que as funções sejam contínuas e diferenciáveis por partes, podendo apresentar infinitos pontos de descontinuidade na reta (ZUFFI, 2001). Essa idéia também foi concebida por Daniel Bernoulli (1751 – 1834).

Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) definiu uma função de forma ampla descrita por Boyer (1974, p. 405): "[...] se uma variável y está relacionada com uma variável x, de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x.” A referida definição é semelhante à utilizada hoje em dia, estabelecendo a correspondência entre dois conjuntos numéricos. No entanto, naquela época, não haviam sido estabelecidas as noções de conjunto e de número real.

Georg Cantor (1845 – 1918) desenvolveu a teoria dos conjuntos, a qual se tornou essencial para o entendimento da topologia e para os fundamentos da teoria das funções reais, permeando vários ramos da Matemática (EVES, 2005). Cantor contribuiu com a noção de infinito, ao demonstrar que os infinitos dos números naturais não são os mesmos que os dos números reais.

Já Richard Dedekind (1831 – 1916) definiu com maior precisão um conjunto infinito, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre esse conjunto e um de seus subconjuntos próprios (ZUFFI, 2001).

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932) desenvolveu uma linguagem formal e se utilizou de vários símbolos conhecidos atualmente, em seu trabalho *Formulaire de Mathemátiques.* Entretanto, sua principal contribuição foi o estabelecimento de três conceitos primitivos nos fundamentos da aritmética: zero, número, inteiro não negativo e a relação de sucessor, satisfazendo seus cinco postulados. Os axiomas de Peano foram escritos pela primeira vez em *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita,* em 1889. Tal estudo resultou na construção rigorosa do conjunto dos números naturais, podendo ter influenciado, posteriormente, a elaboração da definição de função utilizada atualmente.

O pensamento matemático do século XX foi marcado pela abstração e pela preocupação com a análise de esquemas amplos (BOYER, 1974). Com base nessas concepções, a partir de 1939, surgem na França várias publicações de Bourbaki, pseudônimo usado por um grupo de matemáticos, que tiveram repercussão em boa parte da comunidade matemática internacional. A obra desse grupo se caracteriza pelo tratamento axiomático dado aos diversos assuntos abordados, demonstrando uso de uma estrutura lógica e abstrata.

O conceito de função utilizado atualmente foi proposto por Bourbaki em 1939, a partir do desenvolvimento da teoria dos conjuntos. Zuffi (2001) afirma que a definição atual de função é dada pela síntese de dois aspectos (sua lei e seu valor) acrescida dos conceitos de domínio e de contradomínio, definindo-a de forma simbólica e formal.

4.1.1 O processo de compreensão de função com base em sua evolução histórica

Observou-se que o conceito de função transformou-se de maneira substancial no decorrer dos séculos, desde as primeiras noções intuitivas de funcionalidade que envolviam as idéias de variação e de dependência, tendo chegado à definição simbólica e formal utilizada atualmente. Nota-se que esse conceito foi desenvolvido de forma não-linear, envolvendo um processo dinâmico, permeado de erros e acertos.

Ao analisar o processo de construção da noção de função na humanidade, verifica-se que esse ocorreu a partir do desenvolvimento de suas representações. Além disso, observa-se que a formalização de um determinado conceito é a última etapa do processo de investigação realizado por um matemático profissional, e esse é decorrente de conjecturas, explorações, análises e generalizações. De maneira semelhante, os alunos devem vivenciar todas essas etapas, a fim de construírem seus conhecimentos, a partir de suas análises e de ações sobre o objeto do conhecimento a ser estudado (GRAVINA E SANTAROSA, 1998).

Nesse sentido, a utilização de *softwares* que permitem a construção gráfica pode contribuir para que os alunos vivenciem todas as etapas supracitadas na compreensão do conceito de função. O dinamismo proporcionado por esses ambientes faz com que os discentes compreendam a "[...] família de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados". (GRAVINA e SANTAROSA, 1998, p. 11). Torna-se, então, possível analisar rapidamente as modificações ocorridas em uma determinada função a partir da alteração dos seus parâmetros, transformando esses aplicativos em potentes recursos pedagógicos, uma vez que os alunos detêm sua atenção na interpretação de suas ações e não na realização da construção gráfica. Já a elaboração de gráficos demanda muito tempo, quando feita com lápis e papel, restringindo-se apenas ao uso de fórmulas simples.

Godino, Batanero e Font (2003) destacam a importância do raciocínio empírico - intuitivo na elaboração de novos conceitos. Fazer estimativas, estudar casos particulares, ou, então, analisar contra-exemplos fornece subsídios para a elaboração de proposições e teorias. Normalmente, a dedução formal é o último estágio na construção e ampliação de conceitos. Por isso cabe ressaltar que, durante o processo de construção de um determinado conceito, deve-se oportunizar aos discentes a utilização de procedimentos intuitivos, num primeiro momento, uma vez que esse estágio proporciona uma aprendizagem mais ativa, sendo um poderoso instrumento de exploração e construção do conhecimento matemático.

A perspectiva histórica mostra que os conceitos, em especial o de funções, não surgiram de maneira definitiva, mas foram evoluindo no decorrer do tempo e também estiveram sujeitos a falhas. Conseqüentemente, no processo de apreensão desses conceitos, por parte dos alunos, é natural que tenham dificuldades e, principalmente, cometam erros, cabendo ao professor destacar que é possível aprender com os próprios erros (GODINO, BATANERO E FONT, 2003).

4.2 A Compreensão do Conceito de Função e a Teoria de Duval

Como aporte teórico a essa pesquisa, optou-se pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval[1]. Nessa concepção, é dado enfoque à coordenação dos registros de representações semióticas[2] de um mesmo objeto de estudo, a fim de que esse seja compreendido em sua totalidade.

Por meio da análise histórica do desenvolvimento do conceito de função, feita anteriormente, percebe-se que essa noção foi reformulada e ampliada a partir de suas representações semióticas: algébrica, tabular e gráfica. De acordo com Duval (2003, p.13): "É suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático".

A presente pesquisa objetivou a investigação das contribuições da planilha, na compreensão do conceito de função, visto que esse ambiente informatizado possibilita a conversão entre as diferentes representações da função, de forma interativa e dinâmica, em consonância com a Teoria de Duval.

Duval (2003) afirma que, em decorrência da informática e da tecnologia estarem presentes na sociedade atual de forma mais complexa, faz-se necessário

[1] Filósofo e Psicólogo francês, seus estudos são direcionados à Psicologia Cognitiva, enfatizando a atividade matemática e os problemas referentes à sua aprendizagem.
[2] Denominação utilizada para a ciência geral do signo; semiologia.

um maior conhecimento inicial em Matemática. Ademais, o autor destaca que, no ensino fundamental e médio, essa disciplina tem como objetivo contribuir com o desenvolvimento do raciocínio, da investigação e da visualização (DUVAL, 2003; 2006).

Os processos de construção do conhecimento são complexos e exigem diferentes abordagens de ensino, tais como a epistemológica e a educacional, que apresentam como ponto comum o uso da noção de representação (DUVAL, 2006).

De acordo com Duval (1993 citados por DAMM, 2008), existem três tipos de representação que exercem distintas funções:

- A mental ou subjetiva, que ocorre em nível de pensamento, de forma consciente. Essa consiste nas crenças e nas concepções do indivíduo frente aos fenômenos físicos e naturais e seu papel fundamental é a objetivação.
- As computacionais, que são internas, porém não conscientes. O sujeito executa uma determinada atividade de forma automática, sem pensar em cada etapa de sua realização. O tratamento é a principal função dessa representação.
- As semióticas, que são externas e conscientes, realizam as funções de objetivação e de tratamento. Nesse tipo de representação, devem ser considerados dois aspectos: a forma e o conteúdo, isto é, o representante e o representado.

Para Duval (2003; 2006) os sistemas de escrita, os gráficos, as figuras geométricas e a língua natural compõem a variedade de representações semióticas empregadas na matemática. Esses registros, mobilizados nos processos matemáticos, são subdivididos em dois grupos: os monofuncionais e os multifuncionais. O primeiro tipo refere-se aos processos matemáticos que podem ser tratados por meio de algoritmos, como, por exemplo, os sistemas de escritas numéricas e algébricas e os gráficos cartesianos, enquanto, na segunda categoria, os tratamentos são convertidos em algoritmos. A linguagem oral e escrita e as figuras geométricas, em duas ou três dimensões, são os representantes desse sistema.

A atividade matemática consiste na mudança das representações, de forma intrínseca, por meio de dois tipos de transformações: tratamento e conversão (DUVAL, 2003; 2006).

Para Duval (2003; 2006), os tratamentos são transformações de representações dentro de um único sistema de registro. As operações realizadas, em um mesmo sistema de notação, podem ser consideradas um exemplo de tratamento, enquanto a transformação que exige uma mudança de registro sem trocar o objeto é denominada conversão. Esse aspecto é mais complexo que o tratamento, pois exige que o sujeito reconheça o objeto nas duas diferentes representações. Cabe ressaltar que, em diversas situações, os conteúdos das representações não apresentam pontos em comum. São exemplos de conversão: a troca de uma expressão em linguagem natural para a linguagem algébrica e a transformação de equações em gráficos cartesianos (DUVAL, 1999).

No caso das conversões, os estudantes podem não reconhecer o objeto, ao articularem os diferentes tipos de registros, o que ocasiona dificuldades na compreensão do conceito envolvido. Esse obstáculo, na aprendizagem, é denominado por Duval (2003, p. 15) de “fenômeno de não-congruência”.

Duval (2006) enfatiza que as conversões visam à compreensão da complexidade cognitiva, tanto no processo de pensamento requerido pela atividade matemática, quanto no seu aprendizado.

Uma das principais características da atividade matemática é a possibilidade do trabalho concomitante com pelo menos duas representações de um mesmo objeto de estudo: tratamento, além da articulação entre esses aspectos: conversão.

O tratamento se estabelece internamente a um determinado tipo de registro, enquanto a conversão ocorre entre os registros, de forma a conservar a totalidade ou parte do objeto matemático estudado DAMM (2008).

Em concordância com Duval, Damm (2008, p.182) afirma:

> [...] o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim a coordenação entre esses vários registros de representação.

Os objetos de estudos na Matemática, diferentemente da Física, da Química, da Biologia, e de outros domínios do conhecimento científico, não são acessíveis por meio da percepção ou de instrumentos. É necessária a utilização de uma linguagem simbólica e de suas representações semióticas para que os conceitos matemáticos sejam compreendidos DUVAL (2003; 2006). Para Duval (1999), nos outros domínios do conhecimento, as representações semióticas são imagens ou descrições sobre algum fenômeno físico, podendo ser acessadas de maneira instrumental por meio da percepção visual.

O mesmo autor afirma que, na Matemática, encontra-se a maior quantidade de representações semióticas, sendo que algumas são específicas desse domínio, como a linguagem algébrica e as notações. E outras representações, por sua vez, são comuns a diferentes áreas do conhecimento como, por exemplo, à linguagem natural. Em decorrência do número expressivo de registros para um único objeto matemático, a compreensão do conceito, das propriedades e das relações que o envolvem tornam-se mais complexas.

Para Duval (1993), o funcionamento cognitivo do pensamento humano não pode ser separado da existência de uma variedade de registros de representação semióticos. O teórico define *semiósis* com sendo a compreensão ou a produção de uma representação semiótica de um objeto e *noésis* como a conceitualização desse objeto. Conseqüentemente, a *semiósis* e *noésis* são inseparáveis para que haja a aprendizagem da matemática. A *noésis* ocorre somente com a coordenação da *semiósis*, isto é, quanto maior for a mobilização de diferentes registros de representação de um objeto, maior é a possibilidade de apreensão conceitual do mesmo DUVAL (1993).

Damm (2008) sublinha que inúmeras pesquisas em Educação Matemática constataram a dificuldade do discente na compreensão de determinado conceito matemático é decorrência da não transposição de uma representação para outra. A referida autora afirma que: “Ele consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, porém, é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão desse objeto.” (DAMM, 2008, p. 168).

Verifica-se que as dificuldades dos alunos, na compreensão do conceito de função, concentram-se na não articulação entre duas ou mais representações de um mesmo objeto, restringindo-se, apenas, ao tratamento de um único tipo de registro. Pelho (2003), Mendonça e Oliveira (1999), Couy e Frota (2007) destacam obstáculos na apreensão do conceito de função em virtude da dificuldade dos discentes transporem as diversas representações desse objeto. Ao passo que a investigação, realizada por Zuffi (2001), averiguou que as dificuldades epistemológicas apresentadas pelos professores, participantes de sua pesquisa, residiam no fato de que definiam função, valendo-se apenas da representação algébrica, restringindo o seu conceito “em termos de equações e elementos desconhecidos a serem extraídos delas.” (ZUFFI, 2001, p. 15).

Em alguns casos, negligencia-se o fato de que o estudo das funções contempla os diferentes tipos de representação de forma intrínseca, optando-se por enfatizar apenas o aspecto algébrico. E, quando trabalhadas, as representações tabulares e gráficas ficam restritas ao nível de comunicação de informações por meio de leitura e interpretação, deixando em segundo plano as suas construções.

Na perspectiva de Duval (2006), primeiramente, é necessário determinar as condições cognitivas que possibilitam a compreensão de um determinado tópico matemático, para, então, analisar a origem das dificuldades dos discentes em assimilar esse assunto.

O aluno compreende determinado tópico à medida que efetua a coordenação entre as representações, realizando as devidas conversões, isto é, modificando a forma como o conhecimento é representado, objetivando a complementaridade entre esses registros.

Duval (2006, p. 107) destaca esses aspectos no trecho a seguir:

> A função que os símbolos exercem na matemática não é substituída por objetos, mas por outros símbolos. O que importa não são as representações, mas sua transformação. Diferente de outras áreas do conhecimento científico a transformação de símbolos e representações semióticas são o coração da atividade matemática. [3]

O pensamento matemático requer, portanto, a ativação em paralelo de dois ou três registros, mesmo que apenas um pareça ser o suficiente sob o ponto de vista matemático (DUVAL, 1999). De acordo com a referida teoria, Damm (2008) enfatiza que não há construção de um determinado conhecimento matemático sem que haja mobilização entre seus registros.

É imprescindível a articulação entre duas representações de um mesmo tópico a fim de que haja apreensão dos conceitos. A mudança de registro, portanto, não implica apenas a alteração da forma de tratamento de um mesmo objeto, mas, para haver a articulação entre esses aspectos, é necessário explicitar suas propriedades e diferenças, sendo essa uma condição essencial para a compreensão de um conceito (DUVAL, 2003).

O acesso a um determinado objeto matemático ocorre apenas por meio de sua representação, por isso é necessária a distinção entre o objeto em questão e as

[3] Tradução feita pela autora.

suas representações. Ademais, de acordo com Duval (1999), para que haja o entendimento sobre um determinado tópico em Matemática não pode haver confusão entre o objeto e suas respectivas representações. Por exemplo, os números não devem ser identificados como dígitos; e as figuras geométricas, mesmo construídas com precisão, representam casos particulares e não podem ser consideradas como provas para uma determinada propriedade.

Enfatiza-se, também, que, ao fazer a transposição entre a representação algébrica de uma função e seu respectivo gráfico, houve uma conversão da representação, conservando o objeto.

Normalmente, os gráficos são construídos no plano cartesiano a partir da localização de cada par ordenado, sendo que o valor da função f em um ponto x é calculado por meio da expressão algébrica da função f. E, para a construção de uma nova representação gráfica, semelhante à anterior, todo o processo é repetido. No entanto, se forem consideradas todas as funções pertencentes a uma mesma família, os demais gráficos podem ser construídos mediante movimentos geométricos, como, por exemplo, translação e simetria axial, possibilitando, dessa forma, a análise das alterações ocorridas na representação gráfica a partir da modificação dos parâmetros da expressão algébrica da função.

Moretti (2003, p.159) corrobora essa idéia ao afirmar que:

> [...] na translação de uma curva cuja forma já é conhecida, esse tipo de transformação pode contribuir para que o aluno perceba o traçado/eixo como uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica muito próximo de uma perspectiva preconizada nos trabalhos de Duval.

A tabela, o gráfico e a expressão algébrica de uma função propiciam uma representação parcial, com especificações próprias e, quando articuladas, permitem a complementaridade entre os registros, possibilitando a compreensão de novos aspectos sobre esse objeto de estudo.

A escolha por esse referencial teórico está, pois, em concordância com a questão que norteia essa pesquisa, uma vez que, no trabalho com funções em ambiente informatizado, há a possibilidade de coordenação das representações, de forma simultânea, privilegiando a análise dos resultados obtidos a partir das ações realizadas pelos alunos.

4.3 A Compreensão do Conceito de Função Mediante a Utilização de S*oftware* com Recursos Gráficos

4.3.1 O estudo de funções no ensino da Matemática

O estudo de funções, nas séries finais do ensino fundamental, objetiva a identificação de regularidades, o estabelecimento de relações e a descrição de generalizações por meio da linguagem algébrica. No entanto, na educação básica, verifica-se, atualmente, que é dada ênfase à representação algébrica, ocasionando dificuldades na compreensão da variação entre as grandezas relacionadas entre si por uma lei física ou de formação.

A Matemática, de forma mais ampla, visa ao desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento crítico, através do estudo das regularidades provenientes da observação da realidade e das abstrações humanas.

Godino, Batanero e Font (2003, p. 25) reforçam essa idéia, ao afirmarem que:

> O conhecimento lógico-matemático tem sua origem na capacidade do ser humano em estabelecer relações entre objetos ou situações a partir da atividade que exerce sobre eles e, especialmente, em sua capacidade em abstrair e considerar algumas relações em detrimento de outras igualmente presentes. [4]

O ensino dessa disciplina objetiva a compreensão e a apreciação, por parte dos alunos, do papel da Matemática na sociedade, por meio de seus diferentes campos de aplicação e do modo como essa área do conhecimento contribui para o desenvolvimento social. Além disso, pretende-se que os discentes compreendam e valorizem o método matemático, como forma de raciocínio que permite responder a várias questões do cotidiano, bem como perceber suas potencialidades e limitações (GODINO, BATANERO E FONT, 2003).

Nesse sentido, o estudo de funções contribui para o alcance de seus objetivos, à medida que possibilita aos alunos o desenvolvimento de formas de raciocínio e comunicação, ao utilizar a linguagem algébrica e gráfica, estabelecendo relações

---

[4] Tradução feita pela autora.

entre a matemática e a realidade, aplicando-as, também, em outros domínios do conhecimento.

Em pequena incursão histórica sobre a implantação do conceito de função no ensino secundário no Brasil, verifica-se que sua inserção ocorreu no final da década de 20, com Euclides Roxo (1890 – 1950), então diretor do Externato Pedro II no Rio de Janeiro. Roxo passou a defender a introdução do estudo de função no currículo, abrindo espaço para a valorização das noções de dependência e de variação, em contraposição ao estruturalismo defendido pela Matemática Moderna da época. Ademais, enfatizou a unificação da Matemática, até então subdividida em três áreas distintas: aritmética, álgebra e geometria. Tal projeto baseou-se na modernização do ensino na Alemanha, ocorrida no final do século XIX e início do século XX (VALENTE 2002 e BRAGA, 2006).

Braga (2006) destaca a percepção inovadora de Euclides Roxo em relação à noção de função, ressaltando o seu caráter integrador, ao unificar vários assuntos desenvolvidos na escola secundária.

Além disso, Roxo defendia a idéia de que esse tópico deveria ser desenvolvido nos programas de Matemática desde os primeiros ciclos, a partir da sua representação gráfica e analítica, viabilizando o estabelecimento de relações entre os diversos assuntos dessa área (VALENTE, 2002).

Verifica-se, portanto, que o ensino de funções esteve associado à transposição de suas diversas representações, valorizando o desenvolvimento do pensamento funcional.

Atualmente, o estudo de função, também, deve enfocar o estabelecimento de relações, o reconhecimento de dependência entre as variáveis, além da leitura, interpretação e construção de gráficos. Para que esses objetivos sejam alcançados, é necessário que se desenvolva uma metodologia que propicie a compreensão do significado e a sua aplicabilidade em diversas situações.

4.3.2 O uso de recursos multímeios no processo de ensino-aprendizagem

Dada a atual exigência do mercado de trabalho, o computador hoje é a ferramenta mais requisitada em qualquer lugar. Em decorrência disso, a escola assume a tarefa de contribuir para a formação de indivíduos aptos a intervirem em uma sociedade em que a tecnologia ocupa um espaço cada vez maior.

Nesse contexto, o uso das tecnologias acarretou reflexões e mudanças educacionais destacadas por Dullius e Quartieri (2007, p. 2):

> A presença das tecnologias, principalmente do computador, requer das instituições de ensino e do professor novas posturas frente ao processo de ensino e de aprendizagem. Essa educação necessitará de um professor mediador do processo de interação tecnologia/aprendizagem, que desafie constantemente os seus alunos com experiências de aprendizagem significativas, tanto presenciais como a distância.

É fundamental, portanto, que os alunos explorem ao máximo os recursos tecnológicos, de modo especial, no ensino da Matemática, utilizando *softwares* que propiciem uma aprendizagem dinâmica. A utilização desses recursos, nas instituições educacionais, contribui para o enriquecimento desse processo, favorecendo, desse modo, a participação ativa, crítica e criativa dos discentes.

O sucesso obtido com a utilização do computador no meio educacional depende dos mecanismos e estratégias adequadamente adotados com vistas à inserção do aluno no mundo digital. Não basta, no entanto, disponibilizar o acesso à tecnologia, deve-se proporcionar a utilização desses recursos – tanto para professores quanto para alunos - como uma ferramenta facilitadora no processo de ensino-aprendizagem, permitindo a descoberta de novas relações e encaminhando a construção de novos modelos.

A inserção das novas tecnologias da informática no processo educacional pode colaborar para a quebra de barreiras entre as várias disciplinas curriculares, permitindo que elas se complementem através da interdisciplinaridade.

Pais (2005, p. 31;32) enfatiza esse último aspecto no trecho abaixo:

> Se houve uma época em que as disciplinas escolares sobreviviam através do fechamento de suas fronteiras, criando territórios isolados, a superação dessa concepção toma, hoje, um sentido fundamental para a expansão de

> seus valores educativos. A superação desse desafio passa pelo cultivo de uma postura interdisciplinar na prática pedagógica.

Conseqüentemente, é função do professor superar a fragmentação do conhecimento, estabelecer relações entre as diversas áreas do saber e contextualizar o aprendizado, objetivando a compreensão da realidade por parte do aluno, bem como o seu engajamento na sociedade de forma efetiva.

O estudante, por sua vez, passa a ser o construtor de seu conhecimento e não mais mero receptor de informações. Por meio das novas tecnologias, o discente pode vislumbrar as diversas possibilidades de ampliação dos limites físicos da sala de aula, avançando em direção às novas descobertas. É imprescindível, portanto, que o educando seja estimulado a indagar, questionar, formular hipóteses e elaborar conclusões a fim de aplicar o saber matemático no cotidiano e em outros domínios do conhecimento. Dessa forma, a escola assume a tarefa de contribuir para a formação de indivíduos aptos a intervirem em uma sociedade em que a tecnologia ocupa um espaço cada vez maior.

É pertinente sublinhar que somente a presença dos recursos tecnológicos no ambiente escolar não acarreta transformações na práxis educacional. Essa é, sem dúvida, uma condição necessária na obtenção de resultados significativos quanto à aprendizagem, porém não é suficiente.

Compartilham dessa idéia Santos, Silva e Almeida (2007), ao enfatizarem a importância da vinculação do uso de recursos tecnológicos a uma práxis docente coerente e ao ressaltarem que apenas a utilização desses expedientes não assegura a aprendizagem.

A partir das concepções supracitadas sobre o emprego dos recursos tecnológicos no processo de ensino-aprendizagem, destaca-se que a utilização de *softwares* gráficos, vinculados a tabelas e expressões analíticas, objetiva o desenvolvimento da noção de variáveis dependentes e independentes, contribuindo para a reconstrução do conhecimento de funções.

O uso de *softwares* que proporcionam a exploração conjunta das diferentes representações de uma função - algébrica, gráfica e tabular - torna flexível a passagem de uma representação para outra. O dinamismo da imagem, então, permite a experimentação e a visualização de suas formas representativas. A geração de gráficos vinculados a tabelas e expressões analíticas facilita o estabelecimento das relações entre os coeficientes de uma função. Ao modificar seus parâmetros, o aluno explora um determinado modelo nas condições mais diversas, contribuindo, dessa maneira, para a construção de seu conhecimento de forma mais completa.

Borba e Penteado (2005, p.44) destacam essa idéia:

> [...] há pedagogias que se harmonizam com as mídias informáticas de modo a aproveitar as vantagens de suas potencialidades. Essas vantagens podem ser vistas como sentido a possibilidade de experimentar, de visualizar e de coordenar de forma dinâmica as representações algébricas, tabulares, gráficas e movimentos do próprio corpo.

No decorrer do estudo de funções, devem ser exploradas as noções de variável, dependência, regularidades e generalizações, ao fazer uso de atividades que propiciem a familiarização com as diversas formas de representá-las.

A utilização das representações tabular, analítica e gráfica permite o conhecimento de como as grandezas variam uma em "função" da outra. Segundo Vasconcelos (1996, p. 46): "Conhecer é estabelecer relações; quanto mais abrangentes e complexas forem, melhor o sujeito estará conhecendo".

Construir conhecimento, portanto, significa elaborar a sua síntese, a partir das experiências de cada indivíduo em contato com as informações e com seus pares interlocutores. Com o advento da tecnologia, ampliou-se a possibilidade de obtenção de informações de forma considerável, multiplicando-se as condições de elaboração da síntese do conhecimento. Diante de tal contexto, o grande desafio para os educadores é desenvolver propostas metodológicas que se utilizem dos recursos tecnológicos para acessar informações, estabelecer associações e aplicá-las em novas situações, propiciando ao aluno a compreensão de conceitos.

Nesse sentido, é que se investigou a possibilidade de compreensão do referido conceito: por meio da exploração das potencialidades da planilha, desenvolvendo processos entrelaçados à coordenação das múltiplas representações. A escolha desse aplicativo será discutida a seguir de forma mais detalhada.

4.3.3 A planilha e a compreensão do conceito de função

Encontram-se disponíveis no mercado diversos programas que podem ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Muitos deles, apesar de apresentarem, em sua interface, recursos de hipermídia interessantes, reproduzem modelos tradicionais de ensino, nos quais os alunos testam seus conhecimentos, respondendo a exercícios repetitivos ou do tipo tutorias. Nestes últimos, os discentes lêem definições e propriedades, para, então, responder questões referentes ao assunto tratado.

Sob a perspectiva que considera o educando construtor do próprio conhecimento matemático, existem programas através dos quais é possível fazer conjecturas, testar hipóteses, estabelecer relações e generalizar.

Em consonância com essa concepção, Morgado (2003) subdivide esses programas em dois subgrupos. Na primeira categoria, encontram-se os *softwares* projetados para fins educacionais e que podem ser utilizados como potentes ferramentas pedagógicas. Dentre eles destacam-se: *Cabri-Géomètre*, *Modellus*, *Graphmatica*, *Logo* e o *Winplot*. No segundo grupo, encontram-se os aplicativos produzidos com finalidades mais amplas, os quais podem ser explorados com fins educativos: são os construtores e transformadores gráficos, calculadores numéricos, enfim, os programas que viabilizam a criação e a manipulação de bancos de dados de planilhas.

Ao longo do tempo, à medida que a utilização de computadores pessoais disseminou-se, o contato com aplicativos de edição de texto, planilhas de cálculo, bancos de dados relacionais, elaboração de apresentações, entre outros, de certa forma, popularizou-se. Em especial, a planilha é um tipo de aplicativo muito utilizado em várias áreas do conhecimento e em diversas profissões. Trata-se de uma ferramenta computacional com muitos recursos relacionados ao cálculo de funções encadeadas e à confecção de gráficos, principalmente.

Ademais, o advento de processadores, cada vez mais poderosos, os avanços em engenharia computacional (de *software*) e a evolução das interfaces "homem-máquina" tornaram esses aplicativos capazes de realizar tarefas complexas, por meio de interfaces "amigáveis" as quais facilitam a utilização de tais recursos sem que o usuário perca o foco na sua aplicação com configurações e comandos complexos.

Assim, esse trabalho fez uso da planilha de cálculo na apreensão do conhecimento sobre funções, tendo em vista a ampla disponibilidade desse recurso nos estabelecimentos de ensino particulares e a facilidade com que os alunos se familiarizam com seus comandos.

Mais especificamente, utilizou-se a planilha Excel, uma vez que todo computador pessoal que executa o sistema operacional Windows, em suas diferentes versões, apresenta o pacote MS Office, que contém esse aplicativo.

Esta seção não tem a pretensão de ser um guia rápido de usuário dessa planilha, mas, simplesmente, a de apresentar as razões pelas quais esse *software* foi adotado e, também, enumerar algumas particularidades que o tornam bastante útil nesse trabalho.

Por ser um *software* componente de um pacote de aplicativos fornecido por um grande desenvolvedor, ele é facilmente encontrado na versão em língua portuguesa. Também permite com facilidade a construção de tabelas e a replicação de fórmulas entre as células que compõem uma planilha.

O usuário pode alterar um dado valor e propagar essa alteração quase que instantaneamente entre várias células e planilhas, sem contar que uma mesma pasta pode ser compartilhada simultaneamente por mais de um usuário, permitindo a sua utilização por um grupo de alunos, por exemplo. Essas facilidades, se bem entendidas e exploradas, podem proporcionar grande interatividade entre educandos e professor.

Também é possível importar arquivos de outros formatos, como, por exemplo, o de texto (".txt"), o qual normalmente é utilizado para armazenar grandes quantidades de dados tabelados. Tal recurso pode enriquecer o aprendizado a partir da utilização de casos reais. Além disso, é possível exportar uma planilha para os mais variados tipos de formatos de arquivos, inclusive html, a fim de publicar na Internet, ou na Intranet da escola, os dados processados pela turma.

Esse recurso possui uma gama extensa de funções e fórmulas pré-programadas, que abrangem as seguintes áreas: a estatística, a financeira, o processamento de texto, a matemática, o processamento de informações, a lógica, entre outras. Certamente, tal artifício facilita a utilização desse *software* no ensino fundamental e médio, sem a necessidade de programação ou de utilização de uma sintaxe complexa. Nesse aspecto, reside outra virtude desse aplicativo: a sintaxe simples e de fácil compreensão.

Há também a alternativa de utilização de um recurso chamado “Relatório de Tabela Dinâmica”, o qual pode apresentar um mesmo conjunto de dados sob agrupamentos diferentes, proporcionando a interpretação dos dados em diferentes ângulos, como também o processamento desses, para, então, gerar gráficos e analisar a lei de formação.

Devido à possibilidade de escrever equações em sintaxe própria e simples, executar cálculos com rapidez e propagar as atualizações e alterações de forma automática, é possível que o usuário se concentre no assunto principal sem perder o foco em outras tarefas auxiliares e paralelas. O *software* permite a construção gráfica, viabilizando a coordenação das múltiplas representações de uma função e, conseqüentemente, possibilitando a compreensão de tal conceito. Além disso, alguns aspectos, como a translação e a simetria de funções, podem ser facilmente construídos, com base nas vantagens mencionadas acima. Essas características, aliadas ao recurso de criação de gráficos, podem ser muito exploradas.

Os gráficos criados são automaticamente atualizados conforme são alterados os valores das variáveis x e y; como acontece no caso citado anteriormente da translação e da simetria, em que o professor e os alunos podem alterar facilmente a função para constatar tais propriedades. Estão, além disso, disponibilizados nesse aplicativo diversos modelos de gráficos, sendo possível personalizar alguns tipos especiais. Neste trabalho serão utilizados os gráficos do tipo “dispersão”, envolvendo os relacionamentos linear ou quadrático.

Ferreira e Gomes (2007, p.10) incentivam o uso desse recurso como um facilitador da aprendizagem de matemática, ao afirmarem que:

> O Excel é uma planilha eletrônica em que a utilização correta pressupõe a compreensão de conceitos matemáticos. O programa é capaz de racionalizar e de simplificar as ferramentas fundamentais da planilha, tornando-as mais acessíveis a estudantes e a professores.

Ferreira (2004), ao comparar a utilização da planilha com o *Winmat,* para desenvolver as operações com matrizes, constatou uma maior compreensão sobre o assunto ao utilizar o primeiro recurso. Enquanto que esse aplicativo exige um procedimento diferente em cada tipo de operação, no *Winmat,* as operações já vêm programadas, não sendo necessário o seu entendimento. A autora ressalta ainda que os participantes dessa pesquisa acharam a planilha mais interativa que o *Winmat*.

Morgado (2003, p. 26) enfatiza a perspectiva de interação, ao fazer uso da planilha em atividades educacionais:

> É importante ressaltar que as construções por meio de planilhas eletrônicas possibilitam interatividade, ou seja, uma relação dinâmica entre as ações do aluno e as reações do ambiente, resultado de suas operações mentais. Os objetos matemáticos que podem ser representados na tela do computador (fórmulas, tabelas, gráficos, etc.) constituem-se na materialização de ações mentais dos alunos, utilizando os comandos disponíveis pelo aplicativo.

Verifica-se, então, que o uso desse recurso possibilita um trabalho alternativo à aula tradicional, viabilizando a exploração das potencialidades do *software*, privilegiando, desse modo, a interação entre aplicativo, aluno e professor.

4.3.4 O desenvolvimento do conceito de função a partir de suas representações

Pelho (2003) destaca que o desenvolvimento do conceito de função ocorre a partir da exploração e da coordenação de suas diferentes representações, permitindo ao aluno a transposição desses atributos.

Tinoco (2001, p. 7) enfatiza também a importância de utilizar as formas de representação desse conceito, ao afirmar que:

> A flexibilidade na passagem de uma representação a outra e o uso exaustivo da representação em linguagem corrente, oralmente e por escrito, são fundamentais para a construção do conceito.

É imprescindível que os discentes sejam capazes de aplicar os conhecimentos matemáticos, trabalhados em sala de aula, em novas situações, a fim de que compreendam melhor o mundo que os cerca e, principalmente, de que contribuam positivamente para a sociedade na qual estão inseridos.

Para que haja maior compreensão por parte do aluno sobre um determinado tópico, é necessário desenvolver as diversas representações sobre o assunto. No tópico de funções, é necessário explorar e coordenar as representações tabular, gráfica e analítica, estimulando a transposição de uma representação para outra, pois essa articulação contribui para a reconstrução da noção referida.

Verifica-se, atualmente, que muitos professores, de forma análoga a dos alunos, conceituam função, reduzindo sua definição a aspectos numéricos e quantitativos. Acrescenta-se a esse fato, a dificuldade em distinguir variáveis dependentes de independentes (ZUFFI, 2001). Tal dificuldade seria superada se fossem exploradas a leitura, a interpretação e a construção de gráficos, objetivando o desenvolvimento da noção de variáveis dependentes e independentes.

Diversas pesquisas, citadas anteriormente, constataram que o entendimento do conceito de função ocorre quando há transferência de uma representação para outra naturalmente, estabelecendo-se, desse modo, relações entre elas. Ademais, a História da Matemática confirma a necessidade de desenvolver o conceito de função por meio da articulação de suas representações, não as enfocando isoladamente. Essa coordenação das representações torna-se dinâmica ao serem empregados os recursos tecnológicos que ampliam a possibilidade dessa exploração conjunta dos gráficos, tabelas e expressões analíticas como sugere a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

É pertinente ressaltar, ainda, a necessidade de enfocar o conhecimento matemático como um processo e não como um produto. Nessa perspectiva, destaca-se a importância de desenvolver um determinado tópico a partir da exploração de situações concretas. Desse modo, pretende-se valorizar, nesse aspecto, o conhecimento prévio, o que demonstra a relevância social dos conceitos abordados e propicia o entendimento de significados.

Mendonça e Oliveira (1999) realçam que o conhecimento matemático se desenvolve em decorrência do estabelecimento de relações, do aprofundamento dos significados, tornando-se, nesse aspecto, um referencial para o processo de ensino-aprendizagem.

A utilização dos recursos tecnológicos possibilita, portanto, a construção de conceitos, o desenvolvimento de procedimentos e atitudes matemáticas, oportunizando ao aluno o enfrentamento de novas situações e o envolvimento com as aplicações da Matemática.

O conceito de função tem um caráter integrador, pois é um assunto aplicável tanto a outras áreas do conhecimento como à da própria Matemática. Disso decorre a necessidade de explorar o conceito de função, em situações concretas, demonstrando sua relevância social e valorizando o entendimento dos significados em detrimento do uso excessivo de cálculos imensos sem sua devida compreensão.

Além disso, esse conceito é um dos mais significativos na Matemática, pois serve de instrumento em diferentes domínios do conhecimento, além de ser aplicável a diversas situações do cotidiano. Há, entretanto, certa dificuldade na compreensão dessa noção devido ao não estabelecimento de relações dentre as formas de representar uma função.

A partir dessa concepção, é relevante que os educadores respeitem o ritmo de cada aluno, proporcionando diversas abordagens sobre um mesmo tópico, viabilizando, de tal modo, a maior compreensão do conceito. Um determinado conteúdo, portanto, não deve ser esgotado, encerrado num único momento. Para haver aprendizagem, julga-se que os aspectos devam ser abordados em mais de um nível, aprofundando o estudo em novos contextos, a fim de que sejam desenvolvidas diversas representações equivalentes de um mesmo conceito. Dessa forma, então, o professor propiciará a compreensão desse conhecimento.

Portanto, ao desenvolver a noção de função, faz-se necessária uma abordagem que contemple a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos, bem como a escrita de expressões analíticas, de forma a distinguir equações de funções e reconhecer variáveis dependentes e independentes. Ademais, pode-se propiciar a verificação dos zeros da função, estabelecendo uma conexão com as equações, visto que, entre os alunos, há dificuldades em distinguir funções de equações.

Para tanto, destaca-se a utilização de *softwares* gráficos, em especial a planilha, no desenvolvimento da noção de função e através da exploração simultânea das representações algébrica, tabular e gráfica, pretende-se viabilizar a coordenação entre essas formas. A apreensão do conhecimento, nesse contexto, ocorre quando o sujeito faz a transferência de um registro de representação para outro. As atividades propostas objetivaram a exploração das noções de variável, de dependência, de regularidade e de generalização simultaneamente.

Finalmente, é importante ressaltar que um planejamento adequado para o emprego de um ambiente informatizado proporciona, também, a compreensão da noção de função por meio da geração de gráficos vinculados a tabelas e a expressões analíticas.

5 METODOLOGIA

De acordo com Moraes (2007a), um investigador deve ter clareza dos pressupostos filosóficos assumidos durante a investigação. Por uma questão ética, é necessário, também, que os sujeitos participantes da pesquisa tenham conhecimento sobre esses pressupostos. Fiorentini e Lorenzato (2006) destacam a importância de o pesquisador ser ético em todas as etapas investigativas, não se restringindo ao seu relacionamento com os co-pesquisadores.

Com base nessas concepções e no intuito de definir o paradigma a ser utilizado nessa pesquisa, analisei os seguintes critérios sugeridos por Moraes, (2007a, p. 4):

> Os diferentes modos de conceber a realidade, a forma de entender as possibilidades de generalização, os modos de compreender a inserção dos valores do pesquisador na sua pesquisa e a forma de aceitar a relação entre pesquisador e objeto da pesquisa podem ser utilizados para definir o que denominamos como paradigmas.

Feita essa apreciação, assumo desenvolver minha pesquisa de acordo com o paradigma pós-positivista, uma vez que, nessa concepção, a realidade é construída a partir da relação pesquisador/co-pesquisadores, superando a idéia de neutralidade, proposta pelo positivismo. Percebe-se que, em tal modelo, o pesquisador participa do processo de forma gradual, pois está inserido no contexto em que se realiza a investigação.

Em consonância com o paradigma escolhido, o pesquisador necessita posicionar-se em relação à abordagem, definindo o encaminhamento, o planejamento e a posterior concretização da pesquisa.

A presente pesquisa utilizou-se da abordagem naturalística – construtiva. Tal opção objetivou a compreensão dos problemas investigados, examinando-os no contexto em que se inserem.

A escolha desse tipo de abordagem foi feita mediante a análise de suas principais características, verificando-se que essas contemplavam os pressupostos da investigação.

Nessa concepção, os sujeitos envolvidos - pesquisador e demais participantes - são considerados construtores da realidade, sendo valorizados seus conhecimentos prévios e suas percepções. Há, portanto, a superação da neutralidade: aspecto que permite ao pesquisador ser o principal responsável pela coleta de dados. Tais informações são, então, reunidas a partir do envolvimento intenso com os fenômenos e são organizadas em categorias emergentes, objetivando a descrição, a interpretação e a teorização de forma a compreendê-las gradualmente.

Em função dos aspectos destacados, a linguagem assume um papel fundamental, não se limitando à expressão dos resultados, mas possibilitando a compreensão dos fenômenos investigados pela análise das informações lingüísticas.

Cabe ressaltar que, durante a implementação desse processo de investigação, foram consideradas as características emergentes que surgiram da interlocução entre teóricos e co-pesquisadores.

5.1 Sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida com alunos da 8ª série do ensino fundamental de uma escola particular de Porto Alegre. O referido estabelecimento apresenta cinco turmas desse nível, com cerca de trinta discentes em cada grupo. Há quatro Laboratórios de Informática com dezoito computadores em cada um desses em ambientes e todos têm acesso à Internet. Os educandos utilizam os recursos computacionais de forma sistemática sob a orientação dos professores com atividades específicas de cada disciplina.

5.2 Metodologia de Análise dos Dados

Os pressupostos teóricos dessa pesquisa foram definidos a partir de teorias ideográficas, visto que, nessa concepção, a realidade é construída através da interação pesquisador - objeto de pesquisa e pesquisador - co-pesquisadores.

A investigação valeu-se da descrição dos dados coletados, analisados através do estabelecimento dos avanços teóricos ocorridos, procurando, desse modo, buscar uma compreensão mais aprofundada desses elementos, identificando unidades de significado para, então, organizá-las em categorias emergentes.

Para Gomes (1998) a categorização está associada à idéia de classificar ou de seriar, por meio do agrupamento de elementos, de idéias ou de expressões que explicitem características comuns referentes a um determinado conceito. Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 135) afirmam que essas classes "[...] são obtidas, mediante um processo interpretativo, diretamente do material de campo".

Nessa perspectiva, Moraes (2007b) destaca que, ao optar por teorias emergentes, o pesquisador assume uma atitude de deixar os fenômenos se manifestarem para, então, compreendê-los, ao longo da investigação.

5.3 Instrumentos de pesquisa e atividades realizadas

Os instrumentos de coleta de dados consistiram em um questionário - que foi respondido pelos cento e sessenta alunos matriculados em cinco turmas, denominadas A, B, C, D e E, da 8ª série em 2008, da referida escola, nas produções escritas de trinta desses discentes (referentes às atividades realizadas), bem como em suas respectivas construções realizadas na planilha e disponibilizadas na Rede. É pertinente sublinhar que a seleção do grupo mencionado anteriormente foi feita a partir da análise dos questionários respondidos.

Embora a presente pesquisa seja de cunho qualitativo, a opção pela aplicação do primeiro questionário foi motivada pela necessidade de caracterizar inicialmente o grupo, no que se refere ao uso da tecnologia de informação e comunicação, para, então, selecionar um grupo menor de alunos, considerando as seguintes variáveis intervenientes: familiaridade com os recursos computacionais, em especial com a planilha; ano de ingresso na escola; repetência e escolaridade dos pais.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 117):

> [...] os questionários podem servir como uma fonte complementar de informações, sobretudo na fase inicial e exploratória da pesquisa. Além

> disso, eles podem ajudar a caracterizar e a descrever os sujeitos do estudo, destacando algumas variáveis [...].

Conforme Minayo (1998, p. 22): “O conjunto de dados quantitativos e qualitativos, porém, não se opõem. Ao contrário, se complementam, pois a realidade abrangida por eles interage dinamicamente, excluindo qualquer dicotomia”.

Ressalta-se que esse instrumento foi aplicado em março de 2008, com a presença da pesquisadora, uma vez que também é a professora dessas classes.

Anteriormente a aplicação do questionário inicial, foi feita uma testagem com um grupo piloto, composto de trinta e cinco alunos, no ano de 2007, a fim de analisar aspectos referentes à clareza, à pertinência, à precisão, à ordenação e à abrangência das questões, sugeridos por FIORENTINI e LORENZATO (2006).

Durante o desenvolvimento da pesquisa, foram realizadas oito atividades, sendo quatro destinadas ao estudo de função do 1º grau e outras três a aprendizagem de função do 2º grau. Foi realizada, ainda, uma última atividade que contemplou o estudo das funções afim e quadrática, por meio da utilização de aplicativo, que permitiu a análise das representações das funções de forma simultânea. Os roteiros elaborados orientaram os discentes para a realização das referidas tarefas.

Os encontros foram distribuídos em intervalos semanais. Durante os meses de abril e maio, efetivou-se o trabalho com função de 1º grau e, em junho, julho, agosto, setembro e outubro, as atividades foram dedicadas à função de 2º grau. Já o trabalho com função quadrática foi mais espaçado devido ao recesso no mês de julho e às atividades previstas no calendário escolar, como a semana de avaliações e os jogos escolares.

Devido à limitação do espaço físico para a execução das tarefas, as turmas foram distribuídas em dois laboratórios de informática, sendo que a metade da classe ficou sob a orientação da pesquisadora e a outra parte sob a assistência de um estagiário, estudante de Matemática.

Salienta-se que todos os estudantes que compareceram às aulas, nos dias destinados às atividades, realizaram-nas, sendo observadas e analisadas as produções dos alunos escolhidos. Ressalta-se, ainda, que esses estudantes estiveram sob orientação da pesquisadora em todas as atividades.

Portanto, ao passo que, a análise do primeiro questionário foi feita de forma quantitativa com os cento e sessenta alunos respondentes, a apreciação dos protocolos de registros escritos e das produções gráficas, algébricas e tabulares, realizadas no ambiente informatizado, efetivou-se, de forma qualitativa, com os trinta alunos escolhidos.

Além disso, foi aplicado um questionário final, o qual visou à apreciação qualitativa, por parte dos discentes envolvidos na pesquisa, do trabalho realizado no laboratório de informática.

6 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO INICIAL

6.1 Caracterização do grupo de alunos, mediante análise do questionário

O primeiro questionário aplicado foi composto por perguntas fechadas, diante das quais os respondentes deveriam optar por alguma das alternativas disponibilizadas e por questões abertas, que objetivaram a captação de informações diferenciadas entre os participantes. O instrumento supracitado pôde ser dividido em cinco categorias. O primeiro bloco de perguntas teve como objetivo conhecer o perfil das turmas quanto às atividades mais freqüentes realizadas no computador e a média de horas diárias dedicadas à realização dessas tarefas. Já a segunda categoria propôs-se a analisar a freqüência com que são utilizados o processador de texto, a planilha, o recurso de apresentação, o correio eletrônico e o navegador, bem como a identificar outras tecnologias empregadas. Para as questões fechadas, os respondentes tinham uma escala variando entre “Nunca”, “Algumas vezes”, “Muitas vezes”, “Sempre” e “Não conheço”, a fim de que optassem pela resposta indicativa da freqüência de uso dos recursos computacionais. O terceiro bloco de perguntas destinou-se a apreciar a constância com que são usados os *Softwares* específicos para a Matemática, em especial, o *Cabri Géomètre* e o *Winplot*. Foi, para esse fim, utilizada a mesma escala do bloco anterior. A quarta categoria destinou-se a uma análise mais aprofundada sobre os conhecimentos dos respondentes no que tange às finalidades da planilha. Para responder essas perguntas, os alunos optavam por uma das seguintes escalas: “Discordo”, “Concordo Parcialmente” ou “Concordo”. E a última categoria objetivou a identificação de algumas características biométricas dessas turmas: sexo, idade, ano de ingresso na escola e escolaridade dos pais.

Os dados apontam que 53,1% dos alunos (85) eram meninas e 46,9% eram meninos (75).

A Tabela 1 e a Figura 2 – Idade dos alunos referem-se às idades dos alunos respondentes do questionário, sendo que 95% dos discentes têm entre 13 e 14 anos.

Tabela 1 – Idade dos alunos

Idade	Alunos	Percentual (%)
12 anos	6	3,75
13 anos	123	76,9
14 anos	29	18,1
15 anos	2	1,3
Total	160	100,0

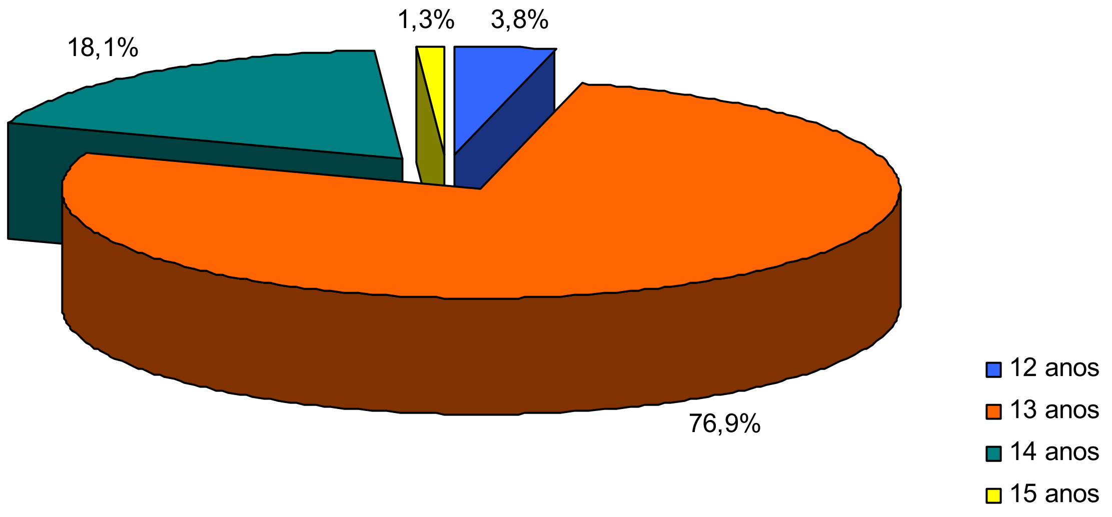


Figura 2 – Idade dos alunos

Na Tabela 2, é possível observar que o grupo é heterogêneo em relação ao ano de ingresso na escola, sendo que 13,1% dos estudantes começaram a freqüentar o colégio na 1ª fase da educação infantil (berçário), 28,8% iniciaram na 2ª etapa da educação infantil (jardim de infância); enquanto que 23,8% começaram no ensino fundamental I (1ª à 4ª série) e os demais começaram a freqüentar a escola no ensino fundamental II (5ª à 8ª série).

Tabela 2 – Ano de ingresso na escola

Ano de ingresso	Alunos	Percentual (%)
1994	5	3,1
1995	9	5,6
1996	6	3,8
1997	3	1,9
1998	13	8,1
1999	15	9,4
2000	16	10,0
2001	19	11,9
2002	4	2,5
2003	8	5,0
2004	7	4,4
2005	4	2,5
2006	13	8,1
2007	21	13,1
2008	17	10,6
Total	160	100,0

A Figura 3 mostra que 53,8% dos pais possuem Graduação e 35% têm Pós-Graduação em nível de Mestrado e/ou de Doutorado. Já a Figura 4 aponta que 60% das mães têm Graduação, e 26,3% possuem Mestrado e/ou Doutorado.

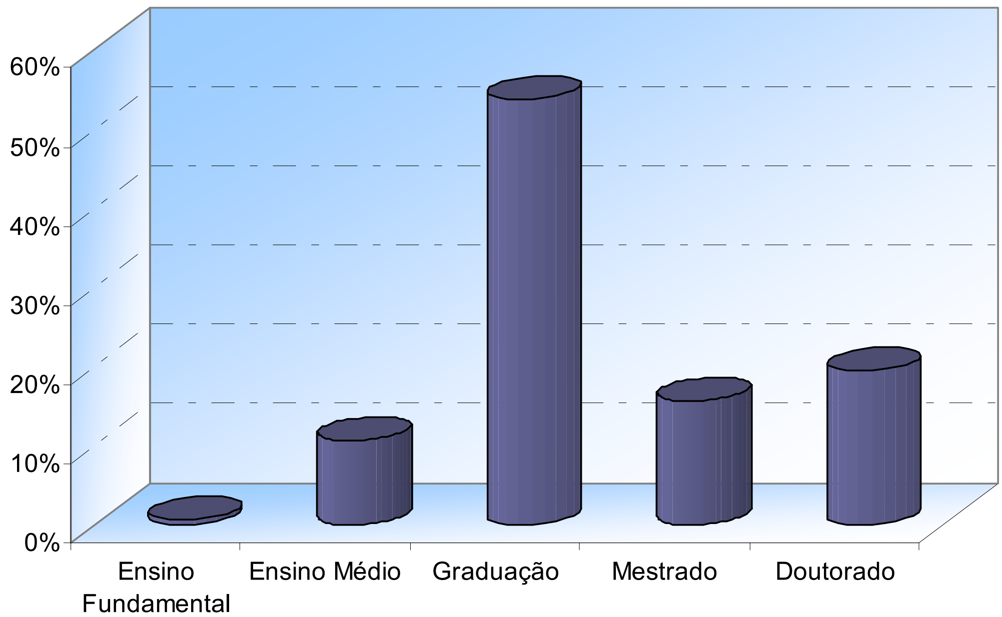


Figura 3 – Escolaridade dos pais

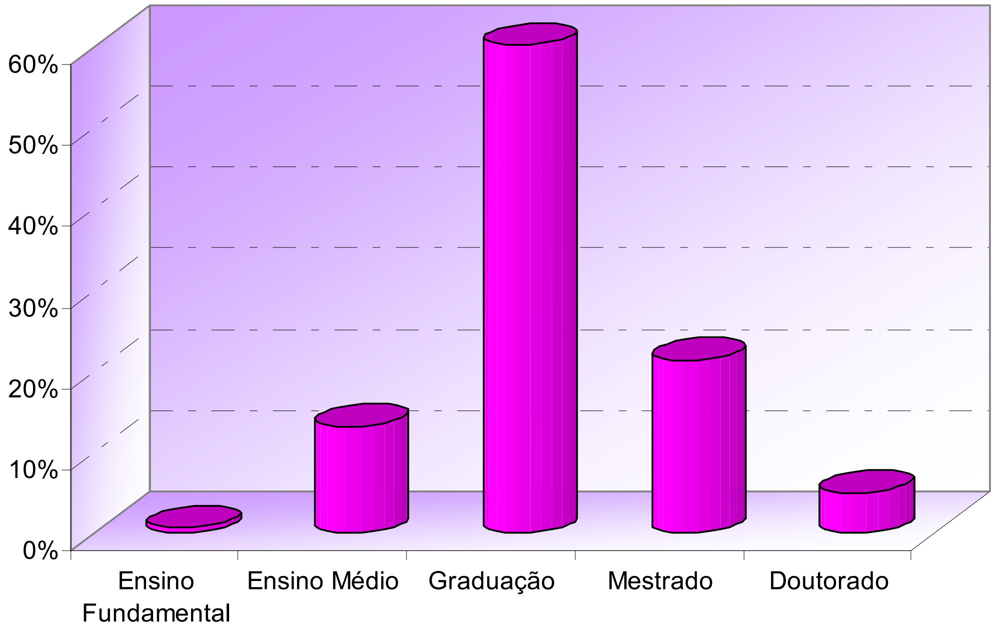


Figura 4 – Escolaridade das mães

O referido grupo de alunos utiliza, em média, 3,06 horas, o computador para a realização de suas atividades diárias. Dentre as tarefas citadas, o MSN *Messenger* é o aplicativo que obtém maior índice de utilização, com 95%, seguida pelo *Orkut* e pelos *sites* de busca para a realização de pesquisas escolares, com 91,9%. Além disso, 55,6% dos respondentes enviam *email*, e 60% fazem uso de jogos computadorizados.

A Figura 5 mostra a distribuição dessas e de outras atividades.

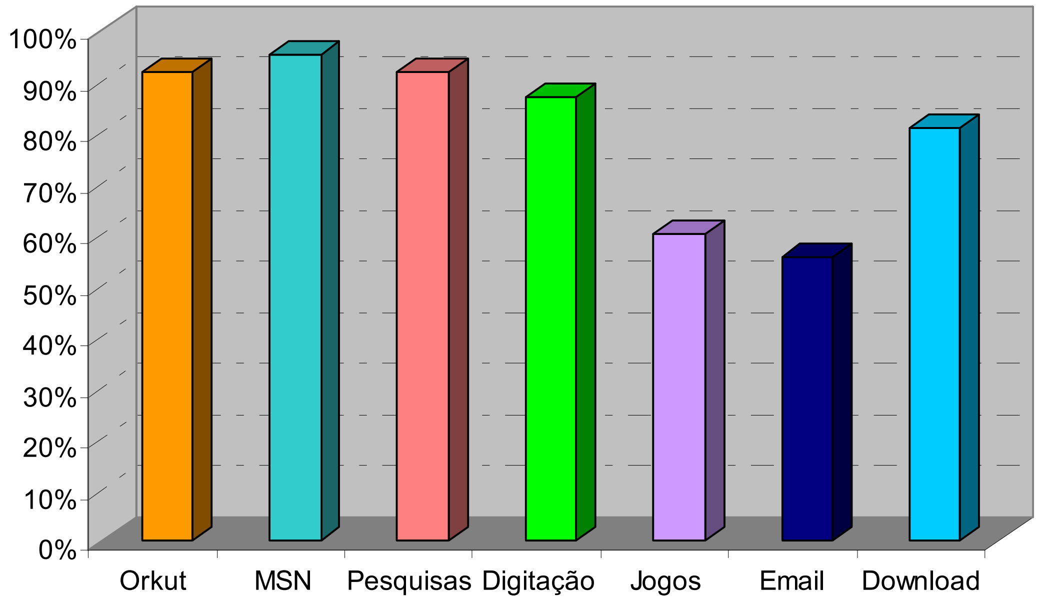


Figura 5 — Atividades realizadas no computador

Os respondentes tinham a possibilidade de acrescentar outros itens à lista de atividades computacionais, sendo, por essa razão, adicionados nove tarefas, distribuídos conforme a Tabela 3, exposta abaixo.

Tabela 3 – Outras atividades realizadas no computador

Outras atividades realizadas no computador	Freqüência	Percentual (%)
Curso de inglês	1	2,3
Download de jogos	1	2,3
Download de vídeos	7	15,9
Editor de imagem	24	54,5
Editor de vídeo	3	6,8
Gravador de CD/DVD's	1	2,3
Programas de animação	1	2,3
Salas de bate-papo / Chats	1	2,3
Skype	5	11,4
Total	44	100,0

Em relação à utilização de processador de texto, os discentes afirmaram que fazem uso desse recurso “Algumas vezes”, com 43,8%, “Muitas Vezes”; com 44,4% e “Sempre”, com 11,9%.

Já, em relação ao uso da planilha eletrônica, a maioria dos alunos demonstrou pouca familiaridade com esse *software*. A Figura 6 aponta que apenas 36,9% dos participantes a utilizaram “Algumas vezes”, e 1,3% “Muitas vezes”, enquanto 61,9% afirmaram que “Nunca” utilizaram ou que “Não conhecem” esse recurso.

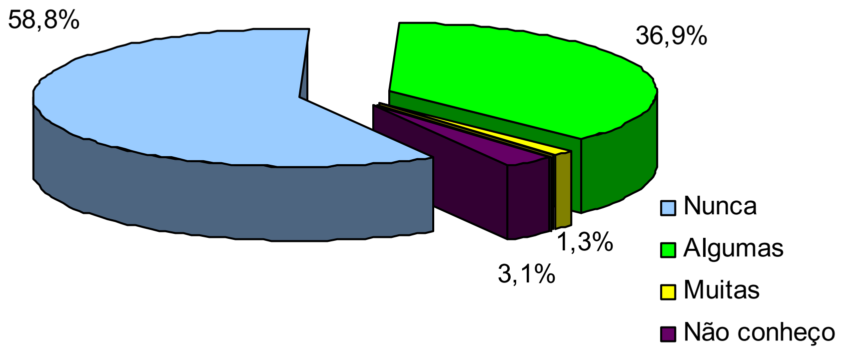


Figura 6 – Utilização da Planilha Eletrônica

O recurso de apresentação tem maior freqüência de utilização, conforme indica a Figura 7. 55,0% dos respondentes afirmaram que utilizaram esse meio “Algumas vezes”, 36,9%, “Muitas vezes” e 5%, “Sempre”.

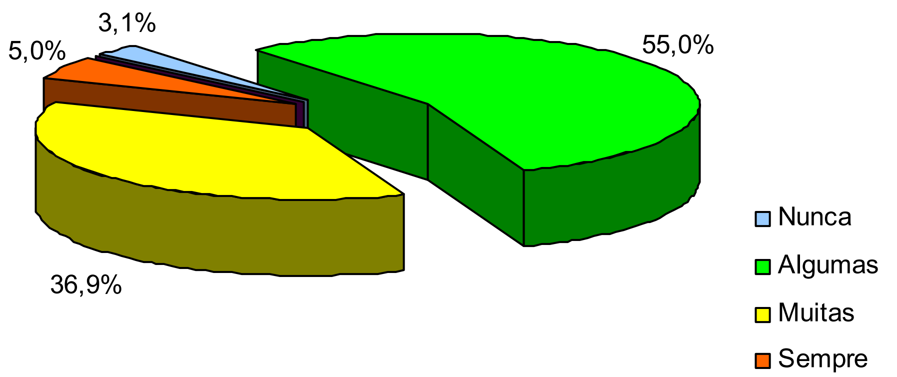


Figura 7 – Utilização de Recurso de Apresentação

Segundo aponta a Figura 8, 77,4% dos participantes utilizam o correio eletrônico com diferentes níveis de freqüência, sendo que apenas 1,3% dos respondentes não o conhece, e 21,3% nunca fizeram uso desse recurso.

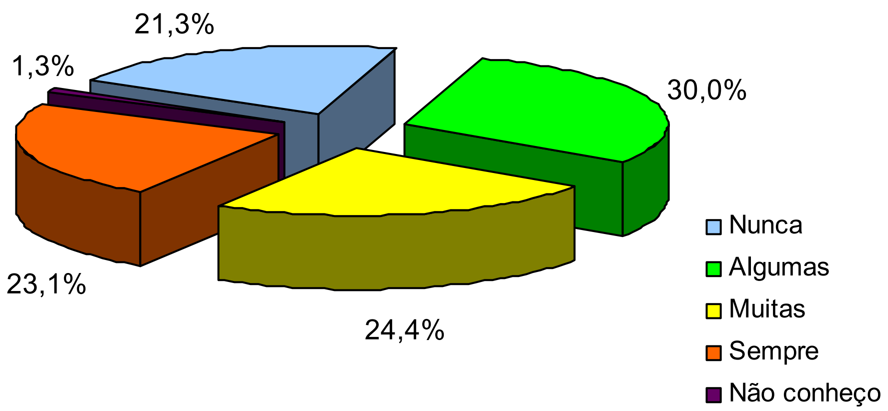


Figura 8 – Utilização do Correio Eletrônico

A Figura 9 mostra que 86,9% dos referidos alunos utilizam navegador para realizar suas atividades no computador diariamente, em oposição a 1,9% que não conhece esse recurso e 3,1% que não o utilizam.

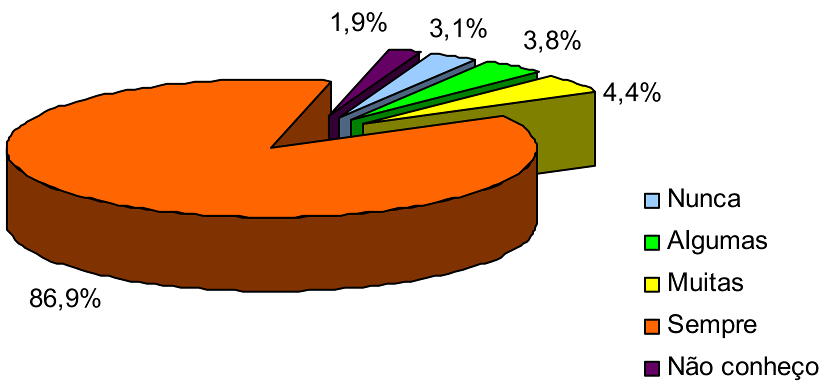


Figura 9 – Utilização de Navegador

Em uma questão aberta, foi solicitado aos respondentes que citassem outros recursos tecnológicos utilizados por eles. A Tabela 4 mostra a distribuição da freqüência com que foram citados esses meios.

Tabela 4 – Outros recursos tecnológicos utilizados

Outros Recursos Tecnológicos	Freqüência	Percentual (%)
Câmera Fotográfica Digital	4	2,5
Celular	41	25,5
DVD	1	0,6
MP3 Player	46	28,6
Pendrive	1	0,6
TV	45	28,0
Vídeo Game	23	14,3
Total	161	100,0

Questionou-se a freqüência com que os discentes faziam uso de *softwares* específicos para a aprendizagem da Matemática, sendo destacados o *Cabri Géomètre* e o *Winplot*. Todos os dois recursos apresentaram índices de desconhecimento elevados. A Figura 10 atesta que 73,2% dos participantes não conhecem ou nunca utilizaram o *software* de Geometria Dinâmica supracitado, enquanto a Figura 11 mostra que 99,4% também desconhecem ou nunca tiveram a oportunidade de trabalhar com o *Winplot.*

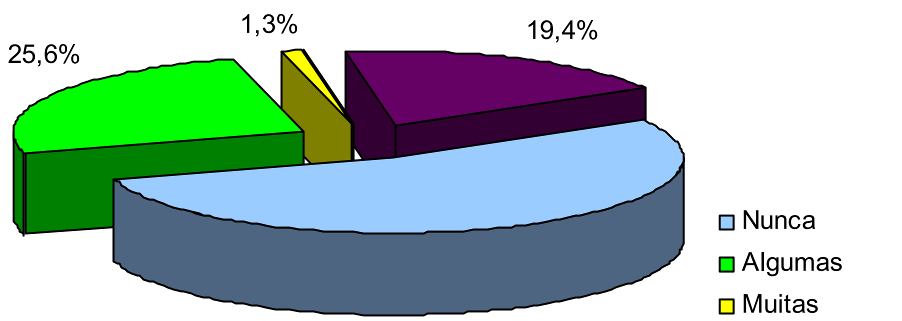


Figura 10 – Utilização do *Cabri Géometrè*

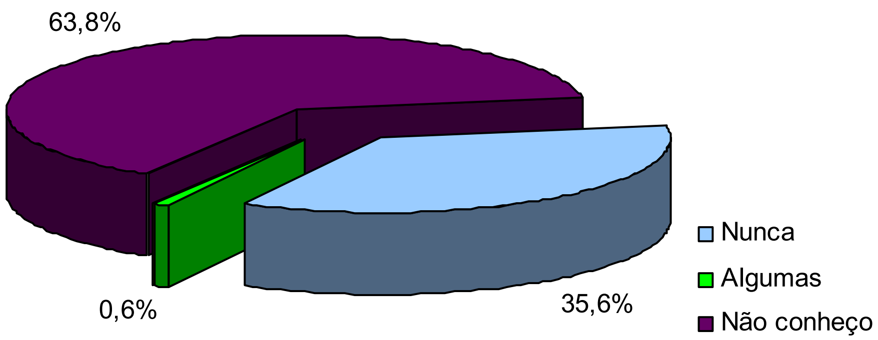


Figura 11 – Utilização do *Winplot*

Ainda nesse bloco de questões, foi solicitado aos estudantes que citassem outros *softwares* conhecidos para trabalhar com Matemática, e apenas um aluno destacou a planilha eletrônica. Os demais não responderam a essa questão.

No quarto bloco de questões, os discentes apresentam o seu entendimento a respeito da planilha eletrônica, visto que tal recurso seria utilizado na etapa seguinte da presente pesquisa. Para tanto, foram apresentadas oito possíveis utilidades dessa ferramenta computacional a fim de que os respondentes assinalassem uma escala de três níveis, indicando seu nível de concordância com cada afirmação.

A Figura 12 mostra que 21,3% e 74,4% dos participantes concordam parcial e totalmente, de modo respectivo, que a planilha permite a construção de tabelas.

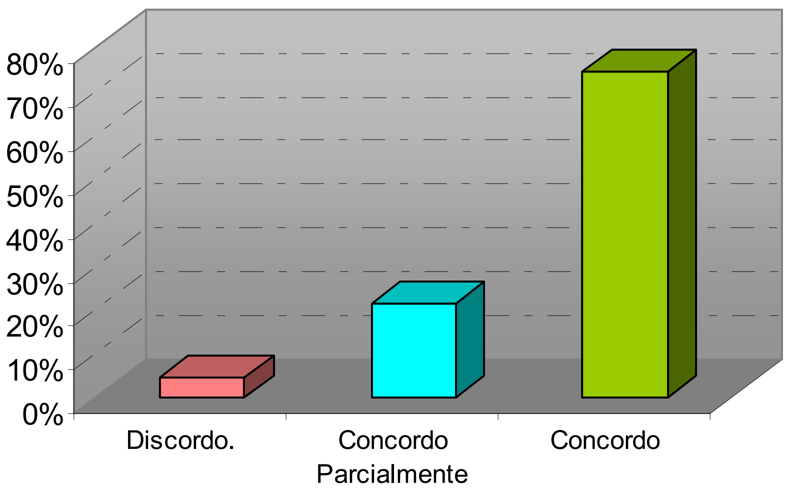


Figura 12 – Construir tabelas

A organização de dados pela planilha foi um item que recebeu índices elevados de concordância: 28,8% dos respondentes concordam parcialmente, e 63,1%

concordam; ao passo que grande parte dos alunos concorda parcialmente – 40% e/ou concordam – 40,6% que é possível elaborar diagramas na planilha.

Entretanto 41,3% dos discentes desconhecem que a planilha eletrônica possibilite a execução de cálculos e 71,9% discordam da possibilidade de realizar desenhos no referido *software,* enquanto 14,4% concordam parcialmente e 13,8% concordam com tal proposição.

O desconhecimento, por parte dos estudantes, da possibilidade de processar texto na planilha corresponde a 61,3% do total deles. Quanto à possibilidade de controlar o orçamento por meio da planilha eletrônica, 29,4% dos discentes concordam parcialmente e 56,3% concordam com tal hipótese.

De acordo com a Figura 13, 68% dos respondentes afirmaram que concordam com a viabilidade de construir gráficos de funções mediante a utilização da planilha, e 25% concordam parcialmente com essa afirmação.

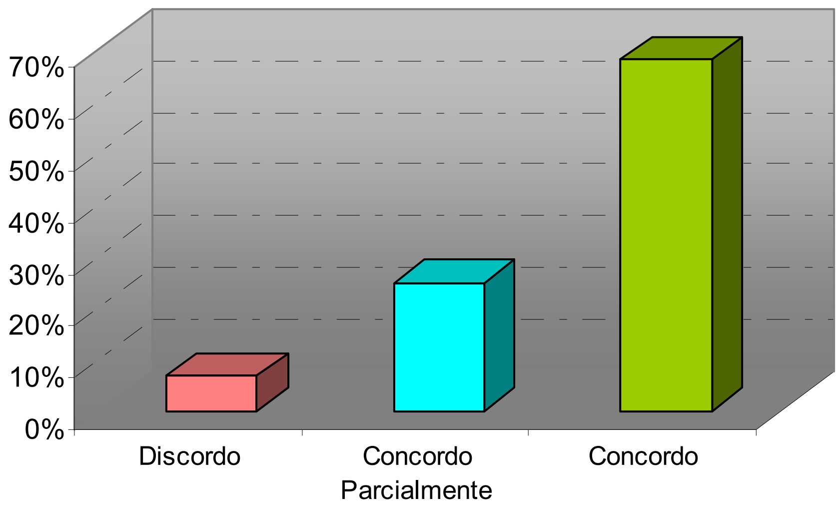


Figura 13 – Construir gráficos de função

6.2 Caracterização da amostra escolhida, a partir da análise do questionário

Ao efetuar a apreciação do questionário aplicado, constatou-se que os estudantes apresentavam características semelhantes, tanto no que se referia ao uso do computador em suas atividades diárias, ao domínio de aplicativos, como também no que tangia ao conhecimento de *softwares* específicos para a aprendizagem da Matemática. Em função dessa homogeneidade das turmas, foram selecionados trinta discentes, de acordo com seus conhecimentos sobre a planilha.

Esse grupo foi constituído de quinze meninos e quinze meninas: doze desses discentes nunca haviam trabalhado com a planilha, onze, algumas vezes, dois, com freqüência e cinco não tinham conhecimento a respeito tal recurso. É pertinente destacar, ainda, que os últimos sete estudantes foram escolhidos porque eram os únicos representantes em suas categorias.

Ressalta-se, além disso, que fazem parte da amostra cinco discentes oriundos da turma A, seis da B, seis da C, quatro da D e nove são alunos da turma E.

O ano de ingresso desse conjunto de alunos na instituição é variado, havendo participantes que freqüentam a escola desde o maternal até os que ingressaram no presente ano letivo.

Portanto, a análise de todas as atividades realizadas foi feita a partir dos protocolos escritos desses trinta alunos, bem como das suas produções disponibilizadas na Rede. Nesse grupo, há discentes que apresentam características diferenciadas quanto ao conhecimento da planilha eletrônica e à utilização desse recurso, objetivando-se, com isso, a investigação da apreensão do conhecimento de função numa classe heterogênea em relação a tais aspectos.

É pertinente sublinhar que as apreciações expostas nos capítulos 7,8 e 9 serão baseadas nas observações realizadas em cada atividade, referentes tanto ao grupo de alunos que ficou sob minha orientação, quanto às produções da amostra definida anteriormente.

7 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES REFERENTES À FUNÇÃO DO 1º GRAU

São apresentadas a seguir as quatro atividades realizadas, bem como a análise dos dados coletados sobre essas e as observações registradas pela pesquisadora-professora. As referidas atividades têm, como objetivo geral, proporcionar a leitura, a interpretação e a construção de expressões algébricas, tabelas e gráficos de função de 1º grau.

7.1 Conceito de função de 1º grau – Parte I

As questões analisadas constituem a primeira parte da atividade relacionada ao conceito de função afim. Essa tarefa foi realizada em um período e meio, cerca de 1 hora e 15 minutos, nos dias 7 e 14 de abril de 2008. Sete alunos realizaram a tarefa proposta em um período; os demais necessitaram de um tempo maior para sua conclusão. Atribuo o ocorrido ao fato de que a maior parte do grupo necessitou familiarizar-se com o *software*. Além disso, este é o primeiro ano em que cada discente deve efetuar o seu *login* na rede local de computadores do Laboratório de Informática e, para tal, necessita digitar o respectivo *username* e *password*, os quais foram definidos e distribuídos previamente pela área de Tecnologia da Informação da escola. No entanto, vários estudantes não lembravam ou não haviam trazido consigo essas informações, visto que não estavam acostumados com tal procedimento. Dessa forma, esses alunos apresentaram dificuldades, num primeiro momento, para acessarem as estações de trabalho conectadas em rede.

A atividade supracitada objetivou a compreensão do conceito de função de 1º grau a partir da análise de situações reais, por meio do estabelecimento de fórmulas matemáticas, tabelas e gráficos que expressassem a relação de dependência entre as variáveis consideradas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 81) reforçam essa idéia, ao destacar que, no quarto ciclo (7ª e 8ª séries):

> o ensino da Matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento numérico, por meio de situações que levem o aluno a [...] observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Além disso, BRASIL (1998) sugere que a noção de função seja desenvolvida mediante situações-problema que envolvam variações de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais, explorando suas representações.

Proporcionou-se, também, a familiarização dos discentes com as ferramentas disponibilizadas na planilha. O roteiro fornecido, nessa primeira parte, foi composto de instruções detalhadas dos procedimentos necessários para a construção de tabelas, gráficos e expressões algébricas no *software* e, concomitantemente, de questões que solicitavam a elaboração, por parte dos alunos, de algumas conclusões sobre o comportamento dessas funções.

Ressalta-se, ainda, que, nessa tarefa, foram apresentadas situações cotidianas que representavam funções de 1º grau e que proporcionaram a conversão do registro em linguagem natural para o algébrico, deste para o tabular e, finalmente, para o gráfico. Enfatizou-se, portanto, a coordenação entre as múltiplas representações de uma função, conforme sugere a Teoria de Duval.

Borba e Penteado (2005) afirmam que o trabalho com as diferentes representações de uma função amplia-se à medida que se utilizam ambientes computacionais, uma vez que esses “geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas.” (BORBA e PENTEADO, 2005, p. 32).

O referido trabalho viabiliza a ampliação da compreensão do conceito de função por meio de uma “epistemologia das representações múltiplas.” (BORBA e PENTEADO, 2005, p. 32).

A seguir, são apresentadas as questões que compõem o roteiro, bem como a análise das respostas dadas pelos estudantes da amostra citada anteriormente.

A primeira parte do trabalho foi introduzida pelo seguinte texto:

Em diversos contextos do dia-a-dia, nos deparamos com situações que envolvem vários tipos de grandezas que estão relacionadas entre si. Dentre elas, podemos citar: a relação entre a quantidade de combustível consumida por um automóvel e a quantidade de

quilômetros rodados; entre o imposto de renda pago por uma pessoa e seus rendimentos; entre a produção de lixo de uma cidade e sua densidade demográfica.

Todas essas situações nos transmitem a idéia de que, se uma grandeza variar, a outra mudará de valor, ou seja, a variação de uma das grandezas interfere na variação da outra.

A análise dessas interferências é o objetivo do estudo de funções. Dizemos que uma grandeza é função de outra quando há correspondência entre elas e quando, para cada medida de uma, corresponde uma única medida da outra.

As referidas variações e suas características podem ser descritas matematicamente por meio de tabelas, de expressões algébricas e de gráficos. A fim de tornar a idéia de função mais precisa, analisaremos as seguintes situações:

<u>Situação 1</u>

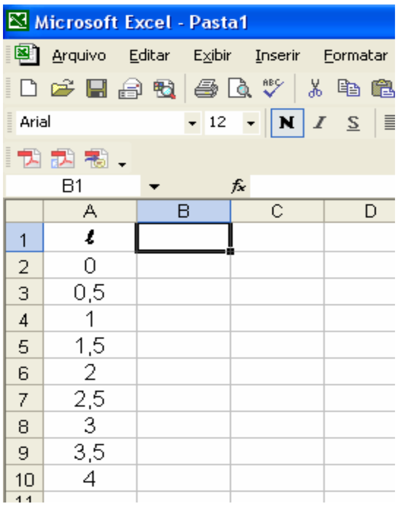
Em fevereiro de 2008, o preço de 1 litro de álcool custava R$ 1,69 num determinado posto de combustível de Porto Alegre.

a) Sendo ℓ a quantidade de litros de álcool comprada e $P(\ell)$ o preço total pago, completa a tabela abaixo:

ℓ (litros)	$P(\ell)$ (reais)
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	

Os discentes não apresentaram dificuldades na compreensão do problema e logo começaram a completar a tabela. A maioria dos alunos utilizou a calculadora disponível no *Windows*, uma pequena parcela fez os cálculos na planilha, digitando cada conta separadamente, e apenas dois calcularam no papel.

b) Para facilitar os cálculos, segue o roteiro abaixo e constrói no programa Excel uma tabela semelhante a esta:



b_1) Reproduz a tabela acima no Excel *e acrescenta outros valores para ℓ.*

Os alunos construíram a tabela, digitando cada um dos valores propostos. Vinte deles limitaram-se a reproduzir a tabela fornecida na atividade e dez acrescentaram outros valores conforme foi solicitado no enunciado.

b_2) Cada quantidade de álcool colocada no tanque está associado a um único preço, e, portanto, o valor pago é função da quantidade de álcool colocada. A variável ***$P(\ell)$*** *depende de ℓ. Escreve a lei de formação.*

As respostas dadas pelos discentes foram organizadas em categorias conforme mostra a Tabela 5.

Tabela 5 – Distribuição das repostas do item b_2 da situação 1

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A - Escreveram a fórmula corretamente	14	46,7
B - Escreveram a fórmula corretamente, conforme sintaxe do *Excel*	1	3,3
C - Descreveram corretamente a obtenção da fórmula	2	6,7
D - Expressaram a fórmula, porém não utilizaram o sinal de igualdade	2	6,7
E - Apresentaram fórmula incorreta, invertendo as variáveis	1	3,3
F - Apresentaram fórmula incorreta	2	6,7
G - Não responderam	8	26,7
Total	30	100,0

Na resposta correspondente à Categoria B um único estudante utilizou-se da sintaxe da planilha para determinar a lei de formação, isto é, em sua fórmula constava o sinal de igual, seguido do número 1,69, o “asterisco” que corresponde à multiplicação e a célula correspondente ao primeiro valor dos litros colocados. Esse fato expressa que houve entendimento quanto à determinação da expressão correspondente à situação proposta, entretanto não houve observância da escrita correta da linguagem algébrica.

Na Categoria C, agruparam-se as respostas dadas por meio da utilização da linguagem natural, sem que se fizesse uso da algébrica. Ressalta-se que, nessa categoria, os discentes demonstraram o entendimento da situação, explicando como deve ser calculado o valor a ser pago.

Fazem parte da Categoria D, as respostas do tipo “1,69.l”. Considero que não houve preocupação, por parte desses discentes, em fazer uso correto da linguagem algébrica, embora as respostas apontem para o entendimento do problema proposto.

Já, na Categoria E, a resposta dada mostra que não houve a diferenciação entre variável dependente e independente.

b_3) Na 2ª coluna da 1ª linha (célula B1) da tabela que construíste no Excel*, escreve a lei da função **P(ℓ)**.*

Esse item não foi observado pela maioria do grupo, visto que apenas cinco dos discentes escreveram a lei de formação na planilha.

b_4) O Excel *calcula automaticamente os valores de **P(ℓ)** para cada valor de ℓ. Para isso, seleciona a célula B2 (2ª coluna x 2ª linha), digita o sinal de igualdade (=) e, logo a seguir, a respectiva lei de formação. Na sintaxe do Excel, o sinal de multiplicação corresponde ao “asterisco” (*) e, para incluir a variável ℓ na fórmula, deve-se selecionar a célula ao lado (A2), a qual contém o valor dos litros. No* Excel*, não é necessário digitar a lei de formação em cada linha que compõe a tabela; basta selecionar a célula que contém a fórmula recém digitada e, posicionando o cursor no canto inferior direito da célula, arrastá-lo até o fim da tabela (de cima para baixo, sempre sobre a coluna B).*

Pude perceber que o grupo estava interessado em aprender a utilizar a planilha. Fato que pôde ser comprovado em suas produções disponibilizadas na Rede: vinte e oito alunos construíram suas tabelas a partir das orientações dadas no item b_4, contra dois que apenas copiaram os dados da tabela feita no item a.

c) *As variáveis ℓ e **P(ℓ)** são diretamente proporcionais? São inversamente proporcionais? Ou não há relação de proporcionalidade entre elas? Justifica a tua resposta.*

Antes que fosse respondida essa questão, foi proporcionada breve discussão com o grupo sobre o que são grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais e sobre quando não há relação de proporcionalidade entre as variáveis consideradas. Após essa discussão, estudantes foram orientados a responder o item c acima.

Em relação à existência de proporcionalidade direta ou indireta, ou no que se refere a não haver proporcionalidade entre as variáveis, as respostas encontradas podem ser agrupadas de acordo com as seguintes categorias do Tabela 6.

Tabela 6 – Distribuição das respostas do item c da situação 1

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Identificaram relação de proporcionalidade direta entre as variáveis e justificaram corretamente por meio de exemplos	12	40,0
B – Identificaram relação de proporcionalidade direta entre as variáveis e justificaram por meio de argumentos incorretos	10	33,3
C - Não diferenciaram proporcionalidade direta e indireta e justificaram por meio de exemplos de proporcionalidade direta	4	13,3
D – Não diferenciaram proporcionalidade direta e indireta e justificaram por meio de argumentos incorretos	1	3,3
E – Não identificaram relação de proporcionalidade entre as variáveis	1	3,3
F - Não responderam	2	6,7
Total	30	100,0

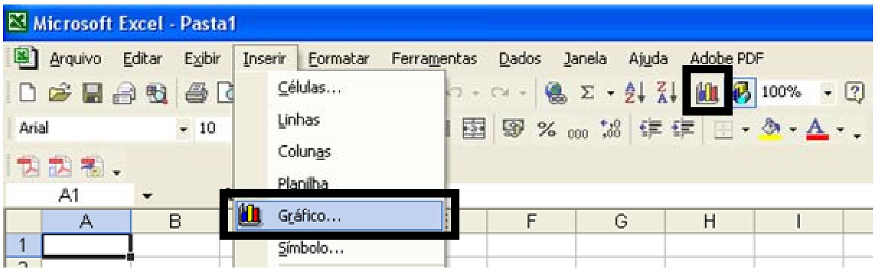
Na Categoria A, encontram-se reunidas respostas do tipo “São diretamente proporcionais, pois, se dobrarmos a quantidade de litros, o preço dobrará também e, assim, sucessivamente.”

As respostas agrupadas na Categoria B justificam a relação de proporcionalidade direta através do argumento incorreto, revelando, apenas, que as duas variáveis envolvidas aumentam, não explicitando que esse aumento é proporcional, isto é, que ao dobramos ou triplicarmos a quantidade de litros, o preço dobra ou triplica respectivamente. Esse grupo de alunos, portanto, demonstra que não compreende a proporcionalidade em uma função.

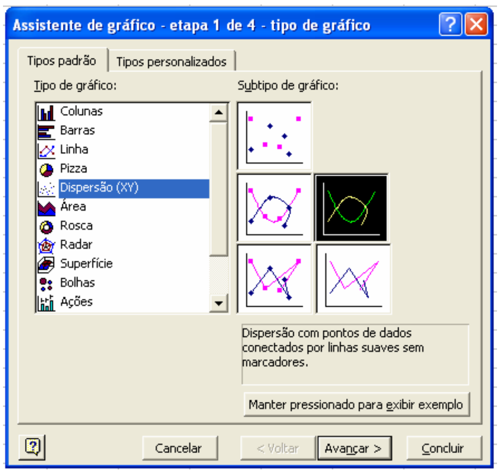
Já, na Categoria C, estão reunidas as respostas que se limitam a identificar a existência de proporcionalidade dentre as variáveis envolvidas, porém fazem uso de exemplos de proporcionalidade direta para justificar o relacionamento entre as variáveis. Nas Categorias D e E, estão reunidas as respostas incorretas.

d) Para a construção do gráfico, segue as seguintes instruções:

d1) Seleciona toda a tabela. Em seguida, no menu Inserir, clica na opção Gráfico, conforme mostra a figura a seguir.



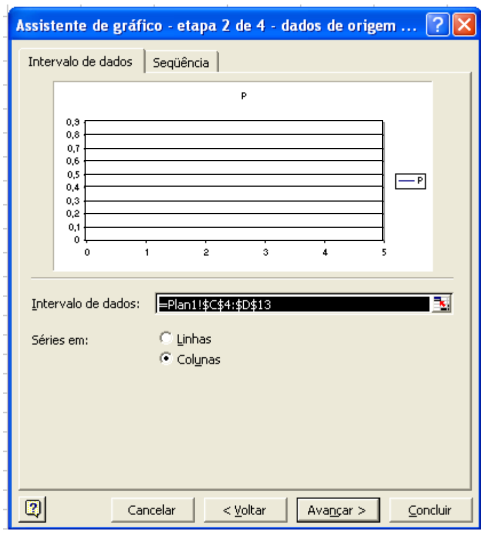
d₂) Uma caixa de diálogo chamada ***Assistente de gráfico*** se *abrirá*.



d₃) Em ***Tipo de gráfico****, seleciona a opção* ***Dispersão*** Dispersão (XY) *e, em* ***Subtipo de gráfico****, escolhe a "dispersão com pontos de dados conectados por linhas suaves sem marcadores", conforme mostra a figura acima.*

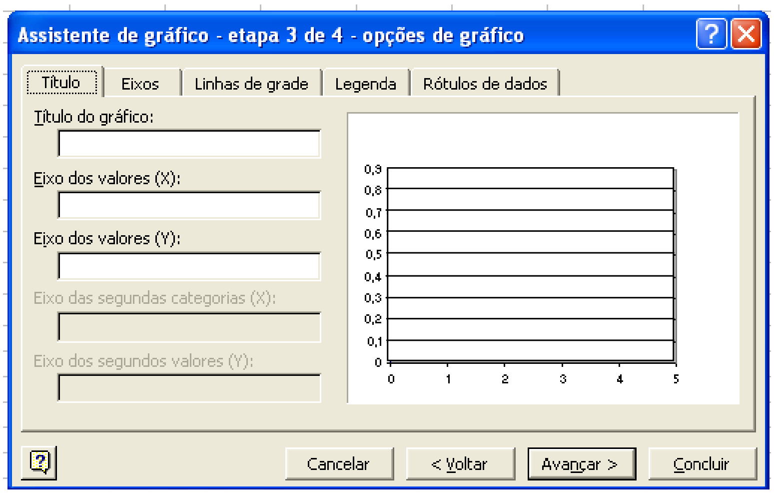
d₄) Clica no botão Avançar > .

d₅) Na guia ***Intervalos de dados****, seleciona "Séries em colunas".*



d₆) Clica no botão Avançar > .

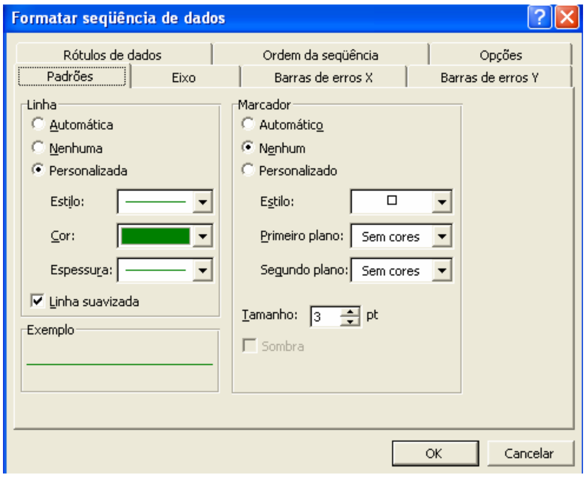
*d₇) Na guia **Título**, digita o título do gráfico. Na mesma janela, define o nome do eixo x (abscissa) e do eixo y (ordenada).*



d₈) Clica no botão Avançar > .

*d₉) Para posicionar o gráfico, seleciona a opção: **Como objeto em: plan 1** e clica no botão* Concluir .

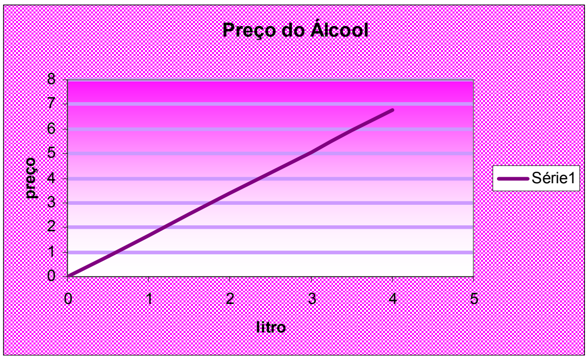
d₁₀) Se quiseres alterar as cores ou o tipo de espessura da linha do teu gráfico, deves fazer o seguinte: posiciona a seta sobre a área do gráfico e clica no botão direito do mouse. Após, seleciona a opção Formatar seqüências de dados... *e, em seguida, escolhendo a guia **Padrões**, configura o gráfico a teu critério, conforme mostra o exemplo da figura a seguir:*



d₁₁) Também podes formatar a área de plotagem e as linhas de grade de maneira semelhante à da formatação do gráfico.

Abaixo, são apresentados alguns exemplos de tabelas e gráficos produzidos pelos alunos.

0	0
0,5	0,845
1	1,69
1,5	2,535
2	3,38
2,5	4,225
3	5,07
3,5	5,915
4	6,76



l	P=1,69*l
0	0
0,5	0,845
1	1,69
1,5	2,535
2	3,38
2,5	4,225
3	5,07
3,5	5,915
4	6,76

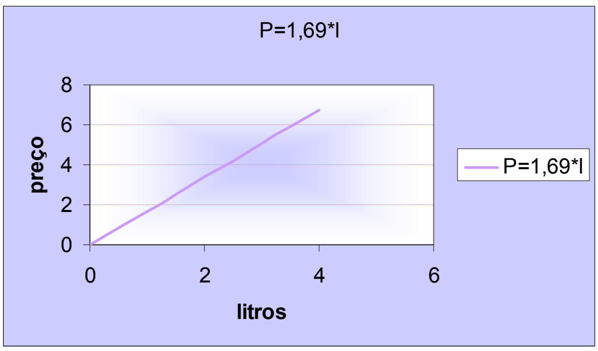


Figura 14 – Tabelas e gráficos construídos pelos alunos – situação 1

e) Que tipo de gráfico obtiveste?

Novamente, as respostas foram organizadas em categorias, conforme mostra a Tabela 7.

Tabela 7 – Distribuição das respostas do item e da situação 1

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Identificaram a reta	22	73,3
B – Descreveram o tipo de gráfico utilizado no *Excel*	2	6,7
C – Identificaram que o gráfico relaciona grandezas diretamente proporcionais	2	6,7
D – Não responderam	3	10,0
E – Responderam de forma inadequada	1	3,3
Total	30	100,0

Observa-se que um número elevado de discentes identificou corretamente o tipo de gráfico construído. Entretanto, a pergunta deu margem para que dois alunos identificassem que, para o *Excel*, o tipo de gráfico utilizado é “Gráfico de Dispersão xy”. E, ainda, dois estudantes explicaram que o gráfico obtido relaciona duas grandezas diretamente proporcionais.

*A variável ℓ pode assumir qualquer valor real igual ou superior a zero. O gráfico dessa função é uma linha contínua que começa em (0,0) e prolonga-se indefinidamente no sentido ascendente. A referida situação é um exemplo de **função afim**.*

f) Qual o valor gasto ao abastecer o tanque com 15,5 litros de álcool? Escreve o cálculo correspondente.

Vinte e nove discentes responderam corretamente a questão acima, e apenas um calculou de forma incorreta. Dezesseis ampliaram a tabela na planilha até obter o valor desejado. Outros treze digitaram a quantidade de litros na referida coluna e obtiveram o valor a ser pago automaticamente. Três reescreveram a fórmula a fim de calcular o valor solicitado, e dois fizeram o cálculo com lápis e papel. Salienta-se, também, que três desses alunos arredondaram o valor obtido, visto que esse possuía três casas decimais e havia a necessidade de arredondar para duas casas após a vírgula.

g) Supondo que foram gastos R$ 40,00 com o abastecimento de um carro com álcool no referido período, quantos litros desse combustível foram colocados no tanque? Escreve o cálculo realizado para determinar a solução solicitada.

Todos os discentes responderam corretamente o item acima. Quinze desses alunos utilizaram a planilha como uma calculadora, sete ampliaram a tabela construída até obter o valor de R$ 40,00, um explicou como o cálculo deveria ser feito, porém não o realizou. E nove alunos ainda fizeram o cálculo manualmente.

<u>Situação 2</u>

*Uma empresa de assistência técnica cobra uma taxa de visita de R$ 55,00 mais R$ 18,00 por hora trabalhada. O preço **P** depende das horas trabalhas **h**, portanto, **P** é função de **h**.*

Esta situação foi resolvida de forma mais independente por parte dos alunos, uma vez que as questões propostas eram semelhantes à da situação anterior. Os estudantes também perceberam logo a existência de uma constante que correspondia à taxa de visitação e que deveria ser adicionada uma única vez ao preço cobrado por hora trabalhada.

a) Qual é a lei de formação dessa função?

Os alunos tiveram maior facilidade em formular a lei de formação que expressa a referida situação do que no problema anterior. Vinte e nove alunos responderam corretamente e apenas um não escreveu.

b) Constrói uma tabela na planilha que relaciona o preço cobrado por essa empresa com o número de horas trabalhadas. Escolhe, no mínimo, dez valores para a variável h. Segue os passos do item b do exercício anterior.

Todos os alunos construíram suas tabelas, variando o número de horas uniformemente: de uma em uma hora ou de trinta em trinta minutos. E, quando questionados por essa escolha, referiram-se à facilidade de analisar o comportamento dessa função.

*c) Existe relação de proporcionalidade entre as variáveis **P** e **h**? Justifica tua resposta.*

As respostas dadas pelos discentes foram agrupadas em categorias, conforme mostra a Tabela 8.

Tabela 8 – Distribuição das respostas do item c da situação 2

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Reconheceram a não existência da relação de proporcionalidade entre as variáveis e justificaram corretamente por meio de exemplos	10	33,3
B – Reconheceram a não existência da relação de proporcionalidade entre as variáveis e justificaram corretamente por meio da taxa fixa	4	13,3
C - Reconheceram a não existência da relação de proporcionalidade entre as variáveis e justificaram de maneira incompleta	2	6,7
D – Reconheceram a não existência da relação de proporcionalidade entre as variáveis e não justificaram	3	10,0
E – Reconheceram, incorretamente, a existência de proporcionalidade e justificaram por meio do aumento das variáveis	11	36,7
Total	30	100,0

As respostas agrupadas na Categoria A expressam a não-existência de proporcionalidade, baseados no fato de que, se a quantidade de horas dobrar ou triplicar, o valor a ser pago não dobrará e não triplicará. Seguem dois exemplos de respostas dadas: “Não são diretamente proporcionais, pois, quando as horas dobram ou triplicam, os preços não acompanham esse aumento proporcionalmente.” e “Se o número de horas dobrar o preço não dobra, por isso não é proporcional.”

Já, nas respostas reunidas na Categoria B, há o reconhecimento de que a taxa fixa implica a não-existência da relação de proporcionalidade entre as variáveis envolvidas. São exemplos dessa categoria: “Não, pois há uma taxa fixa que não muda” e “Não, pois R$55,00 é taxa fixa que só se paga uma vez”.

Na Categoria C, as respostas ficaram restritas ao reconhecimento da não-proporcionalidade entre as variáveis, sem que houvesse justificativa.

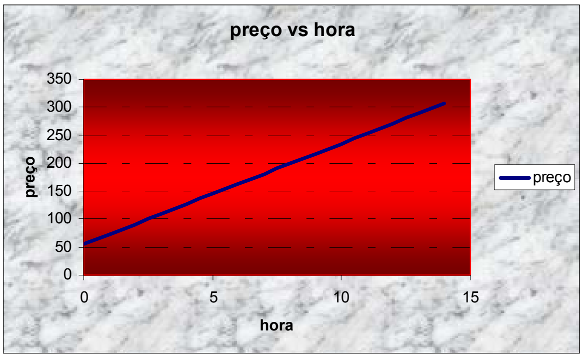
Verificou-se, ainda, que 37% dos alunos responderam conforme a Categoria D, se atendo apenas ao aumento das variáveis sem perceberem que o crescimento não era proporcional. “Sim, porque, quando o número de horas aumenta, o dinheiro a ser pago aumenta” é exemplo de resposta da referida categoria.

d) Constrói o gráfico correspondente a essa função, a partir dos dados obtidos no item anterior. Segue o roteiro para construção gráfica do ***item d*** *da situação anterior.*

Vinte e oito discentes construíram a tabela e os gráficos corretamente. Um, porém, construiu a tabela sem utilizar-se dos recursos da planilha, fazendo o cálculo para cada hora de trabalho, e outro não realizou a atividade.

Na Figura 15, são apresentados dois exemplos de construções tabulares e gráficas realizadas pelos alunos. No primeiro, o estudante calculou o preço a ser pago de forma direta, enquanto, no segundo exemplo, foi determinado inicialmente o preço pago por hora trabalhada e, depois, acrescentada a taxa fixa.

hora	preço
0	55
1	73
2	91
3	109
4	127
5	145
6	163
7	181
8	199
9	217
10	235
11	253
12	271
13	289
14	307



Horas	Preço H	Preço Total
1	18	73
2	36	91
3	54	109
4	72	127
5	90	145
6	108	163
7	126	181
8	144	199
9	162	217
10	180	235
11	198	253

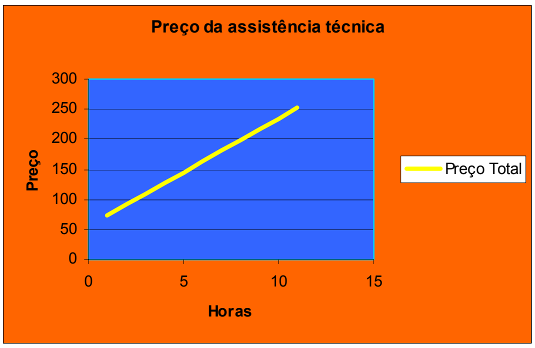


Figura 15 – Tabelas e gráficos construídos pelos alunos – situação 2

e) Em que ponto o gráfico dessa função intercepta o eixo das ordenadas? O que representa esse ponto?

Com base nas respostas dadas, foram construídas as seguintes categorias, descritas na Tabela 9.

Tabela 9 – Distribuição das respostas do item g da situação 2

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Identificaram o ponto corretamente e explicaram seu significado, visualizando as construções gráfica e tabular	7	23,3
B – Identificaram o ponto corretamente e explicaram seu significado, mesmo sem visualizá-lo na construção gráfica e tabular	11	36,7
C – Não escreveram o ponto de interceptação, porém explicaram seu significado, visualizando, em suas construções gráficas e tabulares, o referido ponto	2	6,7
D – Identificaram o ponto corretamente por meio da visualização gráfica e tabular, entretanto não explicaram o seu significado	1	3,3
E – Identificaram o ponto corretamente e não explicaram seu significado, sem visualizá-lo na construção gráfica e tabular	3	10,0
F - Não escreveram o ponto de interceptação, porém explicaram seu significado, sem visualizá-lo na construção gráfica e tabular	1	3,3
G – Responderam de forma incorreta	2	6,7
H – Não responderam	3	10,0
Total	30	100,0

Nas Categorias A e B, encontram-se as respostas corretas, sendo que, na primeira, é possível visualizar o referido ponto nas construções gráficas e tabulares e, na segunda, não. Percebe-se que os alunos da Categoria B projetaram esse ponto, baseando-se no comportamento dessa função.

Nas Categorias C, D e E apresentam-se as respostas incompletas, mas que demonstram o entendimento dos estudantes sobre o que foi perguntado.

Dois discentes responderam a questão de maneira incorreta, e três não atenderam à solicitação.

f) Qual o valor cobrado por um serviço que empregou 2 horas e 30 minutos de mão-de-obra?

Vinte e cinco alunos responderam corretamente essa questão, quatro consideraram que 2 horas e 30 minutos equivalem a 2,3 horas e fizeram o cálculo incorreto, e um não respondeu.

Faze uma apreciação do trabalho realizado, descrevendo tuas facilidades e dificuldades.

De maneira geral, os alunos não tiveram dificuldades na utilização do *software*, apenas dois, contudo, relataram que, no início, apresentaram alguns problemas, os quais foram superados no transcorrer da atividade. Cinco discentes escreveram que o mais trabalhoso foi encontrar a lei de formação da função, e outros cinco manifestaram suas dificuldades em responder as questões solicitadas. Não houve nenhuma manifestação negativa, por parte do grupo, em realizar as atividades propostas tendo a planilha como ferramenta. Vinte alunos destacaram que o *Excel* facilitou a execução da tarefa, fazendo com que não perdessem tempo na realização de muitos cálculos e na construção de gráficos. Apenas um aluno não fez a avaliação do trabalho.

Para finalizar, serão transcritas a seguir, quatro dessas apreciações: "Achei bem fácil utilizar o *Excel*, principalmente na parte de fazer contas, onde com apenas um valor podemos ter vários outros valores respectivos. Não tive dificuldades e achei um ótimo trabalho."; "Foi relativamente fácil utilizar o programa, pois ele possibilita a realização do trabalho mais rapidamente. As contas que o *Excel* faz automaticamente ajudam bastante, mas houve algumas questões um pouco complicadas."; "O trabalho no *Excel* me ajudou a desenvolver com facilidade as construções dos gráficos. Tive dificuldades nas fórmulas que deveria 'ensinar' o *Excel* a fazer." e "Concluí que a facilidade de realizar um problema matemático, utilizando o *Excel*, é muito maior, pois não há necessidade de fazer cálculos com números decimais ou grandes, uma vez que o *Excel* resolve os cálculos para você."

Três discentes mencionaram que tiveram dificuldades em encontrar a lei de formação das funções. Entretanto, no transcorrer da atividade, pude perceber que mais alunos apresentaram essa mesma dificuldade, sem verbalizá-la. Esse fato vem ao encontro do referencial teórico proposto nesse trabalho.

Para Duval (1999), a resolução de situações-problema requer a habilidade de troca de registro, devido à necessidade de encontrar um modelo matemático que explicite o problema, ou, então, requer o trabalho indispensável e concomitante com dois registros, como figuras e linguagem natural ou notação simbólica e geométrica. O mesmo autor ressalta que os estudantes que conseguem efetuar essas mudanças de registros são capazes de fazer a transferência de conhecimentos matemáticos para diferentes contextos. "A coordenação de registros não é conseqüência do entendimento matemático, ao contrário, é uma condição essencial.” (DUVAL, 1999, p. 10). [5]

7.2 Conceito de função de 1º grau – Parte II

As questões apreciadas a seguir compõem a segunda parte da atividade analisada no item 7.1. Essa tarefa foi realizada nos dias 14 e 16 de abril, com duração de 1 hora e 15 minutos, sendo que um aluno faltou à aula em tais dias. Conseqüentemente, serão analisadas vinte e nove produções.

A atividade supracitada tinha como objetivo analisar outras situações do dia-a-dia que representavam funções do 1º grau. O roteiro é composto de três situações que privilegiaram a visualização, a experimentação e a coordenação das representações de uma função em conformidade com o referencial teórico proposto por Duval.

Não houve um detalhamento das ferramentas a serem utilizadas, visto que os discentes tinham conhecimento necessário sobre a utilização da planilha para realizar a proposta.

Observa outras situações que expressam a idéia de função:

<u>Situação 3</u>

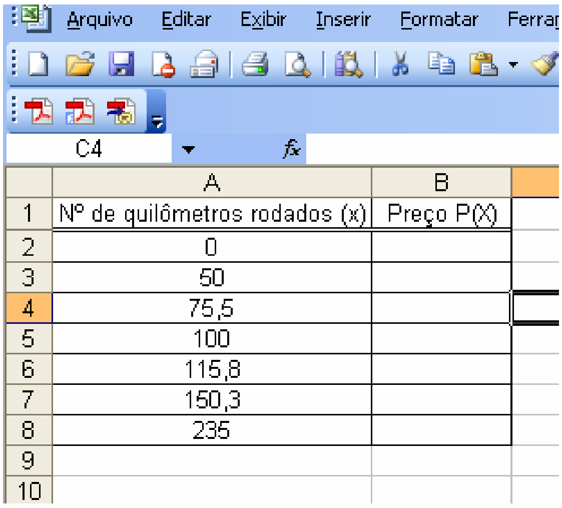
Paulo saiu de férias e alugou um carro popular para fazer uma viagem. A diária do aluguel para esse tipo de carro, em uma determinada locadora de Porto Alegre, corresponde a uma taxa fixa de R$ 27,00, mais R$ 0,45 por quilômetro rodado. Esse tipo de tarifação é denominado Diária Controlada.

Entende-se por diária do aluguel o custo (preço) a ser pago pelo aluguel de um carro na referida locadora.

a) Reproduz a tabela abaixo no Excel que relaciona o número de quilômetros rodados x com o valor pago pela diária do aluguel e a completa:

---

[5] Tradução feita pela autora.



*b) Para que o Excel calcule automaticamente os valores de **P(x)** para cada valor de **x,** seleciona a célula B2 (2ª coluna x 2ª linha), digita o sinal de igualdade (=) e, logo a seguir, a respectiva lei de formação.*

*Não te esqueças de que, na sintaxe do Excel, o sinal de multiplicação corresponde ao "asterisco" (*) e, para incluir a variável **x** na fórmula, seleciona a célula ao lado (A2), a qual contém o número de quilômetros rodados.*

Clica na célula que contém a fórmula recém digitada e, posicionando o cursor no canto inferior direito da célula, arrasta-o até o fim da tabela, a fim de que os demais valores sejam calculados.

c) É correto afirmar que o preço pago pela diária do aluguel é função da quantidade de quilômetros rodados em um determinado dia? Por quê?

As respostas dadas foram categorizadas segundo mostra a Tabela 10.

Tabela 10 – Distribuição das respostas do item c da situação 3

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Identificaram que se tratava de uma função e expressaram de forma completa sua definição	1	3,4
B – Identificaram que se tratava de uma função e justificaram por meio da dependência entre as variáveis	20	69,0
C – Identificaram que se tratava de função e justificaram incorretamente	4	13,8
D – Não identificaram que se tratava de uma função	4	13,8
Total	29	100,0

Verificou-se que apenas um aluno justificou corretamente a questão, identificando a correspondência entre as variáveis e a relação entre cada quilômetro rodado e valor único a ser cobrado. A seguir apresenta-se sua conclusão: “Sim, pois, a cada quilômetro rodado, é adicionado um valor extra no preço. O valor pago depende da quilometragem e é diferente para cada quilômetro.”

A maior parte dos discentes respondeu esse item segundo a Categoria B, que apenas reconhece a relação de dependência entre as variáveis “quilômetros rodados” e “preço pago”. “Sim, quanto mais você anda, mais você paga.”, “Sim, quanto mais quilômetros rodados, maior é o preço” são exemplos dessa categoria.

Nas Categorias C e D, reuniram-se as respostas nas quais os estudantes confundem o conceito de função com a proporcionalidade entre as variáveis. Na primeira, concentram-se as afirmações que reconhecem esta última como função e justificam erroneamente, por meio da existência de proporcionalidade entre as variáveis, e, na segunda, afirmam que não se trata de uma função, explicando de maneira similar à anterior.

Ao realizarem essa questão, percebeu-se que os alunos apresentaram dificuldades em justificar suas respostas. Atribuo essa situação, ao fato de os discentes não estarem habituados a utilizar a linguagem natural para expressar seu entendimento sobre determinado assunto. Para Duval (1999), as questões que exigem a linguagem natural são essenciais para o entendimento de qualquer atividade matemática e, sob o ponto de vista didático, devem ser exploradas, mesmo que, sob o ponto de vista matemático, possam parecer sem importância.

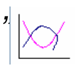
*d) Determina a sentença matemática que relaciona o preço pago por uma diária do carro (**P**) e o número de quilômetros rodados (**x**) em um dia.*

Vinte e cinco alunos escreveram corretamente a lei de formação da função, enquanto quatro a registraram incorretamente na folha da atividade. Entretanto, ao utilizarem a planilha, representaram-na de maneira adequada, adequando-se à sintaxe do *software*.

e) Constrói o gráfico, utilizando a planilha, que relaciona a quantidade de quilômetros com o valor pago pela diária do aluguel.

Segue o seguinte roteiro para a construção no Excel:

*e_1) Seleciona toda a tabela e clica na opção **Gráfico***  .

*b_2) Na caixa de diálogo **Assistente gráfico**, escolhe, na guia **Tipo de gráfico,** a opção* Dispersão (XY) *e, na guia **Subtipo de gráfico**, a “dispersão com pontos de dados conectados por linhas suaves sem marcadores’*  .

e_3) Clica no botão Avançar > .

*e_4) Na guia **Intervalos de dados**, seleciona **Séries em colunas**.*

e_5) Novamente, clica no botão 

.

*e_6) Na guia **Título**, digita o título do gráfico, bem como o nome dos eixos da abscissa e da ordenada.*

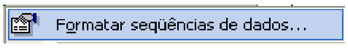
e_7) Clica em 

.

*e_8) Para posicionar o gráfico, seleciona a opção: **Como objeto em: plan 1** e clica no botão* 

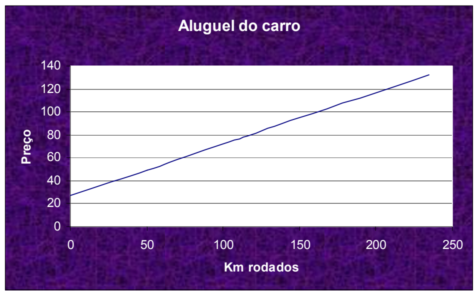
.

e_9) Se quiseres, podes formatar a seqüência de dados, a área de plotagem ou as linhas de grade, posicionando a seta sobre a área a ser modificada, clicando no botão da direita do mouse e selecionando um dos seguintes itens:



Na Figura 16, figuram dois exemplos de tabelas e gráficos realizados pelos estudantes. No primeiro, o discente construiu a tabela e o gráfico que relaciona o valor pago pelo aluguel em função dos quilômetros rodados. Já, no segundo registro, a tabela é composta por três colunas, sendo que R(q) representa o preço pago por quilômetro rodado e P(x) corresponde ao valor da diária obtido mediante a soma de R(q) com a taxa fixa. Os gráficos construídos correspondem, respectivamente, às funções R(q) e P(x), conforme mostra a legenda inserida.

Nº. de km rodados (x)	Preço (y)
0	27
50	49,5
75,5	60,975
100	72
115,8	79,11
150,3	94,635
235	132,75



Número de quilômetros rodados (x)	Preço P(x)	Preço R(q)
0	27	0
50	49,5	22,5
75,5	60,975	33,975
100	72	45
115,8	79,11	52,11
150,3	94,635	67,635
235	132,75	105,75

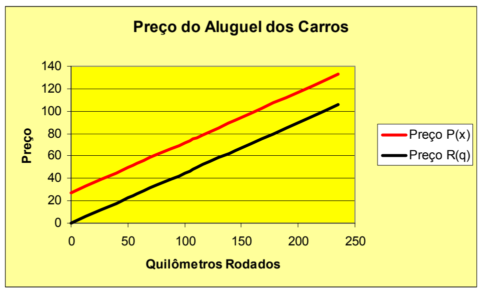


Figura 16 – Tabelas e gráficos construídos pelos alunos – situação 3

f) Nessa primeira situação, existe alguma relação de proporcionalidade? Justifica tua resposta.

De maneira análoga ao item c da situação 2, as respostas formuladas foram agrupadas por semelhança e distribuídas de acordo com a Tabela 11, exposta a seguir:

Tabela 11 – Distribuição das respostas do item f da situação 3

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Reconheceram a não existência da relação de proporcionalidade entre as variáveis e justificaram corretamente por meio de exemplos	15	51,7
B – Reconheceram a não existência da relação de proporcionalidade entre as variáveis e justificaram corretamente por meio da taxa fixa	1	3,4
C - Reconheceram a não existência da relação de proporcionalidade entre as variáveis e justificaram de maneira incompleta	4	13,8
D – Reconheceram a não existência da relação de proporcionalidade entre as variáveis e não justificaram	1	3,4
E – Reconheceram, incorretamente, a existência de proporcionalidade e justificaram por meio do aumento das variáveis	8	27,6
Total	29	100,0

É pertinente sublinhar que a explicação de cada uma dessas categorias foi feita através da análise do item c da situação 2.

Observa-se que, em comparação à situação anterior, houve um aumento de 9,1% no número de discentes que reconheceu a não proporcionalidade entre as variáveis consideradas. Ademais, houve um acréscimo de 8,4% nas respostas com justificativas corretas. Esses fatos denotam uma maior compreensão, por parte do grupo, sobre a existência ou não de proporcionalidade entre as variáveis de uma função.

<u>Situação 4</u>

Um vendedor recebe um salário mensal fixo de R$ 800,00 e, além disso, uma comissão de 4% sobre o total do que vende.

a) Sendo v o valor das vendas desse trabalhador e S o seu ganho mensal, constrói uma tabela na planilha que relaciona essas grandezas. Supõe diversos valores de venda e utiliza as ***dicas*** *do* ***item b****, da situação anterior, para a construção da referida tabela.*

Vinte e seis alunos construíram suas tabelas com duas colunas: a primeira continha possíveis valores de venda, dispostos em ordem crescente, e a segunda, continha o calculo do respectivo salário. Um discente utilizou-se do mesmo tipo de tabela, porém colocou os possíveis valores de venda em ordem decrescente. E outros dois criaram uma tabela com três colunas, sendo uma delas destinada ao cálculo da comissão.

Destaca-se que, no grupo em que o aluno colocou seus valores de venda em ordem decrescente, proporcionou-se uma discussão sobre se haveria ou não uma modificação no comportamento do gráfico. Alguns acharam que o gráfico seria decrescente, e outros acharam que esse fato não acarretaria modificação. Em decorrência dessa situação, incentivei os alunos a construírem outras tabelas, com valores de venda dispostos em ordem decrescente e, após, pedi que analisassem o respectivo gráfico. Os estudantes, então, concluíram que, independentemente da disposição dos valores de venda na tabela, o gráfico permanece o mesmo.

b) As variações v e S são diretamente proporcionais? Ou são indiretamente proporcionais? Ou, então: Não há relação de proporcionalidade entre elas?

Vinte e três alunos perceberam que não havia relação de proporcionalidade entre os valores de venda e o salário do vendedor. Cinco afirmaram que as variáveis consideradas eram diretamente proporcionais, e um identificou a existência de proporcionalidade inversa. Novamente houve um aumento do número de respostas corretas em relação à situação 3.

c) A variável S depende de v. Temos uma função? Qual é a sua fórmula?

Todos os participantes escreveram corretamente a fórmula que expressa a relação de dependência entre o valor das vendas e o salário do funcionário.

A Figura 17, a seguir, mostra três diferentes formas, fornecidas pelos estudantes, para escrever a lei de formação dessa função:

$$S = 800 + 0,04 \cdot V$$

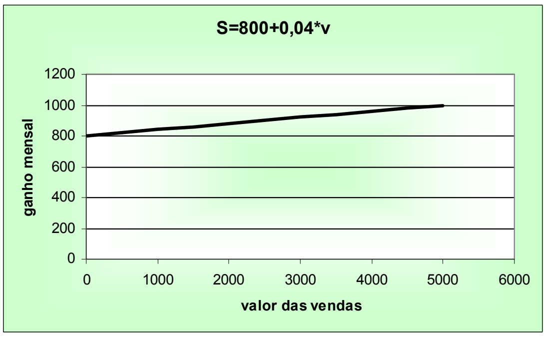
$$S = 800 + 4\% \cdot V \qquad (V/100 \cdot 4) + 800 = S$$

Figura 17 – Protocolo de registro de alunos – situação 4

*d) Constrói, na planilha, o gráfico que representa essa situação. Segue o roteiro do i**tem e** da situação anterior.*

A Figura 18 apresenta três exemplos de tabelas e gráficos, conforme mostra a descrição feita no item “a” dessa situação.

Valor total das vendas (v)	Ganho mensal (S)
0	800
500	820
1000	840
1500	860
2000	880
2500	900
3000	920
3500	940
4000	960
4500	980
5000	1000



Valor das vendas	Ganho Mensal
50000	2800
40000	2400
30000	2000
20000	1600
10000	1200
0	800

V (vendas)	ST (salário total)	C (comissão)
100	804	4
200	808	8
300	812	12
400	816	16
500	820	20
600	824	24
700	828	28
800	832	32
900	836	36
1000	840	40
1100	844	44

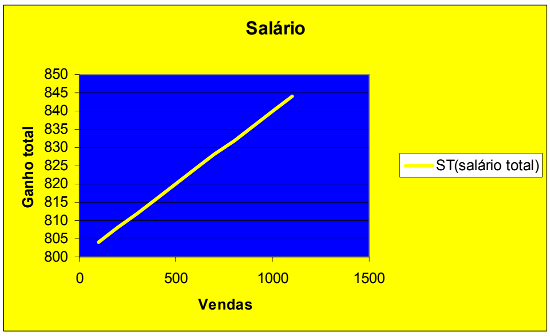


Figura 18 – Tabelas e gráficos construídos pelos alunos – situação 4

e) Com base nessas informações, quanto esse vendedor precisará vender para que seu ganho mensal seja igual a R$ 1 000,00?

Nenhum dos participantes apresentou dificuldade na realização dessa questão, visto que todos fizeram uso dos recursos da planilha, ampliando, quando necessário, suas tabelas, a fim de aumentar os valores de vendas até encontrar o do ganho mensal desejado.

Situação 5

A quinta e última situação exemplifica uma função decrescente com domínio pertencente ao conjunto dos números naturais, variando entre zero e dez e, portanto, o gráfico não poderá ser uma linha contínua, mas seus pontos estando alinhados.

Para incentivar o pagamento adiantado, algumas administradoras de condomínio oferecem descontos de 1% para cada dia de antecipação na data do pagamento, podendo antecipar, no máximo, 10 dias. Sabendo que o valor de um determinado condomínio é de R$ 850,00, responde às seguintes questões:

a) Qual a expressão algébrica que relaciona o valor do condomínio V com o número de dias de antecipação do pagamento n.

Vinte participantes responderam corretamente essa questão na atividade escrita; três escreveram-na incorretamente, porém, ao fazer uso da planilha, utilizaram-na de maneira apropriada. Dois não responderam e, no entanto, ao construírem a tabela no *software*, escreveram a lei de formação dessa função adequadamente. E, finalmente, quatro responderam o questionamento de maneira imprópria.

A Figura 19 ilustra diferentes formas de escrita da lei de formação escritas por três discentes.

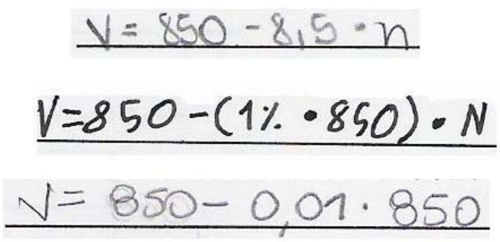


Figura 19 – Protocolo de registro de alunos – situação 5

b) Quanto um condômino irá pagar se efetuar o pagamento com 5 dias de antecedência?

Do total de protocolos analisados, 75,8 % dos respondentes realizaram essa questão corretamente, 6,9 % não atenderam à solicitação e 17,2% responderam de maneira incorreta.

c) Podemos atribuir valores negativos para n? Por quê?

As respostas do referido item foram agrupadas e reunidas de acordo com a Tabela 12, a seguir.

Tabela 12 – Distribuição das respostas do item c da situação 5

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Responderam que não podem ser atribuídos valores negativos para **n** e fazem referência à impossibilidade de contagem usando números negativos	9	31,0
B – Responderam que não podem ser atribuídos valores negativos para **n** e fazem referência ao fato de a situação apresentar desconto para pagamento adiantado e não atrasado	12	41,4
C – Responderam que não podem ser atribuídos valores negativos para **n** e não justificaram	1	3,4
D – Responderam que podem ser atribuídos valores negativos para **n** e que esses representariam os dias em atraso	5	17,2
E – Não responderam	2	6,9
Total	29	100,0

As respostas reunidas na Categoria A dão a idéia de que o domínio dessa função corresponde ao conjunto dos Números Naturais. São exemplos desse conjunto de respostas: “Não, porque não existem dias negativos.”; “Não, porque não dizemos que pagamos com -1 dia de antecedência.”

Por sua vez, as respostas da Categoria B fazem referência ao problema ser limitado ao desconto para pagamento antecipado e não fazem alusão aos atrasos. “Não, porque são dias de antecipação no pagamento” e “Não, porque atrasaria o pagamento e aumentaria o preço” são respostas que exemplificam essa categoria.

Um aluno restringiu-se a responder negativamente ao item c, sem justificar sua resposta.

Na Categoria D, os respondentes fizeram uso de argumentos semelhantes aos da Categoria B, porém afirmaram que poderiam ser atribuídos números negativos para **n**, uma vez que esses podem ser considerados como dias em atraso. A seguir, são apresentados exemplos de respostas: “Sim, podem ser os dias em atraso” e “Sim, porque eles correspondem aos dias em atraso do pagamento, tendo uma multa a ser paga.”

Dois estudantes não responderam a questão.

d) Podemos atribuir valores não inteiros para n? Justifica tua resposta.

Para análise desse item, as respostas foram reunidas e categorizadas, conforme mostra a Tabela 13.

Tabela 13 – Distribuição das respostas do item d da situação 5

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Fizeram referência à utilidade dos números naturais	12	41,4
B – Responderam a partir dos dados do problema	13	44,8
C – Responderam de forma incorreta	2	6,9
D – Não responderam	2	6,9
Total	29	100,0

A seguir, são explicitados alguns exemplos de respostas para as categorias destacadas na tabela acima:

Categoria A: “Não, porque não existem dias não inteiros” e “Não, pois o número de dias precisa ser natural, não pode ser outro tipo.”

Categoria B: “Não, o combinado menciona dias e não horas.”; “Não, pois, se pagarmos de manhã ou à noite será o mesmo dia e não terá diferença” e “Não, pois eles descontam pelo número de dias, não de horas.”

Categoria C: “Podemos, porque o programa calcula igual.”

Dois alunos não responderam a referida questão.

e) Constrói, no Excel, uma tabela com todas as possibilidades de desconto.

Na construção da tabela, três alunos utilizaram a expressão algébrica incorreta, não representando a situação proposta. Vinte e quatro construíram uma tabela com duas colunas, sendo a primeira destinada ao número de dias e a segunda ao valor pago do condomínio. Dois fizeram uma tabela com três colunas: as duas primeiras iguais às dos vinte e quatro colegas e uma terceira em que era discriminado o valor do desconto.

f) A partir da tabela construída no item anterior, constrói o gráfico que relaciona o valor pago pelo condômino V e o número de dias de antecipação do pagamento (n).

Apesar de dois alunos afirmarem que o valor de n poderia ser não-inteiro, dez participantes (34,5%) construíram seus gráficos utilizando a “Dispersão com pontos de dados conectados por linhas suaves sem marcadores”, e, portanto, o gráfico apresentam uma linha contínua, conforme mostra a Figura 20.

n	V
1	841,5
2	833
3	824,5
4	816
5	807,5
6	799
7	790,5
8	782
9	773,5
10	765

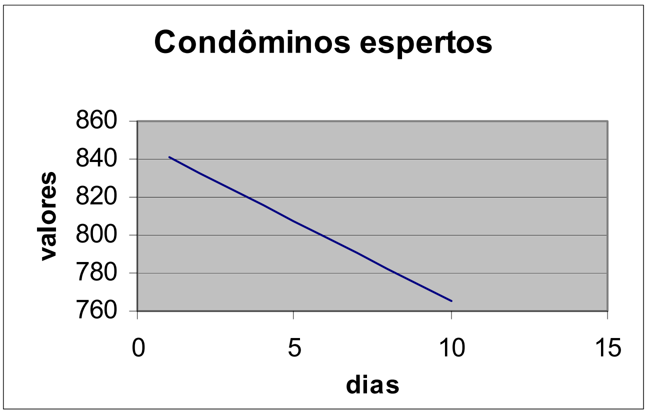
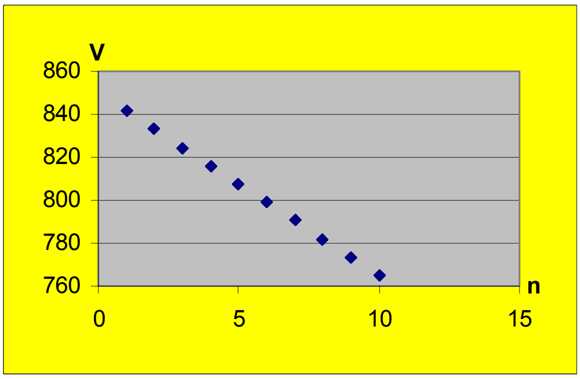


Figura 20 – Construção de gráfico, utilizando linha contínua – situação 5

Ressalta-se, ainda, que três dos discentes citados anteriormente construíram gráficos incorretos, pois utilizaram uma lei de formação inadequada, conforme foi mencionado antes. Um estudante não construiu o gráfico e os demais o construíram utilizando, corretamente, o tipo de gráfico: “Dispersão. Compara pares de valores”, desse modo seus gráficos não se constituíram uma linha contínua, mas apresentaram os pontos alinhados. A Figura 21 exemplifica esse tipo de gráfico.

n	V	D
1	841,5	8,5
2	833	17
3	824,5	25,5
4	816	34
5	807,5	42,5
6	799	51
7	790,5	59,5
8	782	68
9	773,5	76,5
10	765	85



Dias	Valor
0	850
1	841,5
2	833
3	824,5
4	816
5	807,5
6	799
7	790,5
8	782
9	773,5
10	765

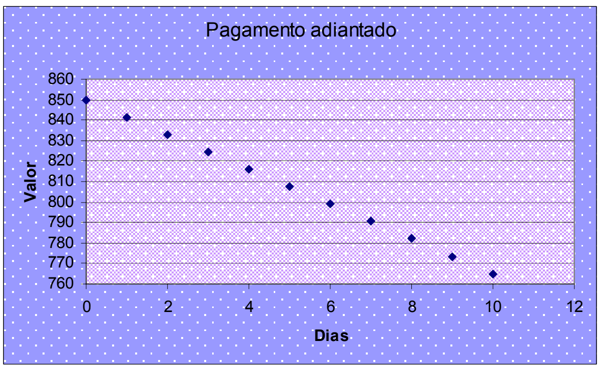


Figura 21 – Tabelas e gráficos construídos pelos alunos – situação 5

g) Que tipo de dispersão deve ser utilizada na construção desse gráfico? Por quê?

As respostas desse item foram agrupadas e organizadas em categorias, conforme consta na Tabela 14.

Tabela 14 – Distribuição das respostas do item g da situação 5

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Dispersão compara pares de valores, justificam mediante a necessidade da variável n ser um número natural	12	41,4
B – Dispersão compara pares de valores e não justificam	6	20,7
C – Dispersão com pontos de dados conectados por linhas suaves sem marcadores e justificam de maneira inconsistente	2	6,9
D – Dispersão com pontos de dados conectados por linhas suaves sem marcadores e não justificam	4	13,8
E – Não responderam	5	17,2
Total	29	100,0

Na primeira categoria, foram agrupadas as respostas que fazem referência à impossibilidade de serem atribuídos valores decimais ou negativos para a variável que representa o número de dias, ou, ainda, as respostas que mencionaram que não devem ser consideradas as frações do dia (horas) para ser efetuado o desconto.

Os alunos que responderam de acordo com essa primeira categoria identificaram que o domínio da variável independente (dias) pertence a um subconjunto dos números naturais e, conseqüentemente, o gráfico dessa função é um conjunto discreto de pontos.

Já as respostas da Categoria B restringem-se a citar, corretamente, o tipo de dispersão escolhido, sem justificar o porquê da referida escolha.

Fazem parte da Categoria C as respostas que se utilizaram de justificativas inconsistentes para a opção de dispersão feita de maneira incorreta. Na Categoria D, a escolha da dispersão também foi incorreta, e, os respondentes não escreveram a justificativa solicitada.

Houve, ainda, cinco alunos não responderam essa última questão.

7.3 Função de 1º grau – Análise das alterações gráficas, a partir da modificação dos parâmetros da expressão algébrica

Duval (1993) afirma que menos de 2% dos discentes que estudaram funções afins, mediante um trabalho de leitura de um par de números sobre um gráfico e pela designação de um ponto a partir de um par de números, reconhecem $y = x$ e $y = -x$, nas suas respectivas representações gráficas. E revela que menos de um terço distingue graficamente as funções $y = 2x$ e $y = x + 2$. Além disso, Duval (1993) destaca que a repetição dessas duas operações não é o suficiente para haver a conversão entre os registros algébrico e gráfico. O mesmo autor enfatiza, ainda, que cada registro semiótico de uma representação tem uma forma específica de funcionamento, da qual os alunos devem se tornar conscientes a fim de que haja a apreensão de um determinado conceito (DUVAL, 1999).

Moretti (2003) destaca que a construção gráfica das funções, nas atividades de ensino, é feita por meio da junção de pontos localizados no plano e que as coordenadas desses pontos são calculadas por intermédio de substituições na expressão algébrica correspondente, não privilegiando a construção gráfica da família das funções e a percepção da relação existente entre seus coeficientes e as curvas construídas.

Na perspectiva de um trabalho que vincule as representações gráfica e algébrica de uma função afim, a presente atividade teve como objetivo proporcionar a avaliação, no que se refere aos alunos, das alterações produzidas nos gráficos a partir das modificações paramétricas. Dessa forma, objetivou-se a "[...] associação variável visual da representação $\leftrightarrow$ unidade significativa da escrita algébrica." (DUVAL, 1988 citados por MORETTI, 2003, p. 151).

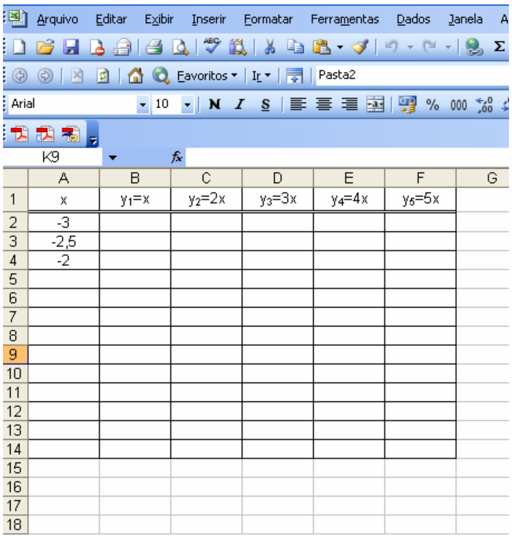
A atividade foi aplicada em dois encontros de cinqüenta minutos nos dias 28 de abril e 5 de maio de 2008; seu roteiro é composto por três situações com orientações para as construções gráficas e com questionamentos sobre os referidos gráficos. No segundo encontro, faltaram dois participantes e, conseqüentemente, suas atividades ficaram incompletas.

A seguir, é apresentada a análise das questões realizadas:

Situação 6

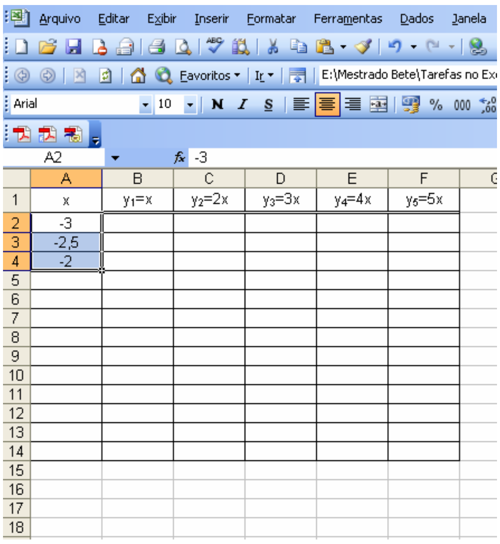
Constrói, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $y_1 = x$, $y_2 = 2x$, $y_3 = 3x$, $y_4 = 4x$ *e* $y_5 = 5x$, *utilizando o Excel.*

Para tanto, reproduz a tabela abaixo na planilha, seguindo o roteiro descrito:



a) Digita nas células A2, A3 e A4, respectivamente, os valores -3; -2,5 e -2.

b) Seleciona as referidas células, conforme mostra a figura abaixo:



c) Após, arrasta a seta até a célula A14, de forma que apareçam os números de -3 a 3, com variação de 0,5.

d) Na célula B2, digita o sinal de "=", o coeficiente da função, o "" que corresponde ao sinal de multiplicação e, por último, seleciona a célula A2.*

e) Agora, clica na célula que contém a fórmula digitada, posicionando adequadamente a seta sobre a mesma e arrasta-a até o fim dessa coluna.

f) Repete os procedimentos dos itens **d** *e* **e** *para as funções* $y_2 = 2x$, $y_3 = 3x$, $y_4 = 4x$ *e* $y_5 = 5x$.

g) Seleciona toda a tabela e, em seguida, no menu Inserir, clica na opção ***Gráfico***.

Na Figura 22, tem-se um exemplo de gráfico construído por um dos participantes dessa pesquisa:

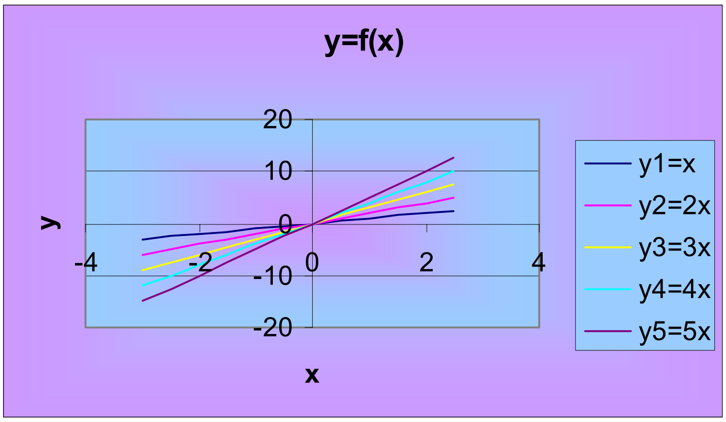


Figura 22 – Gráficos construídos por aluno – situação 6

h) O que faz a inclinação da reta variar em relação ao eixo das abscissas?

Essa questão tinha como objetivo proporcionar uma reflexão acerca das rotações proporcionadas na família das funções afins, mediante a alteração do coeficiente angular.

Para essa questão, seguem abaixo os tipos de respostas apresentadas pelos participantes, distribuídas segundo as categorias da Tabela 15.

Tabela 15 – Distribuição das respostas do item h da situação 6

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Explicitaram a relação existente entre o coeficiente angular e a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas	15	50,0
B – Citaram que a mudança do coeficiente angular acarreta alteração na inclinação da reta	9	30,0
C – Responderam de forma inadequada	1	3,3
D – Responderam de forma incorreta	5	16,7
Total	30	100,0

As respostas reunidas na Categoria A demonstram a compreensão de que o coeficiente angular produz rotações, alterando a inclinação da reta em relação ao eixo x. “Quanto maior o coeficiente, maior será o ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo x” e “À medida que o coeficiente aumenta, a inclinação da reta vai aumentando em relação ao eixo das abscissas” são exemplos de respostas dessa categoria.

Na segunda categoria, os alunos se restringiram a identificar que o coeficiente angular é responsável pela alteração na inclinação da reta.

O único representante da Categoria C escreveu: “O aumento do valor do coeficiente faz a reta aumentar a altura.” Esse estudante apresentou compreensão da função do coeficiente angular, no entanto não utilizou, em seu argumento, um vocabulário adequado.

Cinco alunos responderam incorretamente essa questão.

i) Em que ponto os gráficos dessas funções interceptam o eixo x?

Vinte e nove discentes responderam corretamente essa questão, e apenas um respondeu “no meio”, fazendo alusão ao ponto (0,0) como ponto de intersecção dos eixos das abscissas e das ordenadas.

<u>Situação 7</u>

a) Utiliza os procedimentos citados anteriormente e constrói os gráficos $y_1 = -x$, $y_2 = -2x$, $y_3 = -3x$, $y_4 = -4x$ e $y_5 = -5x$ em um único plano cartesiano.

Dica: *Podes copiar a tabela da tarefa anterior, alterando apenas a lei de formação de cada função.*

Os alunos realizaram esse procedimento com rapidez, copiando a tabela da situação anterior e, apenas, alterando os valores dos coeficientes nas fórmulas e arrastando os resultados obtidos para as demais células, a fim de que o programa fizesse as modificações necessárias. Em diversos momentos, os discentes não faziam a alteração devida em todas as células, mas, quando construíam o gráfico, percebiam o erro, pois esse não era uma reta e modificavam a célula correspondente, alterando a construção gráfica automaticamente. Quando algum aluno não conseguia identificar o erro cometido, eu o auxiliava, incentivando-o a refletir sobre o que gerou o equívoco, tanto em nível conceitual como procedimental.

Morgado (2003, p. 27) destaca que a utilização da planilha permite que os estudantes reflitam sobre suas ações a partir dos resultados obtidos:

> Também por meio de uma seleção de células (ou conteúdo), o educando pode construir tabelas ou gráficos. Após cada execução, o aluno tem a oportunidade de refletir sobre os resultados obtidos, tanto nas células, isoladamente, como nas tabelas e gráficos obtidos pela seleção de um conjunto de células. Além disso, pode acessar e conferir o conteúdo de cada célula por meio da barra de fórmulas e refletir sobre os resultados obtidos, podendo se conscientizar dos erros e acertos cometidos.

Ademais, em sua pesquisa, Morgado (2003) enfatiza que a interação entre o aluno e o computador deve ser mediada pelo professor, de forma que se estabeleça um ambiente favorável para a aprendizagem, por meio da valorização da reflexão, da ação, da curiosidade, do questionamento, objetivando-se, dessa forma, a construção do conhecimento por parte do discente.

A Figura 23 ilustra os gráficos feitos por um dos estudantes:

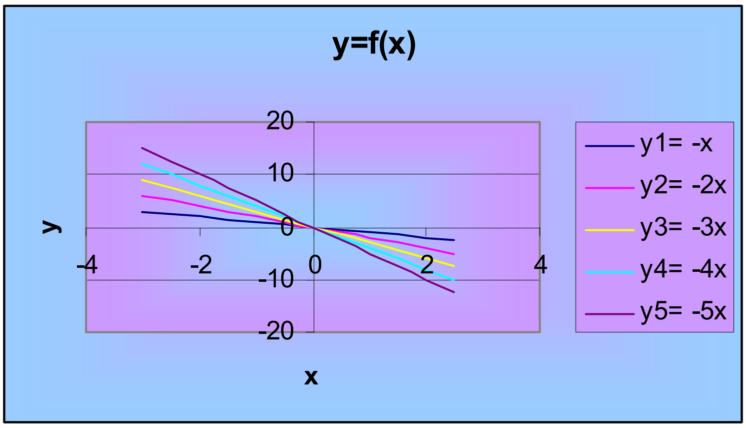


Figura 23 – Gráficos construídos por aluno – situação 6

b) Compara-os com os gráficos do exercício anterior. Explica o que os diferencia.

As respostas dadas para essa questão foram agrupadas nas categorias apresentadas na Tabela 16.

Tabela 16 – Distribuição das respostas do item b da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Fizeram referência à inclinação das retas	4	13,3
B – Fizeram referência ao crescimento e ao decrescimento das funções	23	76,7
C – Responderam de forma incorreta	2	6,7
D – Não responderam	1	3,3
Total	30	100,0

A Categoria A é composta pelas respostas que expressam que a diferença entre os gráficos das situações 6 e 7 é a inclinação das respectivas retas. Já, na Categoria B, estão agrupadas as repostas que explicitam a idéia de crescimento e decrescimento de uma função. São alguns exemplos desse caso: "Nos primeiros gráficos os valores das funções iniciam negativos e, no final, são positivos e, nos segundos gráficos, acontece o contrário. Os valores iniciais das funções são positivos, e os últimos, negativos." e "No primeiro, a função aumenta e, no segundo, a função diminui."

Dois alunos responderam incorretamente a questão e um não respondeu.

Os gráficos construídos são exemplos de função linear. A função linear é um caso particular da função afim. Sua lei é $y = ax$ *com* $a \neq 0$*.*

c) O que ocorre com o gráfico de uma função linear quando o coeficiente de x é positivo? E quando é negativo?

As categorias estabelecidas para as respostas dessa questão são apresentadas na Tabela 17, a seguir:

Tabela 17 – Distribuição das respostas do item c da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Classificaram as funções como crescente ou decrescente	19	63,3
B – Fizeram referência modificação da imagem da função	3	10,0
C – Responderam de forma incorreta	6	20,0
D – Não responderam	2	6,7
Total	30	100,0

Na primeira categoria, encontram-se as respostas que classificam as funções como crescente ou decrescente a partir da análise do sinal do coeficiente angular. “Quando o coeficiente é positivo, o y cresce e, quando é negativo, o y diminui.” E “Quando o coeficiente é positivo, o gráfico é crescente e, quando é negativo, o gráfico é decrescente” são exemplos de respostas pertencentes a essa categoria.

Na Categoria B, foram agrupadas as respostas que mencionam a modificação na imagem das funções, como, por exemplo: “O gráfico inverte, troca de lado. O que estava na direita foi para a esquerda e vice-versa. Isso se dá pelo efeito do coeficiente de x trocar de sinal.”

<u>Situação 8</u>

a) Constrói, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções $y_1 = x$, $y_2 = x+1$, $y_3 = x+2$, $y_4 = x+3$ *e* $y_5 = x+4$.

Dica: *Podes copiar a tabela da primeira tarefa, alterando apenas a lei de formação de cada função.*

b) Constrói, no mesmo sistema, os gráficos das funções $y_1 = x$, $y_6 = x-1$, $y_7 = x-2$, $y_8 = x-3$ *e* $y_9 = x-4$.

A Figura 24 mostra os gráficos construídos por um mesmo estudante.

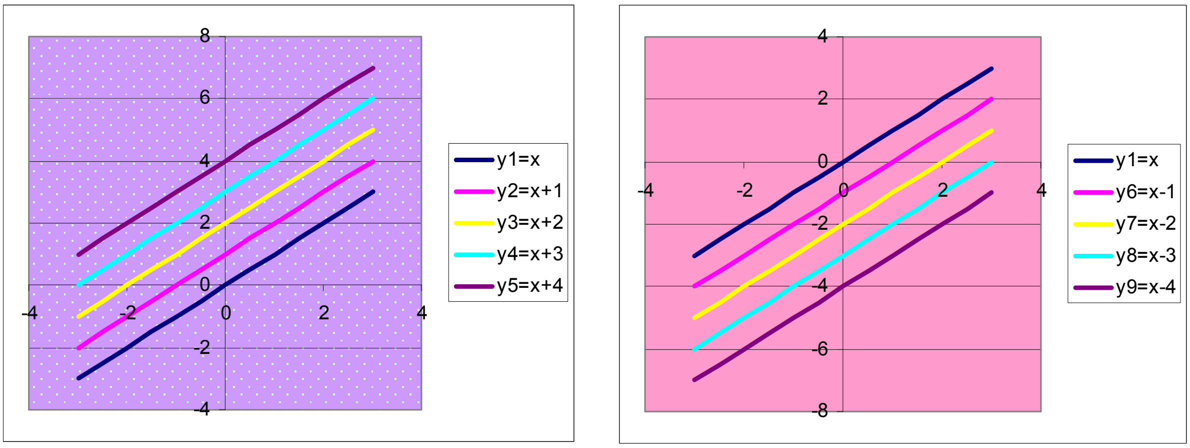


Figura 24 – Gráficos construídos pelo mesmo aluno – situação 7

c) Compara os gráficos construídos nos itens 3 e 4 com a função $y_1 = x$. *O que acontece com o gráfico, na medida em que somamos ou subtraímos uma constante positiva da variável x?*

Após análise das respostas apresentadas, essas foram organizadas e categorizadas conforme explicita a Tabela 18:

Tabela 18 – Distribuição das respostas do item c da situação 8

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Fizeram referência ao movimento de translação produzido pela modificação do coeficiente linear	18	60,0
B – Fizeram referência à distância em que o gráfico está em relação ao eixo das abscissas	2	6,7
C – Restringiram-se ao fato de que os gráficos construídos são paralelos	1	3,3
D – Responderam de forma incorreta	7	23,2
E – Não responderam	2	6,7
Total	30	100,0

A Categoria A é composta das respostas que mencionam que, quando o coeficiente linear é positivo, o gráfico translada para cima no eixo das ordenadas e, quando esse mesmo coeficiente é negativo, a curva translada para baixo. Salienta-se que apenas dois discentes fizeram uso da palavra translação em suas argumentações. Na Categoria B, por outro lado, estão reunidas as respostas que fazem referência ao paralelismo das retas e destacam que, quanto maior o coeficiente em módulo, maior é a distância da curva em relação ao eixo das abscissas. Na Categoria C, aparecem as respostas que se detiveram apenas ao aspecto de que os gráficos construídos eram paralelos. Sete alunos apresentaram respostas incorretas para o referido item, e dois não responderam a questão.

d) Para cada uma das seguintes funções abaixo, determina o ponto em que cada gráfico intercepta o eixo x.

Função	**Para qual valor de x tem-se $y = 0$?**
$y_1 = x$	
$y_2 = x + 1$	
$y_3 = x + 2$	
$y_4 = x + 3$	
$y_6 = x - 1$	
$y_7 = x - 2$	
$y_8 = x - 3$	

A realização dessa questão proporcionou discussão, por parte dos participantes, acerca do estabelecimento da diferenciação entre função e equação. A maioria dos alunos pôde concluir que ao resolver uma determinada equação, encontra(m)-se o(s) valor(es) para o(s) qual(is) uma determinada função se anula. Além disso, esse(s) valor(es) corresponde(m), graficamente, ao(s) ponto(s) de intersecção da curva com o eixo das abscissas.

Salienta-se que a referida questão foi respondida no segundo encontro destinado à conclusão dessa atividade. Sendo assim, estavam presentes vinte e oito participantes dos trinta escolhidos para amostra.

Vinte e seis alunos responderam corretamente, um respondeu incorretamente, e um não realizou a atividade.

Denomina-se zero ou raiz de uma função $y = ax + b$ *com* $a \neq 0$*, o valor de* x *que anula a função. Esse valor é dado pela raiz da equação* $ax + b = 0$*.*

Geometricamente, o zero de uma função afim é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo x*.*

e) A partir do gráfico, analisa para quais valores de x *cada uma das seguintes funções é positiva e/ou negativa.*

Função	**Para quais valores de x tem-se $y > 0$?**	**Para quais valores de x tem-se $y < 0$?**
$y_1 = x$		
$y_2 = x + 1$		
$y_3 = x + 2$		
$y_5 = x + 3$		
$y_6 = x - 1$		
$y_7 = x - 2$		
$y_8 = x - 3$		

Dos vinte e oito alunos presentes, vinte e quatro completaram corretamente o quadro acima, dois responderam incorretamente os três últimos itens, pois consideraram (erroneamente) que as funções eram decrescentes. Um discente respondeu de forma incorreta a todos os itens, e um não completou a tabela.

Várias questões dessa segunda atividade exigiam que os discentes escrevessem suas conclusões em linguagem natural, mediante a análise dos gráficos construídos. Esse tipo de conversão de uma representação não verbal (gráficos), em uma representação lingüística é denominado de "descrição". (DUVAL, 1993, p.42).

Constataram-se dificuldades na maioria dos participantes em relação a esse aspecto, já que suas respostas não foram escritas de maneira clara e objetiva. Na perspectiva de Duval, não houve a conversão da representação gráfica para a linguagem natural. Atribuo essa dificuldade ao fato de os alunos não estarem habituados a escrever nas aulas de Matemática. Duval (2003) aponta que a atividade matemática mobiliza uma diversidade de registros de representação semiótica e que, no entanto, essa variedade não é considerada no planejamento das atividades de ensino, produzindo obstáculos na aprendizagem do referido domínio do conhecimento.

Pelho (2003) também constatou essas mesmas dificuldades durante a realização de sua pesquisa com alunos do ensino médio. "As respostas apresentadas em linguagem natural, em sua maioria carece de clareza e rigor." (PELHO, 2003, p. 118).

7.4 Função de 1º grau – Conversão entre as representações gráfica, tabular, algébrica e língua natural

Esta última atividade de função do 1º grau foi aplicada nos dias 15 e 19 de maio em dois períodos de aula, respectivamente. Dos trinta alunos participantes, vinte e sete concluíram a tarefa, dois faltaram ao segundo encontro, deixando incompletas suas atividades, e um não esteve presente em nenhum desses dias.

A situação 9, da presente atividade, propôs o tratamento da representação algébrica, por meio da resolução do cálculo das raízes das equações. As últimas propostas, por sua vez, objetivaram a coordenação entre as representações gráfica e algébrica (situação 10), tabular e algébrica (situação 11) e linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica (situação12), mediante conversões.

Na atividade anterior, vimos que o zero ou a raiz de uma função $y = ax + b$ *com* $a \neq 0$ *é o valor de* x *que anula a função. Esse valor é dado pela raiz da equação* $ax + b = 0$*.*

Situação 9

Os gráficos de duas das funções abaixo interceptam-se em um mesmo ponto no eixo x. Identifica, algebricamente, as funções que determinam esses gráficos.

a) $y = x + 2$

b) $y = x + 4$

c) $y = 3x + 6$

d) $y = -2x + 2$

Os alunos não apresentaram dificuldades em realizar essa tarefa, visto que esse tipo de situação já havia sido trabalhado anteriormente. Desse modo, todos responderam a questão corretamente.

Situação 10

Geometricamente, o zero de uma função afim é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo x.

Constrói, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções da atividade1, utilizando o Excel.

A seguir, a Figura 25 apresenta os gráficos construídos na situação 10 por um discente:

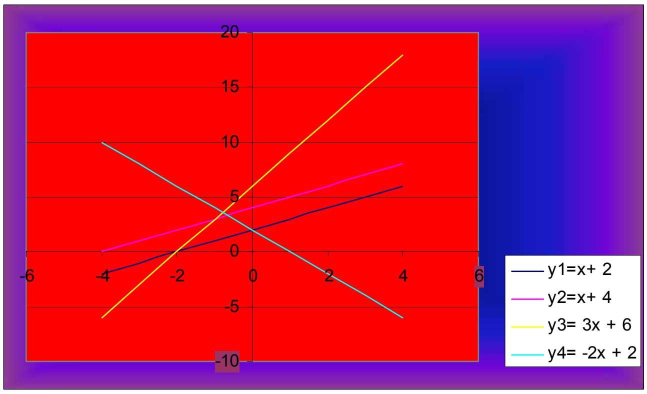


Figura 25 – Gráficos construídos por aluno – situação 10

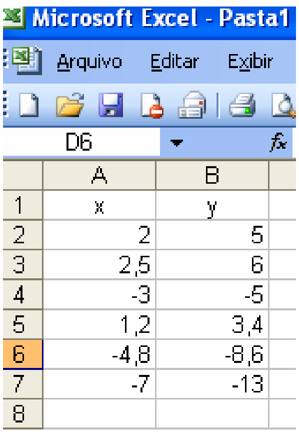
A partir análise dos gráficos construídos, responde:

Função	Para quais valores de x tem-se $y > 0$?	Para quais valores de x tem-se $y < 0$?
$y = x + 2$		
$y = x + 4$		
$y = 3x + 6$		
$y = -2x + 2$		

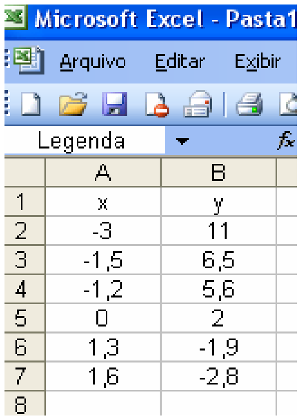
Vinte e três participantes completaram a tabela corretamente. Um trocou a variável independente x pela variável dependente y. Três discentes, no último item, não perceberam que a função era decrescente e analisaram de forma incorreta. Dois responderam todos os itens incorretamente.

Situação 11

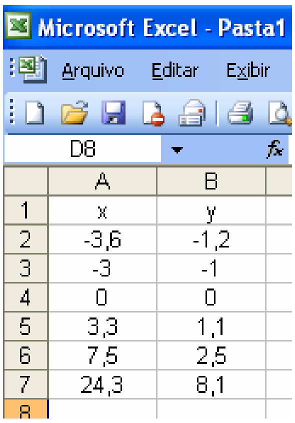
Nas tabelas abaixo, y é função de x. Em cada caso, descobre e escreve a fórmula para obter y.



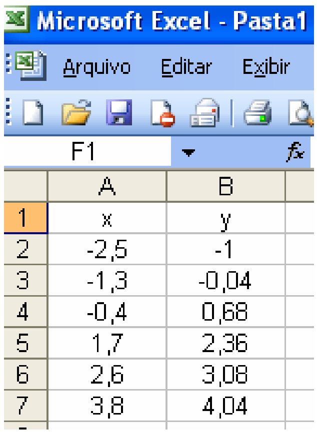
	A	B
1	x	y
2	2	5
3	2,5	6
4	-3	-5
5	1,2	3,4
6	-4,8	-8,6
7	-7	-13
8		



	A	B
1	x	y
2	-3	11
3	-1,5	6,5
4	-1,2	5,6
5	0	2
6	1,3	-1,9
7	1,6	-2,8
8		



	A	B
1	x	y
2	-3,6	-1,2
3	-3	-1
4	0	0
5	3,3	1,1
6	7,5	2,5
7	24,3	8,1
8		

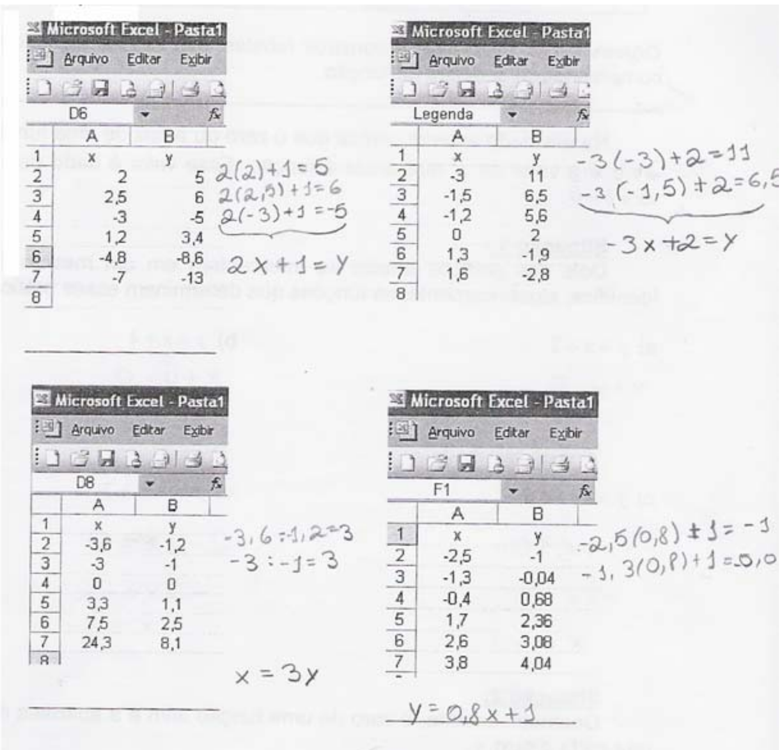


	A	B
1	x	y
2	-2,5	-1
3	-1,3	-0,04
4	-0,4	0,68
5	1,7	2,36
6	2,6	3,08
7	3,8	4,04

Num primeiro momento, os alunos, em sua maioria, se detinham à primeira linha de cada tabela a fim de descobrirem a lei de formação. Houve, então, a intervenção, por parte da pesquisadora e professora, questionando-os se a lei que havia sido escrita valia para as demais linhas. Em razão disso, os discentes perceberam que deveriam ter o cuidado de definir uma lei que fosse válida para todos os valores da tabela.

Essa décima primeira situação foi realizada por vinte e sete discentes: dois encontraram as leis de formação, fazendo cálculos na folha de registros; quatro fizeram uso dos recursos da planilha para descobrir todas as expressões algébricas; e os demais utilizaram o *software* apenas para determinar a última lei de formação. Ressalta-se, ainda, que um participante escreveu a lei da formação da segunda tabela de forma incorreta, baseando-se apenas em sua primeira linha.

A Figura 26 mostra os cálculos feitos por um estudante a fim de obter a lei de formação de cada uma das tabelas propostas.



	A	B
1	x	y
2	2	5
3	2,5	6
4	-3	-5
5	1,2	3,4
6	-4,8	-8,6
7	-7	-13

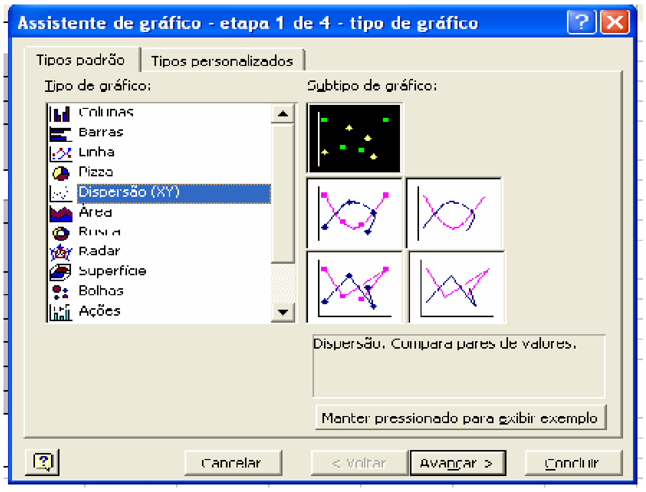
	A	B
1	x	y
2	-3	11
3	-1,5	6,5
4	-1,2	5,6
5	0	2
6	1,3	-1,9
7	1,6	-2,8

	A	B
1	x	y
2	-3,6	-1,2
3	-3	-1
4	0	0
5	3,3	1,1
6	7,5	2,5
7	24,3	8,1

	A	B
1	x	y
2	-2,5	-1
3	-1,3	-0,04
4	-0,4	0,68
5	1,7	2,36
6	2,6	3,08
7	3,8	4,04

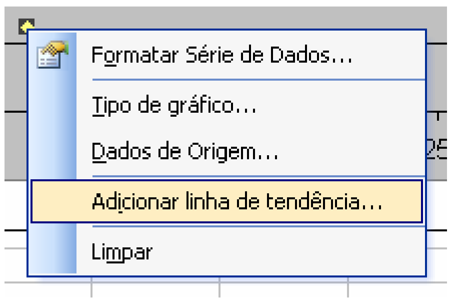
Figura 26 – Protocolo de registro de aluno – situação 11

Reproduz as tabelas acima na planilha e constrói seus respectivos gráficos. Para essa construção gráfica, utiliza a “Dispersão. Compara pares de valores”, conforme mostra a figura a seguir:

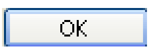


Caso não tenhas descoberto alguma das fórmulas, segue as seguintes instruções:

a) Posiciona a seta sobre a série de dados da função que desejas descobrir a lei de formação e clica no botão direito do mouse. A seguir, seleciona a opção ***Adicionar linha de tendência,*** *conforme mostra a figura abaixo:*



b) Na guia ***Tipo****, seleciona a "Tendência linear".*

c) *Clica no botão* 

.

d) Agora, posiciona a seta próxima à linha de tendência e clica, novamente, no botão direito do mouse. Após, escolhe a opção 

e, em seguida, na guia ***Opções****, seleciona "Exibir equação no gráfico". Automaticamente, o Excel mostrará a lei de formação da referida função.*

A seguir, na Figura 27, tem-se o gráfico construído na planilha por um dos estudantes a fim de que, com os recursos disponibilizados pelo *software*, se obtenha a expressão algébrica correspondente à função definida na última tabela da situação supracitada.

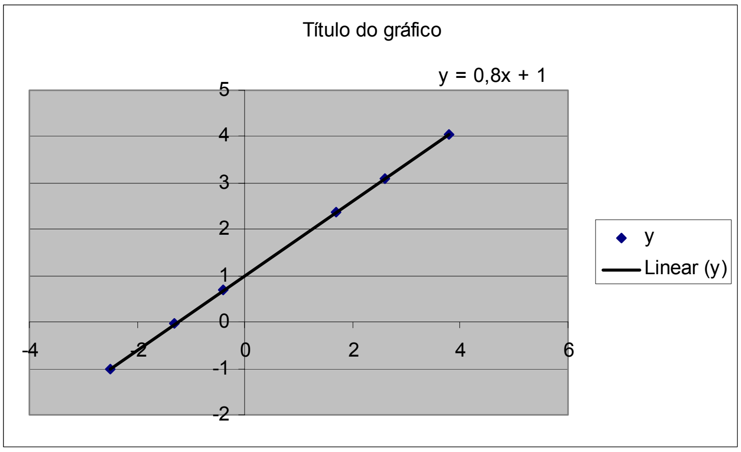


Figura 27 – Gráfico construído por aluno – situação 11 – tabela 4

Situação 12

Em um parque de diversões, existem duas formas de compra de bilhetes:

- *Bilhete especial: R$ 68,40 – com direito a brincar em todos os brinquedos quantas vezes quiser.*
- *Bilhete normal: R$ 5,70 – para brincar em cada brinquedo.*

Chama de x *o número de brinquedos (repetidos ou não) a serem utilizados por uma pessoa.*

a) Escreve a lei de cada função.

Todos os vinte e sete alunos escreveram corretamente a lei de formação nas duas possibilidades de compra de bilhete.

b) Constrói, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções do ***item a****. Para tanto, utiliza a planilha.*

Essa situação propiciou a discussão sobre as diferenças entre as funções que representam o bilhete especial e o normal. Os discentes não apresentaram dificuldades em compreender a função constante, pois afirmavam "não importar a quantidade de brinquedos, já que o valor a ser pago com o bilhete especial seria sempre o mesmo." Destaquei, então, que essa função é denominada constante, seu gráfico é paralelo ao eixo x, ou coincide com ele, e seu coeficiente angular é nulo.

Foram 77,7% os participantes que consideraram o domínio das funções o conjunto dos números naturais, utilizando a "Dispersão. Compara pares de valores" para a construção do gráfico solicitado. Ressalta-se, também, que o domínio das funções foi discutido anteriormente sem haver aprofundamento sobre o assunto, visto que essa pesquisa está sendo realizada com alunos da 8ª série, e esse tópico será aprofundado no ensino médio.

Um aluno construiu apenas o gráfico que representa a situação do bilhete normal.

A seguir, na Figura 28, tem-se um exemplo de construção gráfica e tabular feita por um dos participantes.

x	**p1=68,40**	**p2=5,70*x**
0	68,4	0
1	68,4	5,7
2	68,4	11,4
3	68,4	17,1
4	68,4	22,8
5	68,4	28,5
6	68,4	34,2
7	68,4	39,9
8	68,4	45,6
9	68,4	51,3
10	68,4	57
11	68,4	62,7
12	68,4	68,4
13	68,4	74,1
14	68,4	79,8

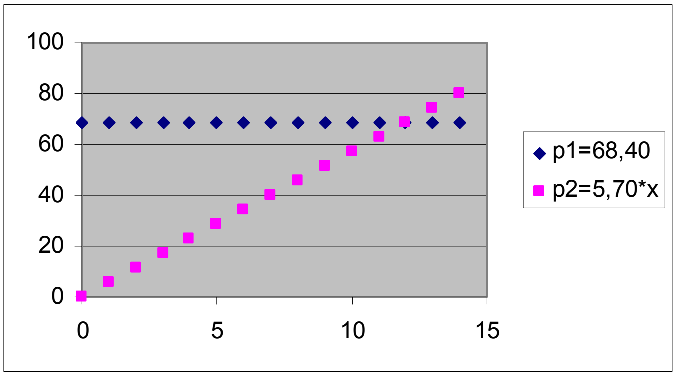
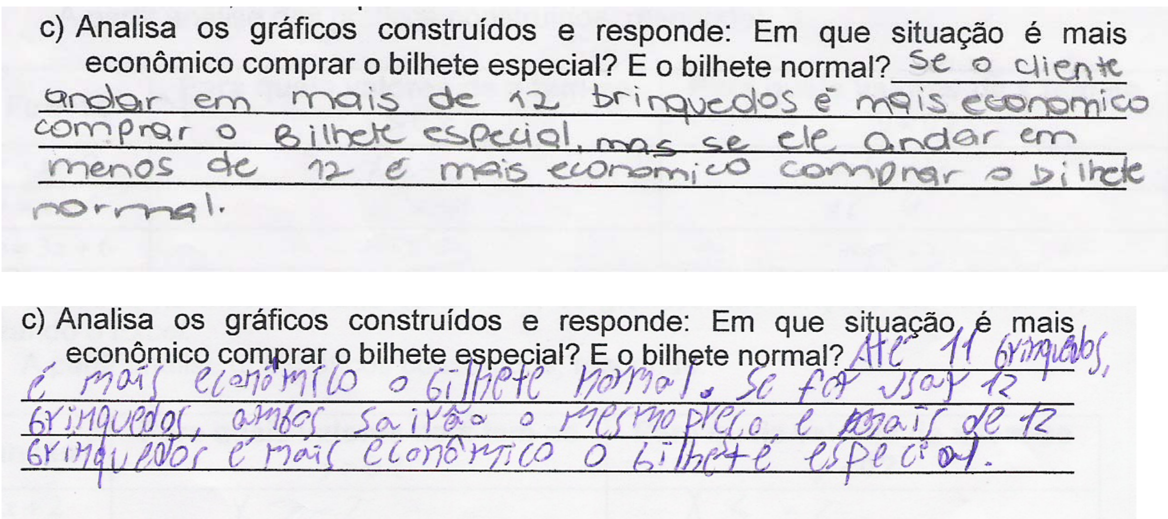


Figura 28 – Gráficos construídos por aluno – situação 12

c) Analisa os gráficos construídos e responde: Em que situação é mais econômico comprar o bilhete especial? E o bilhete normal?

Vinte e seis alunos responderam corretamente essa questão. A Figura 29 apresenta dois exemplos de respostas dadas.



c) Analisa os gráficos construídos e responde: Em que situação é mais econômico comprar o bilhete especial? E o bilhete normal? Se o cliente andar em mais de 12 brinquedos é mais economico comprar o Bilhete especial, mas se ele andar em menos de 12 é mais economico comprar o bilhete normal.

c) Analisa os gráficos construídos e responde: Em que situação é mais econômico comprar o bilhete especial? E o bilhete normal? Até 11 brinquedos, é mais econômico o bilhete normal. Se for usar 12 brinquedos, ambos sairão o mesmo preço, e mais de 12 brinquedos é mais econômico o bilhete especial.

Figura 29 – Protocolos de registro de alunos – situação 12

O mesmo discente que representou graficamente somente uma das situações respondeu corretamente o item c. Quando questionado sobre sua resposta, afirmou: “Basta analisar o gráfico do bilhete normal, pois o do bilhete especial é sempre o mesmo valor e, quando a tabela ou gráfico obtiver um valor acima de R$ 68,40, torna-se mais vantajosa a compra do bilhete especial.”

Destaca-se, ainda, que alguns alunos tinham construído suas tabelas com valores inferiores a doze, na coluna destinada ao número de bilhetes, e, para responder a referida questão, ampliaram suas tabelas, alterando o gráfico automaticamente. Outros, apenas ampliavam a tabela e já percebiam o número de brinquedos em que os valores do bilhete normal e do especial eram iguais e escreviam, a partir disso, suas conclusões.

Nessa última atividade, destinada ao trabalho com função afim, procurou-se proporcionar aos discentes a conexão entre os diferentes registros, de forma que os estudantes pudessem reconhecer um determinado objeto matemático através de suas diferentes representações, conforme preconiza Duval.

8 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES REFERENTES À FUNÇÃO DO 2º GRAU

Neste capítulo serão apresentadas as apreciações feitas a partir da produção dos participantes dessa pesquisa referentes a três atividades propostas para o desenvolvimento do conceito de função quadrática. As observações feitas pela pesquisadora-professora também foram consideradas na análise dos resultados.

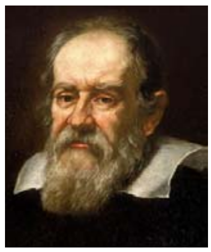
8.1 Conceito de função de 2º grau

A primeira atividade de função quadrática foi realizada pelos trinta discentes participantes, no dia 30 de junho de 2008, com duração de 50 minutos. Destaca-se que a escola trocou os computadores dos laboratórios de informática, bem como disponibilizou uma versão mais atualizada da planilha. Esse fato fez com que os alunos necessitassem, novamente, de se familiarizar com os novos recursos do *software* durante a realização dessa proposta. As questões constantes no roteiro da tarefa, e a apreciação das respostas dadas pelos discentes serão relatadas a seguir.

A presente atividade foi introduzida por meio do seguinte texto:

Situação 1

Galileu Galilei (1564-1642) foi um importante astrônomo italiano do início do século XVII que muito contribuiu com a matemática. Com apenas vinte e cinco anos de idade, Galileu era professor de matemática da Universidade de Pisa, na Itália. Durante o período em que ministrou suas aulas em Pisa, realizou diversas experiências públicas sobre o movimento de queda livre.



Certa vez, ele deixou cair dois pedaços de metal do alto da Torre de Pisa, sendo que um deles tinha uma massa dez vezes maior do que o outro. Contrariando a idéia de Aristóteles, segundo a qual um corpo, com maior massa, cairia mais *rapidamente, os dois pedaços se chocaram no chão praticamente no mesmo instante.*

Após vários experimentos, Galileu verificou que, desprezada a resistência do ar, todo corpo abandonado de uma altura próxima à superfície da Terra cai em queda livre, independentemente de seu tamanho, massa ou forma.

Em outras palavras, Galileu Galilei descobriu que a distância percorrida por um corpo em queda livre é função do tempo e que essa distância é dada pela seguinte expressão algébrica:

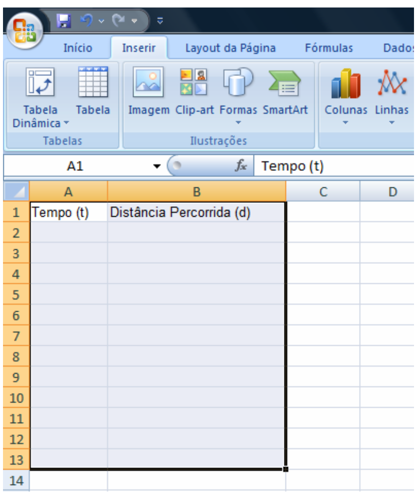
$$d(t) = \frac{1}{2} g t^2 \text{, em que:}$$

$d(t)$ *é a distância percorrida, em metros, pelo corpo até chegar ao chão;*

g *é a aceleração da gravidade na Terra, aproximadamente* $9{,}8\ m/s^2$*;*

t *é o tempo, em segundos, que o corpo demora para chegar ao chão.*

a) Constrói uma tabela na Planilha, conforme a figura a seguir, que relacione o tempo com a distância percorrida por um objeto em queda livre. Escolha, no mínimo, dez valores para a variável t*.*



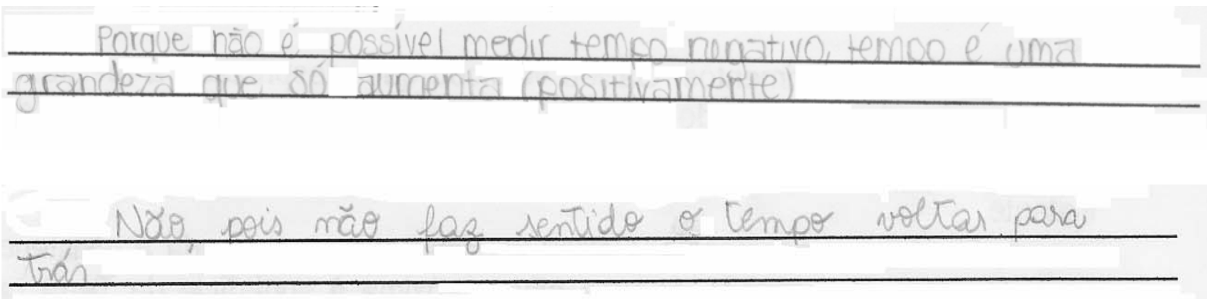
b) É possível considerarmos valores negativos para t nessa situação? Justifica tua resposta.

As respostas dadas foram agrupadas por semelhança e organizadas conforme a Tabela 19.

Tabela 19 – Distribuição das respostas do item b da situação 1

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Afirmaram que o tempo não pode ser medido por meio de números negativos, pois não retrocede	22	73,3
B – Afirmaram que o tempo é medido a partir do zero, utilizando-se números positivos	5	16,7
C – Afirmaram que não é possível considerar números negativos para a variável *t*, porém não justificaram	1	3,3
D – Responderam de forma incorreta	2	6,7
Total	30	100,0

A Figura 30, a seguir, apresenta dois exemplos de respostas que fazem parte da Categoria A:


Porque não é possível medir tempo negativo, tempo é uma
grandeza que só aumenta (positivamente)

Não, pois não faz sentido o tempo voltar para
trás

Figura 30 – Protocolos de registro de alunos – situação 1 – item b – Categoria A

Já a Figura 31 mostra um exemplo de resposta que representa a Categoria B.

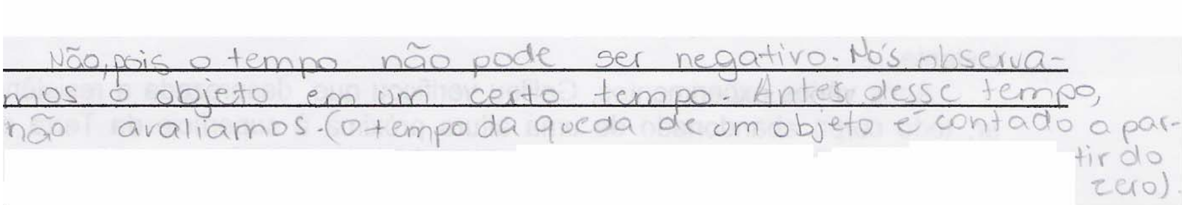

Não, pois o tempo não pode ser negativo. Nós observa-
mos o objeto em um certo tempo. Antes desse tempo,
não avaliamos. (o tempo da queda de um objeto é contado a par-
tir do
zero).

Figura 31 – Protocolo de registro de aluno – situação 1 – item b – Categoria B

Fazem parte da Categoria C as respostas que responderam de forma correta, mas sem apresentar justificativa e, na Categoria D, as respostas que consideraram, erroneamente, a variável *t* como distância percorrida.

c) Segue, abaixo, o roteiro para definir a fórmula que calcula a distância percorrida em função do tempo.

c_1) Seleciona a célula B2, digita o sinal de igualdade (=) e, logo a seguir, a respectiva fórmula. Lembra-te de que, na sintaxe do Excel, o sinal de multiplicação corresponde ao "asterisco" (*), e o sinal de potenciação, ao "acento circunflexo" (^).

c_2) Agora, seleciona a célula que contém a fórmula e, posicionando o cursor no seu canto inferior direito, arrasta-o até o fim da tabela.

Dos participantes, 66,6% escreveram a expressão algébrica que representava a distância percorrida, no movimento de queda livre, utilizando a fórmula $d(t) = 4{,}9t^2$, 16,7% representaram-na como $d(t) = 0{,}5.9{,}8t^2$, e o restante utilizou-a da forma como foi apresentada no texto. Verifica-se, portanto, que 83,3% dos discentes fizeram a conversão da representação fracionária para a decimal. Para Duval (1993), essas escritas que representam um mesmo número têm significação operatória diferente, uma vez que não são os mesmos tratamentos a serem utilizados para efetuar as operações em cada um dos referidos registros de representação. O mesmo autor destaca, ainda, que estudantes podem facilmente efetuar a adição de dois números na forma decimal ou fracionária e não conseguem converter a escritura decimal em fracionária e vice-versa.

d) Ao dobrar o tempo de queda, o que ocorre com a variável distância?

e) E, quando quadruplica o tempo, o que ocorre com a distância?

Todos os estudantes, participantes dessa investigação, responderam corretamente os itens acima, o que variou entre eles foi a forma utilizada para calcular esses valores. Desses, 60% dividiram a distância percorrida quando $t = 2$ pela distância quando $t = 1$ para responder o primeiro item e, no segundo item, empregaram o mesmo raciocínio, utilizando os recursos da planilha.

A Figura 32 mostra que o discente dividiu o valor da célula B18 ($d(8)$) por B6 ($d(2)$) para determinar o valor do fato de aumento ao quadruplicar o tempo.

C18 f_x =B18/B6

	A	B	C
1	tempo	distância percorrida	
2	0	0	
3	0,5	1,225	
4	1	4,9	
5	1,5	11,025	
6	2	19,6	4
7	2,5	30,625	
8	3	44,1	
9	3,5	60,025	
10	4	78,4	
11	4,5	99,225	
12	5	122,5	
13	5,5	148,225	
14	6	176,4	
15	6,5	207,025	
16	7	240,1	
17	7,5	275,625	
18	8	313,6	16

Figura 32 – Protocolo de registro de aluno – situação 1 – item e

Alguns discentes utilizaram a calculadora disponível em outro programa para realizar cálculos semelhantes aos que foram feitos na planilha. Outros, ainda, fizeram uso do cálculo mental para determinar suas respostas. Esse fato foi percebido pela pesquisadora, ao questionar, oralmente, alguns dos alunos quanto as suas conclusões, durante a realização da tarefa. E, conseqüentemente, não foi possível determinar o percentual de estudantes que utilizaram tal recurso.

f) Ao multiplicarmos o valor do tempo por determinado fator, por quanto deveremos multiplicar a distância percorrida a fim de mantermos a correspondência?

Verificou-se que 90% dos estudantes concluíram que, ao multiplicar o valor do tempo por um determinado fator, a distância percorrida será multiplicada pelo quadrado desse fator.

g) A distância percorrida por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao _______________ do tempo que esse corpo leva para chegar ao chão.

Constatou-se que 83,3% dos participantes responderam corretamente a questão acima, 10% responderam de forma incorreta, e 6,7% não completaram a lacuna. Salienta-se que esses 16,7% haviam respondido de forma apropriada a questão anterior.

h) De acordo com a função estabelecida por Galileu, qual a distância percorrida por um objeto em queda livre, que demorou $1{,}5\,s$ para chegar ao chão? Escreve o cálculo correspondente.

Todos os alunos responderam corretamente essa pergunta, entretanto 10% não escreveram o cálculo correspondente. Ressalta-se que poucos discentes necessitaram de auxílio por parte da pesquisadora-professora para responder esse item; ao passo que, na próxima questão, vários estudantes solicitaram ajuda para compreender o que estava sendo pedido.

i) Supondo que um objeto foi largado a uma altura de $78{,}4\,m$*, quanto tempo ele leva para atingir o chão? Novamente, escreve o cálculo correspondente.*

Todos os integrantes dessa pesquisa responderam de maneira adequada essa questão, sendo que 76,7% apresentaram seus cálculos, conforme mostra a Figura 33, 16,7% não mostraram as contas necessárias e 6,6% aplicaram a $f(t)$ para mais de um valor de t até encontrarem a altura solicitada.

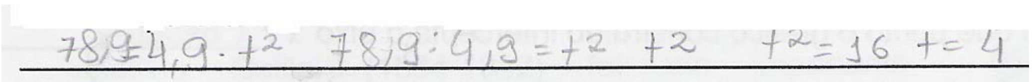
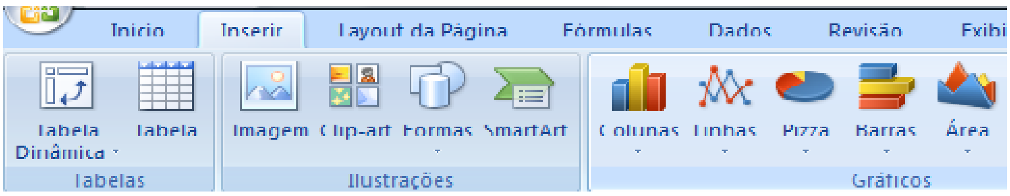


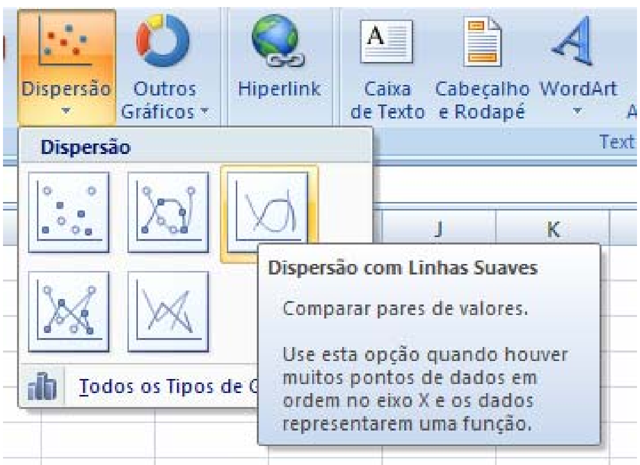
Figura 33 – Protocolo de registro de aluno – situação 1 – item i

*j) A partir da tabela do **item a**, constrói o gráfico que representa essa situação no Excel, seguindo o seguinte roteiro:*

*j_1) Seleciona toda tabela. Em seguida, no menu **Inserir**, clica na opção **Dispersão**, conforme mostra a figura abaixo:*

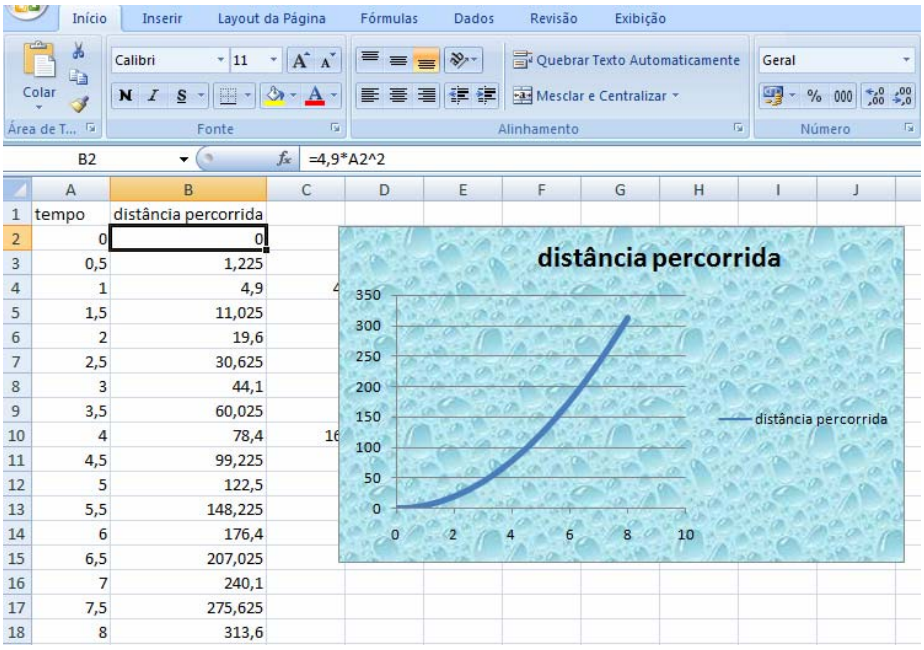


j_2) Em "Dispersão", seleciona a opção "Dispersão com Linhas Suaves".



j_3) Se quiseres, podes formatar a área de plotagem, as linhas de grade ou a série de dados, posicionando o cursor sobre a área a ser modificada, clicando no botão da direita do mouse e selecionando um dos seguintes itens: Formatar Área de Plotagem... , Formatar Linhas de Grade... *ou* Formatar Série de Dados...

A Figura 34, a seguir, ilustra dois tipos de conversões da escrita fracionária para decimal, realizadas pelos discentes em suas fórmulas, bem como as representações tabular e gráfica da função quadrática, que representa a distância percorrida no movimento de queda livre.



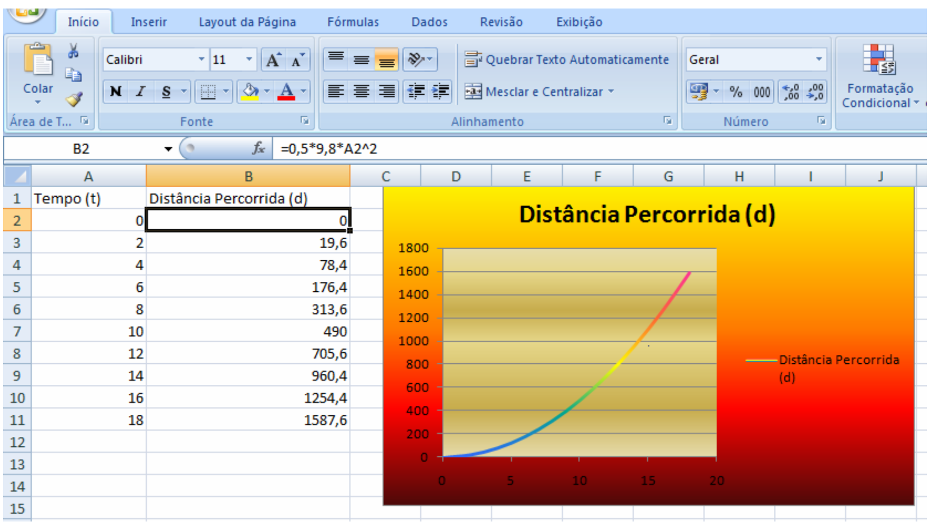


Figura 34 – Expressões algébricas, tabelas e gráficos construídos por alunos – situação 1

De maneira geral, os participantes não apresentaram dificuldades na construção gráfica, utilizando essa nova versão da planilha. A maioria procurou personalizar seus gráficos, utilizando as dicas do item j_3. Constatou-se, também, que os alunos têm procurado ler o roteiro, utilizando os recursos disponibilizados pelo respectivo *software* de maneira autônoma. Seus questionamentos concentram-se no entendimento das questões e não na utilização do programa. Percebeu-se que tal fato não era notado no início desse trabalho investigativo.

O gráfico de uma função quadrática é chamado de ***parábola****. Nessa primeira situação, podemos considerar, apenas, os valores positivos para t, isto é, t varia no conjunto dos números reais positivos.*

<u>Situação 2</u>

a) Se não houvesse essa restrição, como ficaria o gráfico?

Dica: *Para responder essa questão, constrói na Planilha o gráfico da função $y = 4{,}9x^2$, com x variando no conjunto dos números reais.*

Apenas um aluno não construiu o gráfico solicitado, porém respondeu as questões referentes a essa situação. Os demais construíram corretamente o gráfico solicitado e, sem exceção, elaboraram as tabelas com os valores de x, variando num intervalo simétrico em relação à origem.

Num primeiro momento, os estudantes tiveram dificuldade em compreender o significado da palavra restrição nesse contexto. Para tanto, foi proporcionada uma discussão sobre o sentido dessa palavra em diversos contextos, fazendo uso de seus sinônimos e, então, a análise de seu significado na situação mencionada.

A Figura 35 exemplifica a construção gráfica, tabular e algébrica dessa segunda proposta:

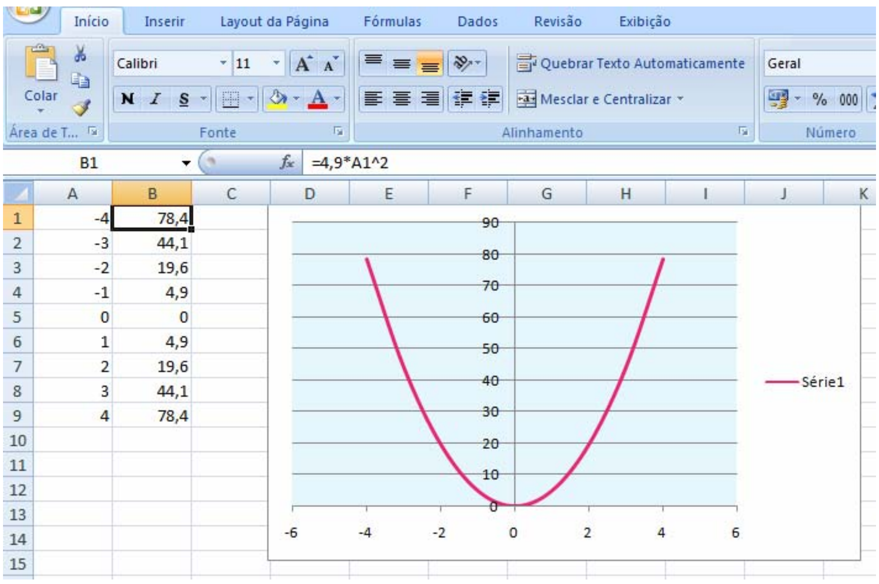


Figura 35 – Expressão algébrica, tabela e gráfico construídos por aluno – situação 2

As respostas da primeira questão da situação 2 foram organizadas e categorizadas, conforme mostra a Tabela 20:

Tabela 20 – Distribuição das respostas do item a da situação 2

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Reconheceram que o gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas e analisaram o decrescimento e crescimento da função	2	6,7%
B – Reconheceram que o gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas	19	63,3%
C – Analisaram o decrescimento e crescimento da função	6	20%
D – Reconheceram que o gráfico é uma parábola	1	3,3%
E – Responderam de forma incorreta	2	6,7%
Total	30	100,0

Na categoria A, foram agrupadas as respostas que fizeram referência à existência de simetria axial, pelo reconhecimento do eixo das ordenadas como sendo um eixo de simetria, além disso essas respostas reconheceram que a função é decrescente para os valores de x pertencentes ao conjunto dos números reais negativos $\left(x \in \Re^{-}\right)$ e crescente para os valores de x pertencentes ao conjunto dos números reais positivos $\left(x \in \Re^{+}\right)$.

A Categoria B foi, por seu turno, composta pelas respostas que apenas identificaram que o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

Já, na Categoria C, estavam presentes as respostas que analisaram o crescimento e decrescimento da referida função.

Houve apenas um representante da Categoria D, que se limitou a responder que "o gráfico ficaria em forma de 'U'".

Fizeram parte da última categoria as respostas que reconheceram a simetria axial, porém identificaram o eixo de simetria de forma incorreta.

b) Em que ponto o gráfico construído intercepta o eixo x?

Todos os participantes responderam corretamente essa questão, determinando as coordenadas do respectivo ponto.

c) Para quais valores de x tem-se a função $y = 4{,}9x^2$ decrescente?

d) E para quais valores de x essa função é crescente?

Vinte e nove alunos (96,7%) responderam corretamente essas duas últimas questões. Destaca-se que 58,6% dos referidos discentes utilizaram-se da linguagem algébrica para determinar os valores em que essa função é crescente ou decrescente. Enquanto que 38,1% fizeram uso da linguagem natural para responder a esses itens. Apenas um aluno (3,3%) respondeu de forma inadequada.

Para Duval (1993), não é possível negligenciar a língua natural no processo do ensino da matemática, esse tipo de registro é tão importante quanto os demais.

8.2 Função de 2º grau – Análise das alterações gráficas, a partir da modificação dos parâmetros da expressão algébrica

Apresenta-se, a seguir, a análise dos dados coletados durante a realização da segunda atividade de função quadrática, realizada por vinte e nove estudantes participantes dessa pesquisa, e aplicada nos dias 11 e 18 de agosto com duração de 1 hora e 40 minutos. Essa tarefa visou, a partir da apreciação gráfica e paramétrica, ao reconhecimento, por parte dos discentes, de pontos notáveis da parábola: vértice, intersecção com o eixo das ordenadas e abscissas, bem como à análise do sinal das funções. Neste primeiro momento, as situações propostas objetivaram a observação e a descrição das características dos gráficos e das expressões algébricas, a dedução desses pontos notáveis foi proposta na atividade posterior.

O roteiro inicia com apresentação da definição de função quadrática.

*Uma função chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** quando, para todo $x \in \Re$, tem-se $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.*

A partir disso, foi solicitada a construção de seis diferentes gráficos de função de 2º grau, com base em tabelas pré-definidas. Optou-se por determinar alguns pontos do domínio para que os discentes calculassem, com auxílio do *software*, as respectivas imagens e, então, pudessem visualizar nos gráficos os pontos notáveis das referidas funções. Duas dessas parábolas interceptam o eixo das abscissas em dois pontos distintos, duas tangenciam esse eixo, e outras duas não o interceptam. Em cada uma dessas representações gráficas, tem-se um exemplo com concavidade voltada para cima e outra para baixo.

<u>Situação 3</u>

a) Utiliza o Excel para construir os gráficos das seguintes funções, a partir das respectivas tabelas.

a₁) $y = -2x^2 + 8$

	A	B
1	x	y=-2x²+8
2	-4	
3	-3	
4	-2	
5	-1	
6	0	
7	1	
8	2	
9	3	
10	4	
11		

a₂) $y = x^2 - 6x + 11$

	A	B
16	x	y=x²-6x+11
17	-1	
18	0	
19	1	
20	2	
21	3	
22	4	
23	5	
24	6	
25	7	

a₃) $y = -x^2 + 10x - 25$

	A	B
34	x	y=-x²+10x-25
35	1	
36	2	
37	3	
38	4	
39	5	
40	6	
41	7	
42	8	
43	9	

a₄) $y = x^2 - 6x$

	A	B
49	x	y=x²-6x
50	-1	
51	0	
52	1	
53	2	
54	3	
55	4	
56	5	
57	6	
58	7	

a₅) $y = x^2 + 6x + 9$

	A	B
64	x	y=x²+6x+9
65	-7	
66	-6	
67	-5	
68	-4	
69	-3	
70	-2	
71	-1	
72	0	
73	1	

a₆) $y = -2x^2 - 1$

	A	B
79	x	y=-2x²-1
80	-4	
81	-3	
82	-2	
83	-1	
84	0	
85	1	
86	2	
87	3	
88	4	

De maneira geral, os discentes realizaram a primeira proposta com facilidade. Apenas, na tarefa de determinação da fórmula para calcular as imagens do gráfico do item a_3, na sintaxe da planilha, os alunos solicitaram auxílio, visto que era necessário colocar parênteses na variável quadrática, a fim de que o *software* calculasse, primeiramente, o valor de x^2 para, então, multiplicar por -1, respeitando, dessa forma, a ordem das operações matemáticas.

A Figura 36 exemplifica as representações gráficas e tabulares das funções solicitadas no primeiro item feitas por um dos participantes:

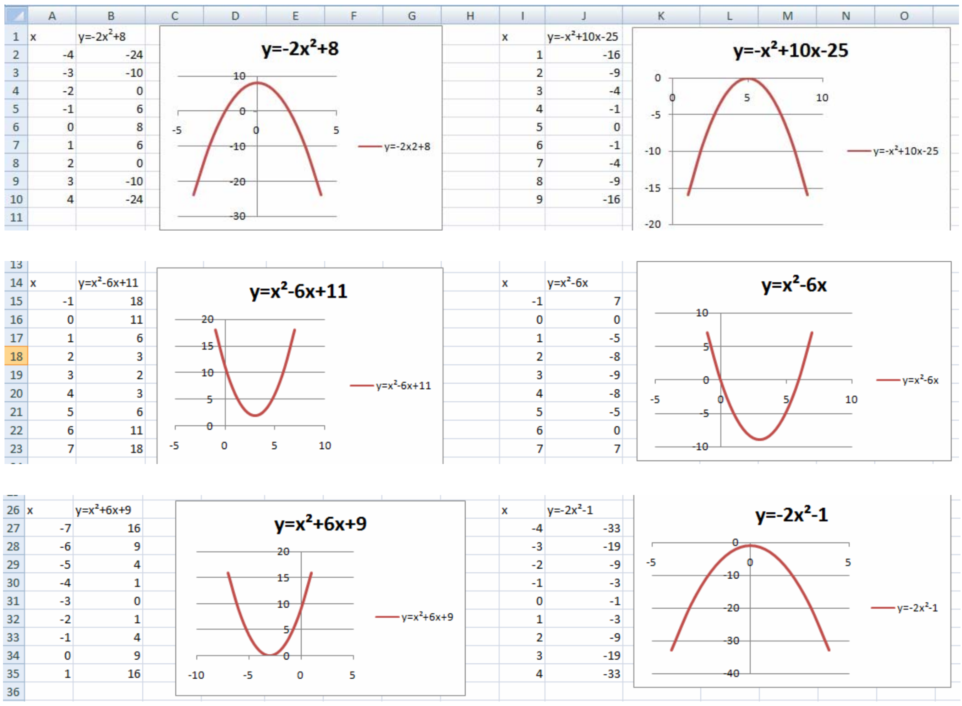


Figura 36 – Tabelas e gráficos construídos por aluno – situação 3

b) Denominamos vértice da parábola o ponto que a separa em duas partes: uma sempre crescente e outra sempre decrescente. Em cada uma das funções acima, analisa o gráfico construído e determina as coordenadas do vértice.

b₁) $y = -2x^2 + 8$

b₂) $y = x^2 - 6x + 11$

b₃) $y = -x^2 + 10x - 25$

b₄) $y = x^2 - 6x$

b₅) $y = x^2 + 6x + 9$

b₆) $y = -2x^2 - 1$

A maioria dos discentes identificou com facilidade o vértice de cada uma das parábolas, utilizando os recursos da planilha (cursor) e reconheceu que, dependendo da concavidade da mesma, esse é o ponto máximo ou mínimo da função. Esse último aspecto foi percebido, por meio das discussões feitas no grupo, durante a realização dessa questão.

Responderam corretamente todos os itens dessa questão 79,3% dos participantes, os demais responderam de forma correta a algumas categorias requeridas pelas perguntas.

c) Existe algum eixo de simetria nas parábolas construídas anteriormente? Em caso afirmativo, explica qual é esse eixo.

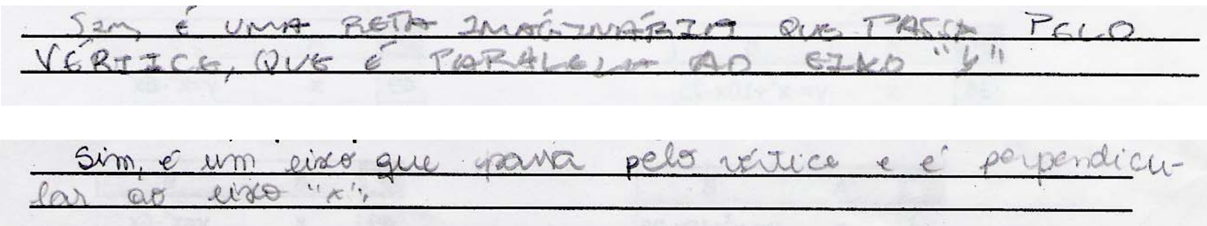
As respostas a esse questionamento foram organizadas em categorias, conforme mostra a Tabela 21 a seguir:

Tabela 21 – Distribuição das respostas do item c da situação 3

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Definiram o eixo de simetria como uma reta que intercepta o vértice e é paralela ao eixo das ordenadas	14	48,3
B – Definiram o eixo de simetria como uma reta que intercepta o vértice e é perpendicular ao eixo das abscissas	2	6,9
C – Identificaram que o eixo de simetria intercepta o vértice	6	20,7
D – Reconheceram que o eixo de simetria intercepta a parábola e é paralelo ao eixo das ordenadas	1	3,4
E – Reconheceram que o eixo de simetria é paralelo ao eixo das ordenadas	2	6,9
F – Responderam de forma incorreta	4	13,8
Total	29	100,0

A maioria dos estudantes reconheceu a existência de um eixo de simetria na parábola, no entanto, o que variou nas respostas foi a forma de defini-lo.

Nas duas primeiras categorias, a definição foi escrita de forma precisa. A seguir, na Figura 37, são apresentados dois exemplos de respostas das Categorias A e B, respectivamente.


SIM, É UMA RETA IMAGINÁRIA QUE PASSA PELO VÉRTICE, QUE É PARALELA AO EIXO "Y"

Sim, é um eixo que passa pelo vértice e é perpendicular ao eixo "x".

Figura 37 – Protocolo de registro de alunos – situação 3 – item c – Categorias A e B

As respostas que compõem as Categorias C, D e E são incompletas. Na Categoria C, os respondentes limitaram-se a reconhecer que o eixo de simetria intercepta a parábola no vértice, sem demonstrar de que forma há essa interseção, dando margem a várias possibilidades. Enquanto, na Categoria D, encontram-se as respostas que não identificaram as coordenadas do ponto de intersecção do eixo de simetria com a parábola, mas reconheceram que há um ponto de interseção e que esse eixo é paralelo ao eixo y. Na Categoria E, têm-se as respostas que apenas fizeram menção ao paralelismo existente entre o eixo de simetria e o eixo das ordenadas, sem o reconhecimento de que o mesmo intercepta o gráfico da função quadrática em algum ponto. Na última categoria, encontram-se as respostas incorretas.

Verificou-se que 51,7% dos participantes apresentaram, em seus registros em língua natural, dificuldades em elaborar uma definição precisa do eixo de simetria de uma parábola, apresentando, em 37,9% dos registros escritos, descrições incompletas.

De maneira análoga, em uma pesquisa realizada com alunos da Licenciatura em Matemática, na Disciplina de Cálculo, Mariani (2006) organizou atividades baseadas no conceito de função, que partiam de seu registro gráfico em direção aos demais, privilegiando o registro em língua natural. Através da análise desses protocolos, constatou-se que esses discentes, também, apresentavam muitas dificuldades na elaboração rigorosa de suas argumentações.

Mariani (2006, p. 202) ainda afirma que:

> O registro da língua natural, em específico, mostrou-se extremamente adequado para uma pesquisa que vise a identificar os conhecimentos dos alunos, pois, por meio dele, foram reveladas muitas concepções que, geralmente, ficam "mascaradas" por algoritmos mecânicos e convencionais, que "transmitem" aos alunos a impressão de que "estão sabendo" o que estão fazendo.

d) Tu deves ter verificado que a parábola sempre intercepta o eixo das ordenadas em apenas um ponto. Determina, em cada gráfico, as coordenadas do ponto de intersecção da parábola com o eixo y*.*

d_1) $y=-2x^2+8$

d_2) $y=x^2-6x+11$

d_3) $y=-x^2+10x-25$

d_4) $y=x^2-6x$

d_5) $y=x^2+6x+9$

d_6) $y=-2x^2-1$

Ao resolver o primeiro item dessa questão, os discentes perceberam que o ponto de interseção com o eixo das ordenadas era o mesmo que o do vértice e, vários deles, fizeram uma conjectura: esses pontos tinham as mesmas coordenadas para todas as funções. Em decorrência desse fato, os estudantes foram questionados, pela professora-pesquisadora, se, na segunda função, a partir da análise de seu respectivo gráfico também esses pontos iriam coincidir. Ao identificarem que os pontos não eram iguais, os alunos analisaram as demais representações gráficas de cada uma das funções propostas. 72,4% desses discentes acertaram todos os itens da referida questão; 10,3% ainda determinaram, erroneamente, as coordenadas do ponto de intersecção com o eixo y como sendo as coordenadas do vértice nos itens d_2, d_3, d_4 e d_5. Outros 10,3% responderam de forma incorreta apenas para a função $y=-x^2+10x-25$, visto que sua representação gráfica não permitia a visualização desse ponto. E, finalmente, 7% dos respondentes analisaram de forma incorreta os itens d_3 e d_5, apresentando, nesses casos, as coordenadas do ponto de tangência com o eixo das abscissas.

e) O que as coordenadas do ponto de intersecção da parábola com o eixo y *têm em comum?*

Dos vinte e nove protocolos de registros apreciados, 70% reconheceram que a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0;c)$, conforme exemplifica a Figura 38.

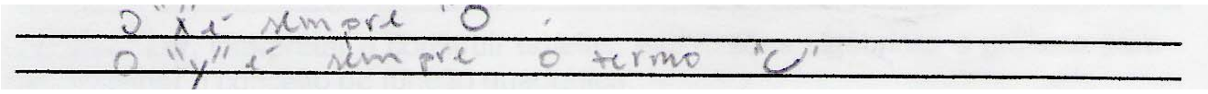


Figura 38 – Protocolo de registro de aluno – situação 3 – item e

Já 20,7% reconheceram que a abscissa desse ponto de interseção é sempre zero e não fizeram menção a sua ordenada como mostra o exemplo da Figura 39.

Figura 39 – Protocolo de registro de aluno – situação 3 – item e

Responderam de forma incorreta 10,3% dos discentes.

f) A parábola pode interceptar o eixo das abscissas em dois ou, em um ponto ou, ainda, não interceptar esse eixo. Esses pontos de intersecção com o eixo das abscissas são denominados de zeros da função

Determina os zeros de cada uma das funções abaixo, caso ele(s) exista(m).

f₁) $y = -2x^2 + 8$

f₂) $y = x^2 - 6x + 11$

f₃) $y = -x^2 + 10x - 25$

f₄) $y = x^2 - 6x$

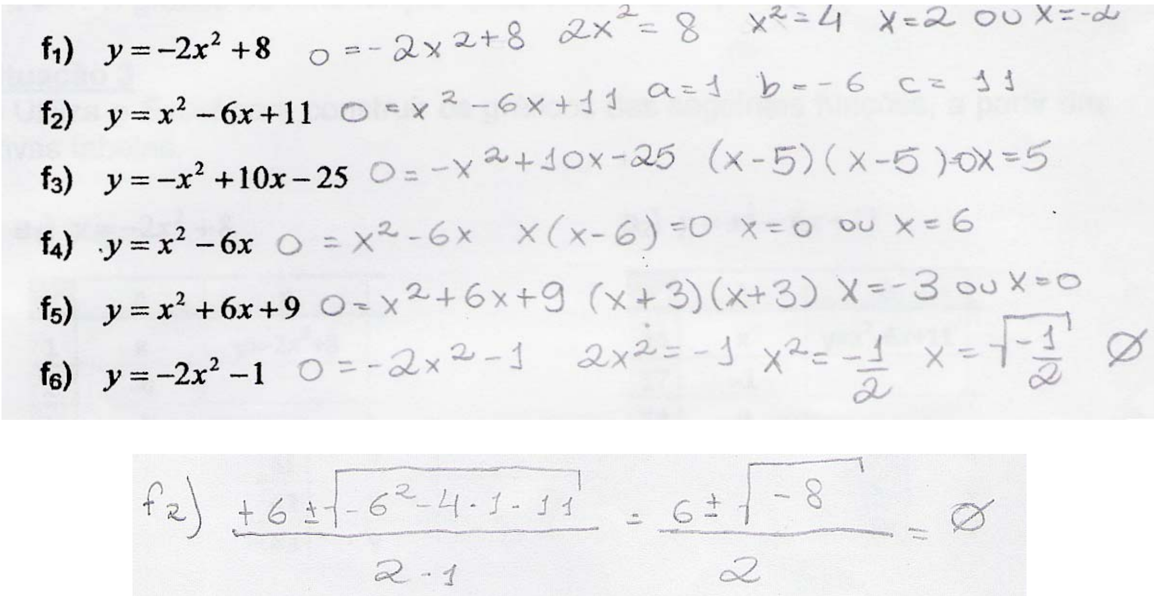
f₅) $y = x^2 + 6x + 9$

f₆) $y = -2x^2 - 1$

Essa questão foi respondida por 75,8% dos participantes mediante a análise gráfica, isto é, por meio do tratamento da representação gráfica da função. Desses 59% responderam corretamente todos os itens da questão, enquanto 4,5% afirmaram erroneamente que as funções dos itens f_3 e f_5 não interceptavam o eixo das abscissas. Com efeito, as referidas funções são tangentes ao eixo x. Ocorreram uma ou duas respostas incorretas em 27,5% dos protocolos analisados, e 9% dos estudantes responderam incorretamente a todos os itens.

Já 24,1% fizeram uso da conversão da representação gráfica para a algébrica, resolvendo as equações para $f(x) = 0$. Desse grupo que estabeleceu a conversão, 14,2% (o que corresponde a um estudante de um total de sete) não conseguiram concluir a questão, faltando três dos itens propostos, e os demais foram respondidos corretamente.

A Figura 40 mostra a resolução algébrica de um desses discentes. Nessa resolução, o aluno considerou, de forma incorreta, que a função f_5 intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos.



f₁) $y=-2x^2+8$ $0=-2x^2+8$ $2x^2=8$ $x^2=4$ $x=2$ ou $x=-2$

f₂) $y=x^2-6x+11$ $0=x^2-6x+11$ $a=1$ $b=-6$ $c=11$

f₃) $y=-x^2+10x-25$ $0=-x^2+10x-25$ $(x-5)(x-5)=0$ $x=5$

f₄) $y=x^2-6x$ $0=x^2-6x$ $x(x-6)=0$ $x=0$ ou $x=6$

f₅) $y=x^2+6x+9$ $0=x^2+6x+9$ $(x+3)(x+3)$ $x=-3$ ou $x=0$

f₆) $y=-2x^2-1$ $0=-2x^2-1$ $2x^2=-1$ $x^2=-\frac{1}{2}$ $x=\sqrt{-\frac{1}{2}}$ $\varnothing$

f2) $\frac{+6\pm\sqrt{-6^2-4\cdot1\cdot11}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{-8}}{2}=\varnothing$

Figura 40 – Protocolo de registro de aluno – situação 3 – item f

g) Além disso, a parábola pode ter sua concavidade ou abertura voltada para cima ou para baixo. Observa os gráficos construídos e responde: a concavidade de uma parábola depende do quê?

Segue, na Tabela 22, a distribuição das respostas segundo as categorias.

Tabela 22 – Distribuição das respostas do item g da situação 3

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Determinaram para quais valores de a a parábola tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo	13	44,8
B – Reconheceram que a concavidade da parábola depende do coeficiente a	7	24,2
C – Responderam de forma incorreta	5	17,2
D – Não responderam	4	13,8
Total	29	100,0

Fazem parte da Categoria A as respostas que explicitam que a concavidade da parábola é voltada para cima, se o coeficiente a for positivo, e para baixo, se a for negativo. Já, na Categoria B, os respondentes identificaram que a concavidade da parábola está relacionada ao coeficiente do termo quadrático, sem explicar como é essa relação.

Na Categoria C estão presentes as respostas com argumentações incorretas, tais como: “Se o valor é positivo ou negativo”. Tal afirmação não aponta qual valor está sendo mencionado.

Quatro discentes não responderam a questão.

*h) A partir dos gráficos construídos no **item a**, analisa para quais valores de x cada uma das funções é positiva e/ou negativa e completa a tabela abaixo:*

Função	***Para quais valores de x tem-se $y > 0$?***	***Para quais valores de x tem-se $y < 0$?***
h₁) $y = -2x^2 + 8$		
h₂) $y = x^2 - 6x + 11$		
h₃) $y = -x^2 + 10x - 25$		
h₄) $y = x^2 - 6x$		
h₅) $y = x^2 + 6x + 9$		
h₆) $y = -2x^2 - 1$		

Dos vinte e nove alunos que realizaram essa atividade, 20,7% responderam corretamente a todos os itens, fazendo uso da língua natural para determinar para quais valores de x cada uma das funções é positiva e/ou negativa, conforme exemplifica a Figura 41:

Função	**Para quais valores de x tem-se $y>0$?**	**Para quais valores de x tem-se $y<0$?**
$y=-2x^2+8$	entre -2 e 2	menor que -2 e maior que 2.
$y=x^2-6x+11$	é sempre positivo	nunca
$y=-x^2+10x-25$	nunca.	menor ou maior que 5.
$y=x^2-6x$	menor que 0 ou maior que 6	entre 0 e 6.
$y=x^2+6x+9$	menor ou maior que -3.	nunca
$y=-2x^2-1$	nunca	é sempre negativo

Figura 41 – Protocolo de registro de aluno – situação 3 – item h

Outros 24,1% responderam de forma correta os itens h_1, h_2, h_4 e h_6 e, nas funções $y = -x^2 + 10x - 25$ *e* $y = x^2 + 6x + 9$, não consideraram que essas são tangentes ao eixo das abscissas e, portanto, $y = 0$ para $x = 5$ e $x = -3$ respectivamente; ao passo que 10,3% tiveram o mesmo tipo de raciocínio em apenas uma das duas funções destacadas. Analisaram incorretamente, apenas a função $y = x^2 - 6x$, 6,9% dos estudantes. Responderam de forma incorreta essa questão 24,1% dos respondentes, e 13,8% não a realizaram.

Essa atividade proporcionou aos estudantes situações de aprendizagem que objetivaram a análise das regularidades na função quadrática, bem como a comunicação dessas por meio da linguagem natural escrita e oral.

Lopes (2003, p. 91) corrobora essa idéia, ao afirmar que: “A procura de regularidades, a compreensão e a forma de comunicação dessas regularidades são tarefas importantes no estudo dos mecanismos que ocorrem na natureza.”

8.3 Função de 2º grau – Dedução dos pontos notáveis

A presente atividade objetivou a dedução algébrica dos pontos notáveis de uma função quadrática. Para tanto, retomou-se, com os alunos, que o termo independente determina o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas, o ponto de máximo ou de mínimo indica o intervalo que a função é crescente ou decrescente e que as raízes estão relacionadas com os pontos de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas. Ressaltou-se, ainda, que esses últimos pontos são determinados a partir da resolução de uma equação do 2º grau, estabelecendo, dessa forma, a conexão desse tópico com a determinação dos zeros da função.

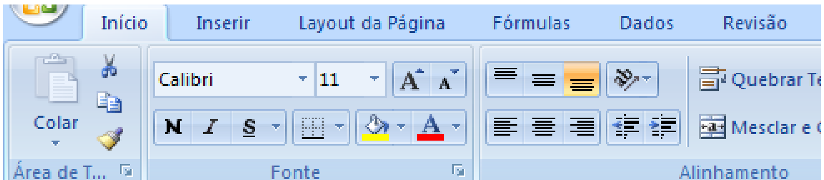
Essa tarefa foi aplicada nos dias 15, 22 e 29 de setembro, totalizando 2 horas e 30 minutos para a realização das quinze questões que a compõem. Quatro participantes dessa pesquisa faltaram a um dos três períodos disponibilizados para a realização da atividade. Conseqüentemente, seus protocolos de registros ficaram incompletos.

<u>Situação 4</u>

Interseção com o eixo das ordenadas

a) Constrói, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções: $y_1 = x^2 - 7x + 15,5$ *,* $y_2 = x^2 - 5$ *,* $y_3 = -x^2 + 25$ *e* $y_4 = -3x^2 - 2x - 12,7$ *, utilizando a planilha.*

Para tanto, reproduz a tabela a seguir:



	A	B	C	D	E
1	x	$y_1=x^2-7x+15,5$	$y_2=x^2-5$	$y_3=-x^2+25$	$y_4=-3x^2-2x-12,7$
2	-6				
3	-5				
4	-4				
5	-3				
6	-2				
7	-1				
8	0				
9	1				
10	2				
11	3				
12	4				
13	5				
14	6				

A Figura 42 exemplifica o trabalho realizado na planilha por um dos discentes.

E2 =-3*A2^2-2*A2-12,7

	A	B	C	D	E
1	x	y1=x²-7x+15,5	y2=x²-5	y3=-x²+25	y4=-3x²-2x-12,7
2	-6	93,5	31	-11	-108,7
3	-5	75,5	20	0	-77,7
4	-4	59,5	11	9	-52,7
5	-3	45,5	4	16	-33,7
6	-2	33,5	-1	21	-20,7
7	-1	23,5	-4	24	-13,7
8	0	15,5	-5	25	-12,7
9	1	9,5	-4	24	-17,7
10	2	5,5	-1	21	-28,7
11	3	3,5	4	16	-45,7
12	4	3,5	11	9	-68,7
13	5	5,5	20	0	-97,7
14	6	9,5	31	-11	-132,7
15					

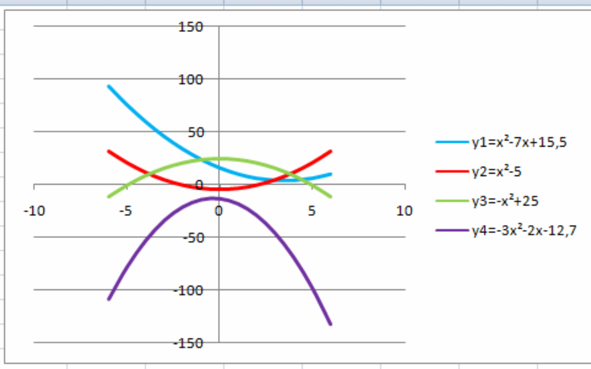


Figura 42 – Tabelas e gráficos construídos por aluno – situação 4

a_1) Observa, em cada um dos gráficos construídos, o ponto de interseção com o eixo das ordenadas. Qual o valor da abscissa em cada um desses pontos?

Os alunos não apresentaram dificuldades em responder esse item. Alguns utilizaram o recurso disponibilizado pela planilha que fornece as coordenadas dos pontos, comprovando, dessa forma, que a abscissa é zero em todos os pontos de intersecção do eixo das ordenadas com os respectivos gráficos.

a_2) Então, para determinar o valor da ordenada desse ponto de interseção, basta calcular o valor numérico de $y = ax^2 + bx + c$ para x = ____.

De maneira análoga à questão anterior, os discentes não apresentaram dificuldades. Dois deles não responderam e um respondeu de forma inadequada.

a_3) Agora, realiza esses cálculos.

Para responder a essa questão, vários alunos perguntaram sobre a necessidade da determinação dos parâmetros da função. A partir desse fato, os discentes foram incentivados a substituir o x por zero na fórmula geral da função quadrática e foram questionados quanto ao resultado da multiplicação de um valor desconhecido por zero. Ao visualizarem a expressão, aos poucos, perceberam que não havia a necessidade de determinar os respectivos valores. Apenas um estudante realizou os cálculos de maneira incorreta, considerando que um número multiplicado por zero é igual a ele mesmo.

Na Figura 43, figuram os cálculos realizados por um dos participantes para a determinação do valor da ordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo y:

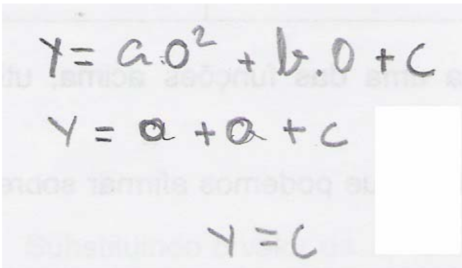


Figura 43 – Protocolo de registro de aluno – situação 4 – item a_3

a_4) Portanto, a parábola intercepta o eixo y no ponto (__;__).

Nesse item, 83,3% dos discentes responderam corretamente, 6,7% não responderam, e os demais responderam incorretamente.

<u>Situação 5</u>

Esta situação foi introduzida mediante a retomada da análise do discriminante de uma equação do 2º grau.

Interseção com o eixo das abscissas

Já vimos que os zeros ou raízes de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos relembrar alguns pontos sobre as equações do 2º grau:

***Equação**: $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e $c \in \Re$ e $a \neq 0$.*

***Raízes**: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.*

Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e diferentes.

Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais e iguais.

Se $\Delta < 0$, então a equação não possui raízes reais.

E, portanto, para determinar os zeros ou raízes de uma função $y = ax^2 + bx + c$, temos que analisar o Δ (discriminante) da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

a) Verifica se o gráfico das funções quadráticas abaixo intercepta o eixo x, a partir da análise do valor do Δ.

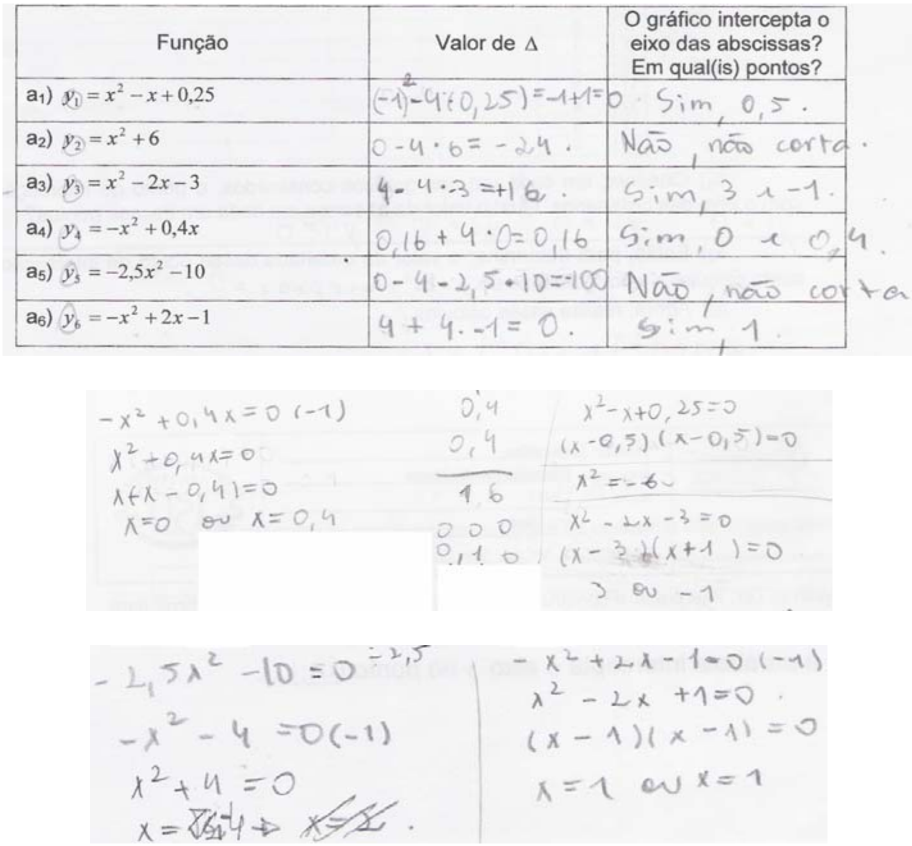
Função	*Valor de Δ*	*O gráfico intercepta o eixo das abscissas? Em qual(is) pontos?*
a₁) $y_1 = x^2 - x + 0{,}25$		
a₂) $y_2 = x^2 + 6$		
a₃) $y_3 = x^2 - 2x - 3$		
a₄) $y_4 = -x^2 + 0{,}4x$		
a₅) $y_5 = -2{,}5x^2 - 10$		
a₆) $y_6 = -x^2 + 2x - 1$		

Para responder essa questão, foi necessário retomar com os alunos que o(s) ponto(s) de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas tem como coordenadas $(x,0)$ e, portanto, o valor de y, nesse(s) ponto(s), é zero. A partir disso, a maioria dos discentes foi determinando para quais valores de x tem-se $f(x) = 0$ para cada um dos itens acima de forma independente.

Desses, 36,7% resolveram todas as equações por meio da aplicação da fórmula resolutiva e/ou da fatoração. Esse grupo será denominado de Categoria A. Fazem parte da Categoria B, 30% dos discentes que não tiveram a necessidade de resolver as equações correspondentes aos itens a_2 e a_5, pois reconheceram que o valor dos respectivos discriminantes é zero e, portanto, os gráficos não interceptam o eixo das abscissas. E, ainda, 3,3% não apresentaram cálculo na resolução do item a_5 (Categoria C).

Outros 30%, denominados de Categoria D, não apresentaram cálculos para determinar esses pontos. Alguns desses estudantes, quando questionados, responderam ter feito os gráficos das funções primeiramente e, então, mediante a utilização dos recursos da planilha, determinaram as coordenadas desses pontos.

A Figura 44 mostra os cálculos realizados por um representante da Categoria A, e a Figura 45 exemplifica a Categoria B.



Função	Valor de Δ	O gráfico intercepta o eixo das abscissas? Em qual(is) pontos?
a1) $y_1 = x^2 - x + 0,25$	$(-1)^2 - 4\cdot(0,25) = -1+1 = 0$.	Sim, 0,5.
a2) $y_2 = x^2 + 6$	$0 - 4\cdot 6 = -24$.	Não, não corta.
a3) $y_3 = x^2 - 2x - 3$	$4 - 4\cdot -3 = +16$.	Sim, 3 e −1.
a4) $y_4 = -x^2 + 0,4x$	$0,16 + 4\cdot 0 = 0,16$	Sim, 0 e 0,4.
a5) $y_5 = -2,5x^2 - 10$	$0 - 4 - 2,5\cdot 10 = -100$	Não, não corta
a6) $y_6 = -x^2 + 2x - 1$	$4 + 4\cdot -1 = 0$.	Sim, 1.

$-x^2 + 0,4x = 0 \ (-1)$
$x^2 + 0,4x = 0$
$x(x - 0,4) = 0$
$x = 0$ ou $x = 0,4$

$x^2 - x + 0,25 = 0$
$(x - 0,5)(x - 0,5) = 0$
$x^2 = -6$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
3 ou −1

$-2,5x^2 - 10 = 0 \ \div -2,5$
$-x^2 - 4 = 0 \ (-1)$
$x^2 + 4 = 0$

$-x^2 + 2x - 1 = 0 \ (-1)$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x - 1)(x - 1) = 0$
$x = 1$ ou $x = 1$

Figura 44 – Protocolo de registro de aluno – situação 5 – item a – Categoria A

Função	Valor de Δ	O gráfico intercepta o eixo das abscissas? Em qual(is) pontos?
a₁) $y_1 = x^2 - x + 0,25$	$(-1)^2 - 4.1.0,25 = 0$	0,5
a₂) $y_2 = x^2 + 6$	$0^2 - 4.1.6 = -24$	Não intercepta
a₃) $y_3 = x^2 - 2x - 3$	$(-2)^2 - 4.1.(-3) = 16$	-1; 3
a₄) $y_4 = -x^2 + 0,4x$	$0,4^2 - 4.(-1).0 = 0,16$	0; 0,4
a₅) $y_5 = -2,5x^2 - 10$	$0^2 - 4.(-2,5).(-10) = -100$	Não intercepta
a₆) $y_6 = -x^2 + 2x - 1$	$2^2 - 4.(-1).(-1) = 0$	1

a) $x^2 - x + 0,25$

$(x - 0,5)(x - 0,5) = 0$

$x_1 = 0,5$ ou $x_2 = 0,5$

c) $x^2 - 2x - 3$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x_1 = -1$ ou $x_2 = 3$

d) $-x^2 + 0,4x = 0$

$x(-x + 0,4) = 0$

$x_1 = 0$ ou $-x_2 + 0,4 = 0$

$-x_2 = -0,4$

$x_2 = 0,4$

f) $-x^2 + 2x - 1$ (-1)

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)(x - 1)$

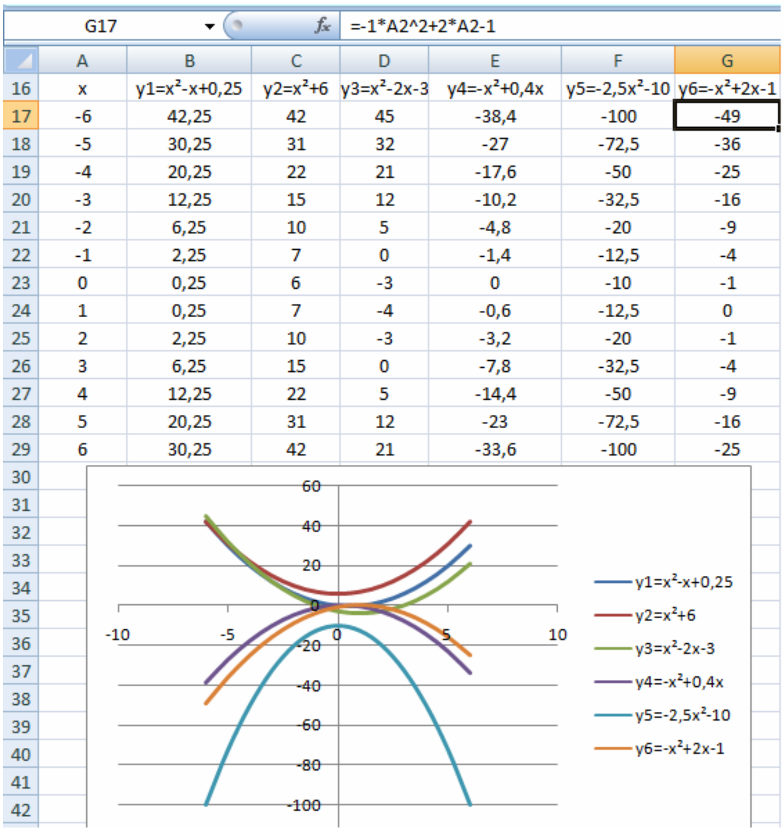
$x_1 = 1$ ou $x_2 = 1$

Figura 45 – Protocolo de registro de aluno – situação 5 – item a – Categoria B

Ressalta-se, ainda, que a média de acertos em cada um dos itens foi de 27,8.

b) Agora, constrói o gráfico de cada uma das funções acima, utilizando a planilha.

Realizaram esse item 90% dos participantes, sendo que 88,9% desses discentes variaram os valores de x no conjunto dos números inteiros entre -6 e 6, conforme indicação feita na primeira situação da presente atividade, copiando a tabela construída e alterando as fórmulas das funções. Na Figura 46, tem-se a tabela e o gráfico construídos por um dos discentes.



G17 | f_x =-1*A2^2+2*A2-1

	A	B	C	D	E	F	G
16	x	$y1=x^2-x+0,25$	$y2=x^2+6$	$y3=x^2-2x-3$	$y4=-x^2+0,4x$	$y5=-2,5x^2-10$	$y6=-x^2+2x-1$
17	-6	42,25	42	45	-38,4	-100	-49
18	-5	30,25	31	32	-27	-72,5	-36
19	-4	20,25	22	21	-17,6	-50	-25
20	-3	12,25	15	12	-10,2	-32,5	-16
21	-2	6,25	10	5	-4,8	-20	-9
22	-1	2,25	7	0	-1,4	-12,5	-4
23	0	0,25	6	-3	0	-10	-1
24	1	0,25	7	-4	-0,6	-12,5	0
25	2	2,25	10	-3	-3,2	-20	-1
26	3	6,25	15	0	-7,8	-32,5	-4
27	4	12,25	22	5	-14,4	-50	-9
28	5	20,25	31	12	-23	-72,5	-16
29	6	30,25	42	21	-33,6	-100	-25

Figura 46 – Tabelas e gráficos construídos por aluno – situação 5

c) Mediante a análise do discriminante, o que podemos afirmar sobre os zeros de uma função quadrática?

As respostas dadas a esse item foram organizadas e categorizadas de acordo com a Tabela 23, a seguir:

Tabela 23 – Distribuição das respostas do item c da situação 5

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Analisaram, corretamente, o discriminante, utilizando uma linguagem precisa	14	46,7
B – Analisaram, corretamente, o discriminante, fazendo uso de esquema	7	23,3
C – Demonstraram compreensão da relação entre o discriminante e o número de vezes que o gráfico intercepta o eixo das abscissas, fazendo uso de uma linguagem imprecisa	2	6,7
D – Analisaram o discriminante relacionando-o com o número de raízes da equação $f(x)=0$	4	13,3
E – Não responderam	3	10
Total	30	100,0

Nas duas primeiras categorias, encontram-se as respostas corretas: na A, os discentes fizeram uso da linguagem natural para explicitar suas conclusões, enquanto na B foram elaborados esquemas.

Na Figura 47 e na Figura 48 e têm-se exemplos de respostas das respectivas categorias.

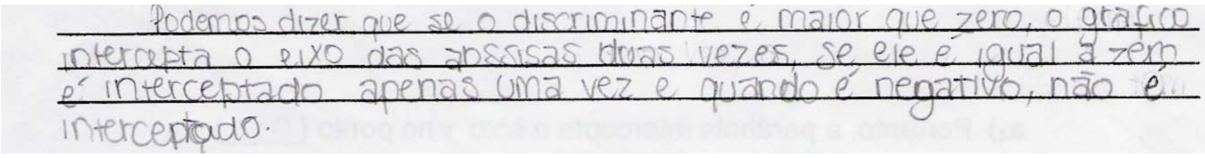

Podemos dizer que se o discriminante é maior que zero, o gráfico intercepta o eixo das absissas duas vezes, se ele é igual a zero é interceptado apenas uma vez e quando é negativo, não é interceptado.

Figura 47 – Protocolo de registro de aluno – situação 5 – item c – Categoria A

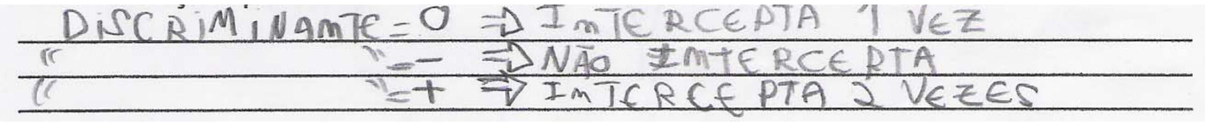

DISCRIMINANTE = 0 ⇒ INTERCEPTA 1 VEZ
" " = − ⇒ NÃO INTERCEPTA
" " = + ⇒ INTERCEPTA 2 VEZES

Figura 48 – Protocolo de registro de aluno – situação 5 – item c – Categoria B

Na Categoria C, encontram-se as respostas que fazem referência ao número de vezes que o gráfico intercepta o eixo das abscissas, sem haver precisão na forma de redigir essas conclusões.

Já, na Categoria D, os alunos limitam-se a descrever o número de raízes da equação $f(x)=0$, repetindo o que foi descrito anteriormente no próprio roteiro.

Três estudantes não responderam esse item.

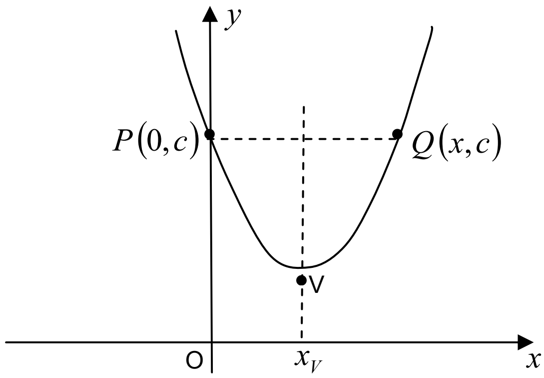
<u>Situação 6</u>

Esta última situação proposta foi realizada por vinte e seis dos alunos participantes dessa investigação, pois conforme descrito anteriormente, quatro discentes faltaram em dias alternados à aplicação dessa tarefa e, portanto, não a concluíram. Ressalta-se que esses estudantes foram orientados a realizar suas tarefas na seqüência proposta, ficando essa última sem efetivação.

Coordenadas do vértice

Sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola cujo eixo de simetria é uma reta vertical que passa pelo vértice.

Todos os pontos desse eixo de simetria têm a mesma abscissa que é x_V *do vértice V, conforme mostra a figura a seguir:*



Ao substituirmos y por c, na lei da função, observamos que as raízes da equação obtida são as abscissas de ***P*** *e* ***Q****.*

De maneira geral, os discentes apresentaram muitas dificuldades na compreensão dessa questão, necessitando da intervenção da professora-pesquisadora em vários momentos, a que fez uso de exemplos de funções para determinar as coordenadas dos pontos P e Q, bem como, para resolver a equação $ax^2 + bx + c = c$.

a) Substitui y por c na função $y = ax^2 + bx + c$. ___________________________

b) Diminui c em ambos os lados da igualdade. ___________________________

c) Coloca x em evidência. ____

d) Resolve a equação na incógnita x ___________________________________

e) Portanto, $x =$ ___ é a abscissa do ponto ***P*** *e $x =$ ___ é a abscissa do ponto* ***Q****.*

Todos os vinte e seis discentes responderam corretamente os itens acima.

f) A simetria do gráfico acima nos indica que x_V é a média aritmética das abscissas dos pontos ***P*** *e* ***Q****. Então, calcula, a seguir x_V.*

Foi necessário retomar a definição de média aritmética a fim de que essa questão fosse respondida. Após as intervenções iniciais, vinte e cinco estudantes realizaram a demonstração solicitada de forma correta, e um respondeu de forma incorreta o último item, por não ter realizado a divisão de frações de forma adequada.

A Figura 49 mostra a resolução do item f feita por um dos alunos:

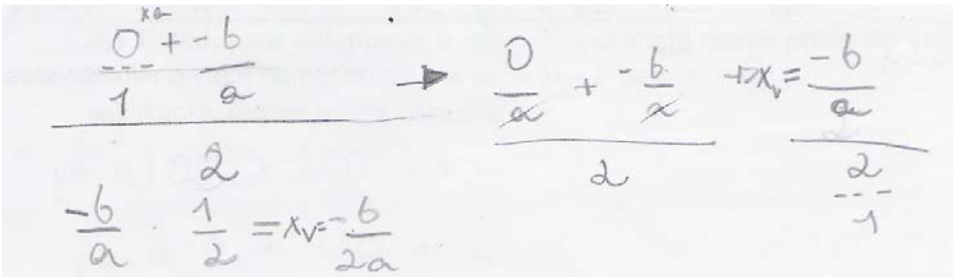


Figura 49 – Protocolo de registro de aluno – situação 6 – item f

Substituindo o valor de x_V *em* $y = ax^2 + bx + c$*, tu obténs a ordenada do vértice da parábola, denominada* y_V *.*

g) Determina as coordenadas do vértice de cada uma das funções abaixo.

Função	x_V	y_V
g₁) $y_1 = x^2 - x + 0{,}25$		
g₂) $y_2 = x^2 + 6$		
g₃) $y_3 = x^2 - 2x - 3$		
g₄) $y_4 = -x^2 + 0{,}4x$		
g₅) $y_5 = -2{,}5x^2 - 10$		
g₆) $y_6 = -x^2 + 2x - 1$		

Dos vinte e seis alunos que realizaram a situação, 6, 23,1% fizeram de forma correta a todos os itens, 11,5% concluíram corretamente o cálculo do x_V e não completaram a coluna do y_V, 7,8% responderam incorretamente todos os itens, e 3,8% não efetuaram a proposta.

Acertaram dez itens 3,8% dos estudantes; oito, 15,4%; sete, 11,5%; seis, 3,8%; cinco, 3,8%; quatro, 11,5%; e acertaram duas questões 3,8% dos respondentes. Destaca-se, ainda, que todos os discentes que erraram o cálculo do x_V também erraram o y_V, visto que y_V depende do x_V.

Ao realizar essa última proposta, percebeu-se que os estudantes não tinham necessidade de deduzir algebricamente as coordenadas do vértice da parábola, contentando-se, apenas, com a possibilidade de determiná-las mediante o uso dos recursos disponibilizados pela planilha. Segundo Schoenfeld (1983 citados por DUVAL 1999), os alunos não vêem conexão da matemática intuitiva, percebida em suas construções, e a matemática dedutiva, realizada por meio de provas de teoremas. No entanto, para Duval (1999), o que deve haver é uma conexão entre os diversos registros de representação semióticos, que permita aos discentes reconhecer um mesmo objeto matemático através de suas diferentes representações e, conseqüentemente, estabelecer conexões entre a matemática dedutiva e a empírica. Essas conexões entre os registros são denominadas “arquitetura cognitiva.” (DUVAL, 1999, p.12).

De fato, essa atividade proporcionou o trabalho concomitante com as representações gráficas, tabulares e algébricas dos pontos notáveis de uma função quadrática, bem como a coordenação entre os referidos registros.

9 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE FINAL REFERENTE ÀS FUNÇÕES DE 1º E 2º GRAUS

Esta última atividade objetivou proporcionar aos discentes situações de aprendizagem que privilegiem a complementaridade entre os registros algébrico, tabular e gráfico das funções afins e quadráticas, conforme preconiza a teoria de Duval. Essa proposta foi efetivada mediante a utilização de um aplicativo, construído pela pesquisadora com os recursos disponibilizados pela planilha, que permite ao usuário visualizar as alterações tabulares e gráficas ocorridas, de forma simultânea, por meio da modificação dos parâmetros dessas funções.

Damm (2008, p. 185) reforça a importância de propiciar aos estudantes o trabalho com as diversas representações de um mesmo objeto, exemplificando essa posição por meio do desenvolvimento do conceito de função.

> Por exemplo, quando trabalhamos com as funções, os gráficos, as tabelas e as equações são todos registros parciais desse objeto. Cada um desses registros é parcial e possui uma especificação própria. Perceber essas especificidades a cada registro e reforçá-las é um caminho para o entendimento do objeto como um todo.

A seguir, apresenta-se a descrição do aplicativo, abordando aspectos da sua construção e da sua utilização.

9.1 Descrição do aplicativo

Este aplicativo é baseado no *software* MS Excel, integrante do pacote Microsoft Office. Pode-se dividi-lo em duas partes, as quais podem ser chamadas de *front-end* e *back-end*. O *front-end* consiste em um formulário para reunir e configurar as informações a serem usadas em cálculos e análises, como também a interface, em que se visualiza as representações das funções. O *back-end* consiste em uma planilha com as fórmulas responsáveis pelo cálculo dos pontos para a formação do gráfico, pelo cálculo das raízes das funções e pela análise dos resultados, utilizando-se do encadeamento de funções do tipo *If-Then-Else* para obtenção de conclusões a respeito dos resultados obtidos.

O referido programa fornece um ambiente (*framework*) computacional muito favorável para aplicativos dessa natureza, visto que a interação entre o *front-end* (formulário) e o *back-end* (planilha) dá-se de modo simples e direto, bastando algumas vinculações entre células. No formulário (*front-end*), também foram utilizados controles para auxiliar a escolha dos coeficientes da função. Esses controles são oferecidos pelo próprio *software*.

A interface do aplicativo é composta por três barras de rolagem (as quais determinam os valores dos coeficientes da função afim ou quadrática), por uma tabela com valores pré-definidos para a variável independente e com os respectivos valores da variável dependente, calculados automaticamente e, finalmente, por um plano cartesiano, no qual são construídos os gráficos vinculados à referida tabela. Destaca-se, também, que os usuários têm acesso aos valores do ponto de interseção do gráfico com o eixo das abscissas nas funções afins e ao valor do discriminante, bem como a sua respectiva análise, aos zeros da função e às coordenadas do vértice nas funções quadráticas.

Os parâmetros da função variam, no conjunto dos números inteiros, no intervalo de -50 a 50 e são modificados mediante um clique nas setas das barras de rolagem, ou, então, mediante ao arrastar do cursor para a direita ou para a esquerda. As modificações tabulares e gráficas são feitas automaticamente pelo aplicativo. A Figura 50 exemplifica as representações algébricas, tabulares e gráficas da função afim, e a Figura 51 mostra um exemplo de função quadrática, ambas construídas no aplicativo.

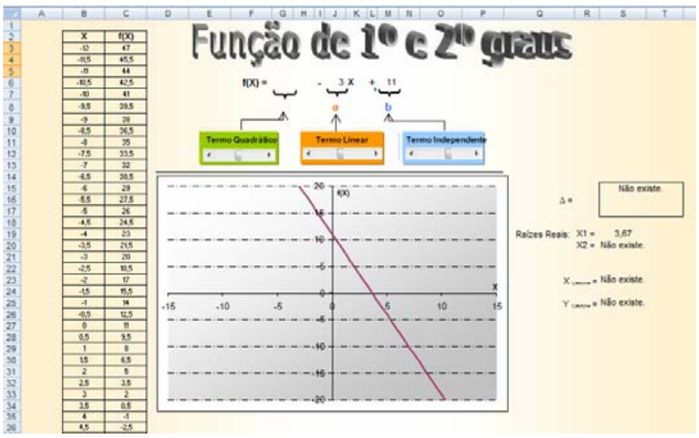


Figura 50 – Interface do aplicativo, exemplificando função afim

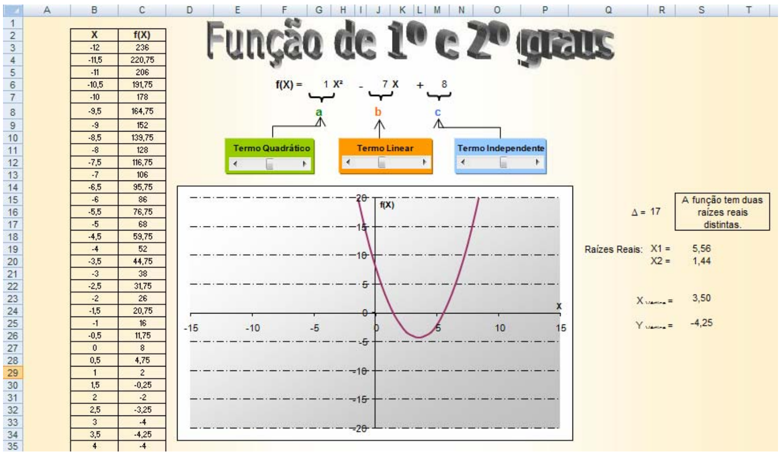


Figura 51 – Interface do aplicativo, exemplificando função quadrática

Vale ressaltar que esse aplicativo foi disponibilizado na rede interna da escola e utilizado de maneira compartilhada por todos os discentes.

9.2 Apresentação e análise da atividade

O dia 06 de outubro de 2008 foi destinado à aplicação da referida tarefa, sendo disponibilizados dois períodos de 50 minutos para sua realização: um no turno da manhã e outro no da tarde. Ressalta-se, ainda, que um dos participantes não compareceu à aula nesse dia e que dois estiveram presentes apenas pela manhã, desse modo, seus roteiros ficaram incompletos.

A atividade foi introduzida por explicação sobre a utilização do aplicativo.

O aplicativo a ser utilizado nesta atividade, visa à construção gráfica de funções de 1º e 2º graus, a partir da modificação dos parâmetros das respectivas funções. Para tanto, basta clicar nas setas de cada um dos termos: a da direita faz com que o coeficiente aumente o seu valor, e a da esquerda, diminua. Ou, então, podes movimentar a barra de rolagem para a direita ou para a esquerda.

Num primeiro momento, os estudantes foram orientados a alterar os parâmetros das funções e a observar as modificações ocorridas na tabela e no gráfico, a fim de se familiarizarem com os recursos disponibilizados pelo aplicativo. De maneira geral, não foram observadas dificuldades na sua utilização.

Nessa ocasião, os alunos foram incentivados a comparar as funções afim e quadrática, por meio da análise dos pontos de intersecção com os eixos das ordenadas e abscissas e do crescimento e/ou do decrescimento nas suas diferentes representações.

Comentários do tipo: “A função do 1º grau tem apenas uma raiz, enquanto a de 2º grau pode apresentar uma, duas ou nenhuma raiz.”; ou, então, “A função de 1º grau é sempre crescente ou decrescente ou nenhuma coisa, e a de 2º grau cresce e depois decresce ou ao contrário” foram anotados pela professora-pesquisadora. Observa-se, nessas afirmações, que os discentes perceberam as diferenças entre as respectivas funções, sem haver preocupação com o rigor matemático ao emitirem suas conclusões.

Após essa exploração inicial, os estudantes foram orientados a responder o roteiro, a seguir, composto por seis tabelas (três sobre função de 1º grau e três sobre de 2º grau) e por nove questões, que visavam à apreciação das regularidades apresentadas em cada uma das funções analisadas.

a) Utiliza o aplicativo para construir os gráficos das funções de 1º grau, determinadas nas tabelas a_1*,* a_2 *e* a_3*, e completa-as a seguir.*

Tabela a_1 Função	*O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?*	*O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?*	*Para que valores de x a função é crescente?*	*Para que valores de x a função é decrescente?*
$f(x) = -10x$				
$f(x) = -5x$				
$f(x) = x$				
$f(x) = 5x$				
$f(x) = 10x$				

Dos vinte e nove respondentes, 58,6% responderam corretamente todos os itens da tabela acima; 17,2% escreveram, de forma incorreta, as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico com os eixos, colocando apenas "0". Houve, ainda, 10,3% que analisaram a função $f(x) = 0$ e não $f(x) = x$, conforme solicitado.

Destaca-se, uma vez mais, que 3,4% completaram a tabela conforme descrição feita nos dois itens anteriores e que outros 3,4% consideraram, erroneamente, $f(x) = x$ e $f(x) = 10x$ decrescente.

a_{11}) Tu deves ter verificado que, quanto maior é o coeficiente ***a*** *(coeficiente angular), maior é a inclinação da reta. Além disso, essas funções são sempre crescentes ou decrescentes. Qual a relação existente entre o coeficiente* ***angular*** *das funções de 1º grau e o crescimento ou o decrescimento delas?*

As respostas dadas a essa questão foram organizadas e categorizadas, conforme revela a Tabela 24.

Tabela 24 – Distribuição das respostas do item a_{11} da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Analisaram, corretamente, para quais valores de a tem-se a função crescente ou decrescente	22	76
B – Analisaram a inclinação dos gráficos e não o crescimento ou o decrescimento das funções	3	10,3
C – Responderam de forma incorreta	3	10,3
D – Não responderam	1	3,4
Total	29	100,0

Na Categoria A, encontram-se as respostas que afirmaram, de maneira correta, que, quando o coeficiente angular é positivo, a função é crescente e, quando é negativo, é decrescente.

Na Categoria B, foram reunidas as repostas que analisaram o ângulo de inclinação das retas, descrevendo que, quanto maior fosse o coeficiente a, maior seria o ângulo de inclinação com o eixo das abscissas e menor será o ângulo em relação às ordenadas.

Já, na Categoria C, foram reunidas as respostas que fizeram a apreciação de forma incorreta, relacionando o crescimento ou decrescimento da função linear com seus valores do domínio.

Tabela a_2 *Função*	*O gráfico intercepta o eixo y?* *Em qual(is) ponto(s)?*	*O gráfico intercepta a o eixo x?* *Em qual(is) ponto(s)?*	*Para que valores de x a função é crescente?*	*Para que valores de x a função é decrescente?*
$f(x)=x-15$				
$f(x)=x-10$				
$f(x)=x$				
$f(x)=x+10$				
$f(x)=x+15$				

Inicialmente, foram analisadas e categorizadas as respostas dadas às duas primeiras colunas da tabela a_2, conforme mostra a Tabela 25:

Tabela 25 – Distribuição das respostas do item a_2 da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Responderam corretamente todos os itens	14	48,4
B – Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos, omitindo a coordenada “0” em ambos os casos	3	10,3
C – Consideraram que as funções $f(x)=x-15$ e $f(x)=x+15$ não interceptam o eixo das abscissas	6	20,7
D – Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos, omitindo a coordenada “0” em ambos os casos e consideraram que as funções $f(x)=x-15$ *e* $f(x)=x+15$ não interceptam o eixo das abscissas	1	3,4
E – Inverteram as coordenadas dos pontos em todos os itens	1	3,4
F – Inverteram as coordenadas dos pontos nos dois últimos itens	2	6,9
G – Responderam, corretamente, apenas para a função $f(x)=x$	2	6,9
Total	29	100,0

Fazem parte da Categoria A as respostas que determinam as coordenadas do ponto de interseção com o eixo das ordenadas do tipo $(0, y)$ e com o eixo das abscissas $(x,0)$.

Foram reunidas, na Categoria B, as respostas que escreveram, de forma incorreta, as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico com os eixos, colocando apenas o valor de x para a interseção com a abscissa e o valor y para a ordenada.

Já, na Categoria C, os discentes responderam incorretamente sobre o ponto de intersecção dos gráficos das funções $f(x) = x - 15$ e $f(x) = x + 15$ com o eixo das abscissas, visto que, no aplicativo, esses pontos não são obtidos por meio da percepção visual. Para Duval (1999), não há entendimento de um determinado objeto sem sua a visualização. Para esse autor, a visão permite o acesso direto ao objeto, enquanto a visualização é baseada "na produção de uma representação semiótica" (DUVAL, 199, p. 13) e torna visível tudo aquilo que não é acessível pela visão.

A Figura 52 mostra os gráficos construídos pelo aplicativo das respectivas funções.

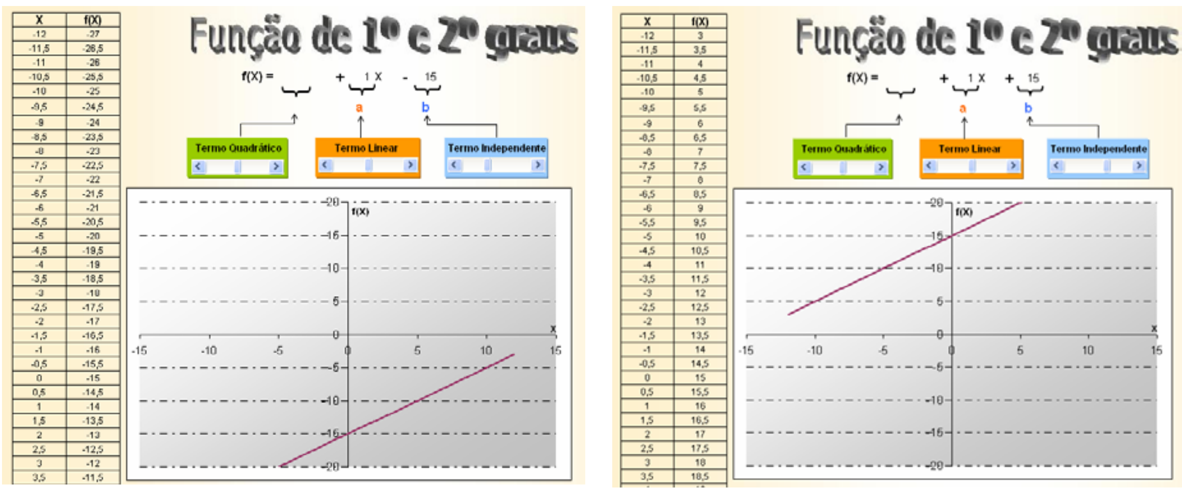


Figura 52 – Gráficos das funções $f(x) = x - 15$ e $f(x) = x + 15$

Na Categoria D, fazem parte as respostas que apresentam, simultaneamente, as características das Categorias B e C.

Na Categoria E, foram reunidas as respostas que apresentam todas as coordenadas invertidas, do tipo (y, x). E, por fim, na Categoria F, tem-se essa mesma inversão apenas para as duas últimas funções.

Nas respostas dadas às duas últimas colunas, observou-se que 72,5% dos estudantes responderam corretamente todos os itens; 17,3% consideraram, de maneira incorreta, as duas últimas funções decrescentes; 3,4% avaliaram incorretamente as duas primeiras; e outros 3,4%, as três primeiras, também considerando-as decrescentes. Os demais responderam incorretamente todos os itens.

*a_{21}) Qual a relação existente entre o coeficiente **b** (coeficiente linear) das funções afins e seus respectivos gráficos?*

A Tabela 26 mostra a categorização das respostas, mediante a análise feita sobre as mesmas.

Tabela 26 – Distribuição das respostas do item a_{21} da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Fizeram referência a que o coeficiente b determina o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas e translada o gráfico nesse mesmo eixo	1	3,4
B – Fizeram referência a que o coeficiente b determina o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas	9	31
C – Fizeram referência ao movimento de translação corrido no gráfico no eixo das ordenadas, mediante a alteração do coeficiente b	11	38,1
D – Identificaram que os gráficos originados pela alteração do coeficiente b, são paralelos entre si	2	6,9
E – Identificaram que as funções são crescentes e não destacaram a função do coeficiente b	3	10,3
F – Responderam de forma incorreta	2	6,9
G – Não responderam	1	3,4
Total	29	100,0

A Categoria A é composta de um único representante que identificou que o coeficiente linear determina o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e define quantas unidades o gráfico translada para cima ($b > 0$) ou para baixo ($b < 0$) no referido eixo.

As respostas que apenas determinaram uma das relações, descritas acima, entre o coeficiente linear da função afim e os respectivos gráficos, foram distribuídas nas categorias B e C.

Já as respostas que compõem a Categoria D apenas destacam que os gráficos são paralelos entre si, sem mencionar a função do coeficiente b.

A Categoria E, por sua vez, expõem as respostas que identificaram que as funções afins da tabela a_2 são estritamente crescentes, sem determinar a relação existente entre seus coeficientes lineares e os respectivos gráficos.

Responderam de forma incorreta 6,9% dos participantes, e 3,4% não atenderam à solicitação feita nessa questão.

Tabela a₃ *Função*	*O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?*	*O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?*	*Para que valores de x a função é crescente?*	*Para que valores de x a função é decrescente?*
$f(x) = -15$				
$f(x) = -10$				
$f(x) = 0$				
$f(x) = 10$				
$f(x) = 15$				

Em relação às respostas dadas na tabela a_3, verificou-se que todos os discentes reconheceram que as funções não são crescentes, nem decrescentes. Conseqüentemente, serão apreciadas as respostas dos itens que analisam os pontos de interseção dos gráficos com os eixos.

As respostas a essas duas primeiras colunas foram organizadas e categorizadas conforme mostra a Tabela 27.

Tabela 27 – Distribuição das respostas do item a_3 da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Responderam todos os itens corretamente	9	31
B – Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com o eixo das ordenadas, omitindo a coordenada "0"	2	6,9
C – Na função $f(x)=0$, identificaram que o ponto de intersecção com o eixo das abscissas é apenas $(0,0)$	11	38,1
D – Responderam, de forma incompleta, sobre as coordenadas dos pontos de intersecção com o eixo das ordenadas, omitindo a coordenada "0" e, para $f(x)=0$, identificaram que o ponto de intersecção com o eixo das abscissas é apenas $(0,0)$	4	13,7
E – Na função $f(x)=0$, afirmaram que não há ponto de intersecção com o eixo das abscissas	2	6,9
F – Não responderam	1	3,4
Total	29	100,0

Na primeira categoria, encontram-se as respostas precisas, identificando os pontos de intersecção por meio de pares ordenados. Na segunda categoria estão presentes as respostas que reconhecem o ponto de intersecção, embora esses não tenham sido identificados mediante um par ordenado.

Já as respostas reunidas na Categoria C identificam apenas um ponto de intersecção do gráfico da função $f(x)=0$ com o eixo x, não havendo a percepção de que o respectivo gráfico coincide com o eixo das abscissas em todo o conjunto dos números reais.

As respostas que apresentam as características apontadas nas Categorias B e C foram agrupadas na Categoria D.

E, na Categoria E, encontram-se as respostas que não identificaram nenhum ponto de intersecção da função $f(x)=0$ com o eixo das abscissas.

*a_{31}) Além do fato de serem retas, o que os gráficos construídos na **tabela a_3** têm em comum?*

As respostas à questão a_{31} foram organizadas e categorizadas de acordo com o que mostra a Tabela 28 a seguir:

Tabela 28 – Distribuição das respostas do item a_{31} da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Reconheceram que os gráficos são paralelos ao eixo das abscissas	8	27,7
B – Reconheceram que os gráficos são paralelos ao eixo das abscissas e perpendiculares ao eixo das ordenadas	2	6,9
C – Identificaram que os gráficos cruzam o eixo das ordenadas	2	6,9
D – Identificaram que apenas a função $f(x)=0$ intercepta o eixo das abscissas	2	6,9
E – Identificaram o movimento de translação ocorrido nos gráficos a partir da modificação do coeficiente b	4	13,8
F – Identificaram que os gráficos não são decrescentes nem crescentes	7	24,1
G – Responderam de forma incorreta	3	10,3
H – Não responderam	1	3,4
Total	29	100,0

Encontram-se, na Categoria A, as respostas que identificaram que os gráficos são paralelos ao eixo x. Na Categoria B é ressaltado que os gráficos são paralelos ao eixo das abscissas e, também, perpendiculares às ordenadas. Na Categoria C, têm-se as respostas que mencionam que os gráficos interceptam o eixo y em um único ponto. Na E, as respostas reconhecem que, na função $f(x)=0$, o gráfico coincide com a abscissa. Na Categoria F, as respostas identificam que as funções são constantes, sem que seja feito uso dessa nomenclatura.

*As funções do tipo $y=b$ são denominadas **funções constantes**.*

A partir da questão b, a seguir, serão analisados vinte e sete protocolos de registros dos alunos, visto que dois deles não compareceram à segunda aula destinada à realização da presente atividade.

b) Utiliza o aplicativo para construir os gráficos das funções de 2º grau, determinadas nas tabelas b_1, b_2 e b_3, e completa-as a seguir.

Tabela b_1 *Função*	*O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?*	*O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?*	*Para que valores de x a função é crescente?*	*Para que valores de x a função é decrescente?*	*Coorde-nadas do vértice*
$f(x)=x^2$					
$f(x)=5x^2$					
$f(x)=10x^2$					
$f(x)=20x^2$					

De maneira geral, os estudantes não apresentaram dificuldades em completar a tabela acima, todos responderam corretamente todos os itens. Desses, 48,1% utilizaram-se da linguagem algébrica para responder para quais valores de x as funções são crescentes e decrescentes, enquanto que 29,6% usaram a linguagem natural. Ainda não escreveram os pontos de intersecção com os eixos de maneira adequada 22,2% dos respondentes: sendo que, dentre esses, 50%, utilizaram a linguagem algébrica nas duas últimas colunas, e outros 50% fizeram uso da linguagem natural.

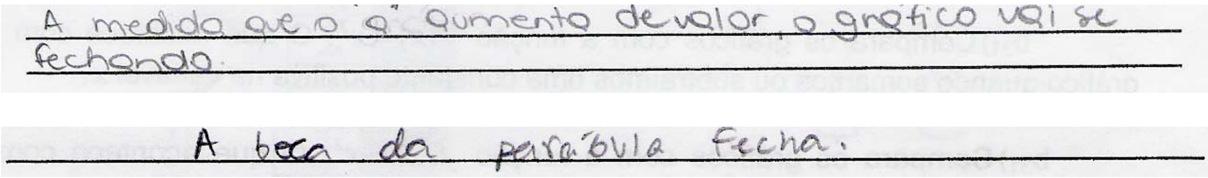
*b_{11}) Compara os gráficos construídos na **tabela b_1**. O que acontece com o gráfico da função $f(x)=x^2$ à medida que aumentamos o valor de seu coeficiente?*

A Tabela 29, a seguir, mostra a categorização feita a partir da apreciação das respostas a questão b_{11}.

Tabela 29 – Distribuição das respostas do item b_{11} da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Reconheceram que a abertura da parábola diminui à medida que o coeficiente a aumenta	20	74,1
B – Identificaram que o gráfico se aproxima do eixo das ordenadas	4	14,8
C – Responderam de forma incorreta	3	11,1
Total	27	100,0

A Figura 53 exemplifica as respostas da Categoria A:


A medida que o a aumento de valor o grafico vai se fechando.

A boca da parábola fecha.

Figura 53 – Protocolo de registro de aluno – situação 7 – item b_{11} – Categoria A

Enquanto, na Figura 54, tem-se um exemplo de resposta da Categoria B:

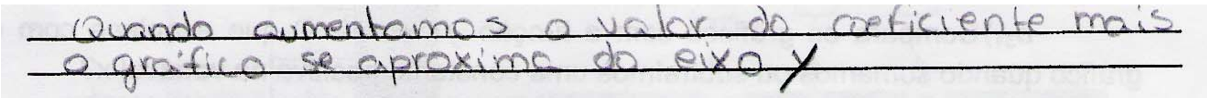

Quando aumentamos o valor do coeficiente mais o gráfico se aproxima do eixo y

Figura 54 – Protocolo de registro de aluno – situação 7 – item b_{11} – Categoria B

*b_{12}) O que os gráficos construídos têm em comum em relação às coordenadas do vértice **tabela b_1**?*

Todos os vinte e sete discentes responderam corretamente a questão b_{12}, identificando o ponto $(0{,}0)$ como sendo as coordenadas dos vértices das funções acima.

Tabela b_2 *Função*	*O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?*	*O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?*	*Para que valores de x a função é crescente?*	*Para que valores de x a função é decrescente?*	*Coorde-nadas do vértice*
$f(x) = x^2 - 15$					
$f(x) = x^2 - 10$					
$f(x) = x^2$					
$f(x) = x^2 + 10$					
$f(x) = x^2 + 15$					

As respostas dadas à tabela b_2 foram organizadas e categorizadas segundo consta na Tabela 30.

Tabela 30 – Distribuição das respostas do item b_2 da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Responderam todos os itens corretamente, fazendo uso da linguagem algébrica para completar a terceira e quarta colunas	15	55,6
B – Responderam todos os itens corretamente, fazendo uso da linguagem natural para completar a terceira e quarta colunas	5	18,5
C – Responderam de forma incompleta as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas e utilizaram a linguagem algébrica para completar a terceira e quarta colunas	3	11,1
D – Completaram de forma incorreta a terceira e quarta colunas	1	3,7
E – Inverteram os pontos de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas	1	3,7
F – Identificaram incorretamente os pontos de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas	1	3,7
G – Não responderam	1	3,7
Total	27	100,0

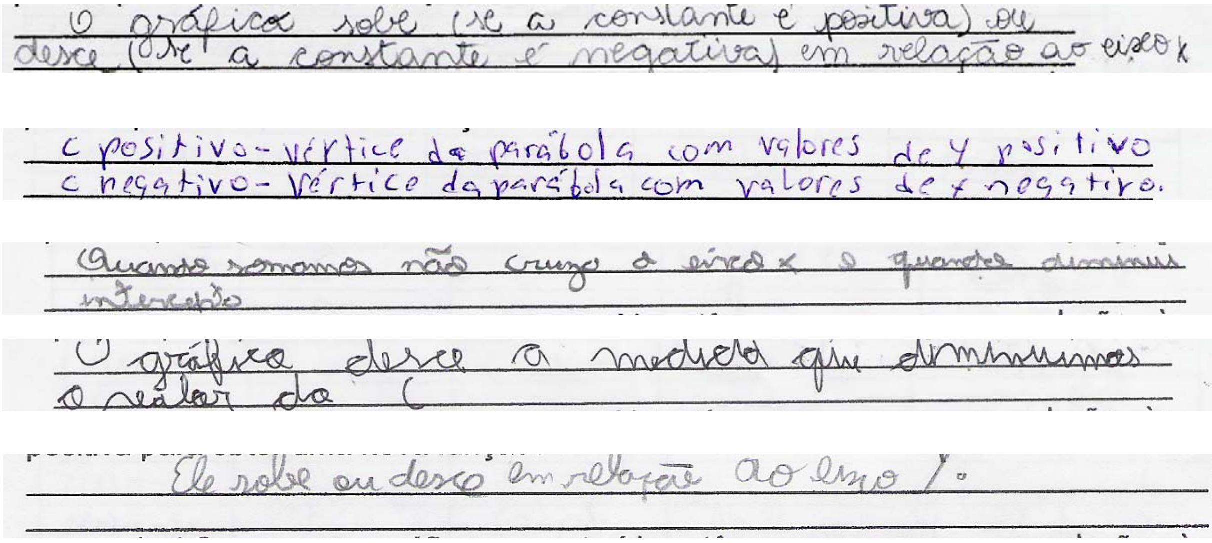
b_{21}) *Compara os gráficos construídos na **tabela b_2** com a função* $f(x)=x^2$. *O que acontece com os gráficos quando somamos ou subtraímos uma constante positiva para obter uma nova função?*

Para esta questão, seguem os tipos de respostas distribuídas nas categorias de acordo com o que mostra a Tabela 31.

Tabela 31 – Distribuição das respostas do item b_{21} da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Reconheceram que o gráfico translada conforme é somada ou subtraída uma constante positiva	15	55,6
B – Identificaram que a coordenada y do vértice é positiva, quando é somada uma constante positiva, e negativa, quando é subtraída uma constante positiva	2	7,4
C – Identificaram que a coordenada y do vértice é negativa, quando é subtraída uma constante positiva	1	3,7
D – Identificaram que, quando é somada uma constante positiva, o gráfico não intercepta o eixo das abscissas e, quando é subtraída uma constante positiva, o gráfico intercepta o eixo	1	3,7
E – Identificaram o movimento de translação	2	7,4
F – Responderam de forma incorreta	3	11,1
G – Não responderam	3	11,1
Total	27	100,0

A Figura 55 exemplifica, respectivamente, cada uma das cinco primeiras categorias.



O gráfico sobe (se a constante é positiva) ou desce (se a constante é negativa) em relação ao eixo x

c positivo - vértice da parábola com valores de y positivo
c negativo - vértice da parábola com valores de y negativo.

Quanto somamos não cruza o eixo x e quando diminui intercepta

O gráfico desce a medida que diminuimos o valor de c

Ele sobe ou desce em relação ao eixo y.

Figura 55 – Protocolo de registro de alunos – situação 7 – item b_1

*b_{22}) O que os gráficos construídos têm em comum em relação às coordenadas do vértice na **tabela b_2**?*

Novamente, as respostas foram organizadas e categorizadas conforme explicita a Tabela 32 abaixo:

Tabela 32 – Distribuição das respostas do item b_{22} da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Identificaram que as coordenadas do vértice são do tipo $(0, y)$	11	40,8
B – Reconheceram que as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas coincidem com as coordenadas do vértice	2	7,4
C – Identificaram que a coordenada x do vértice é sempre zero	5	18,5
D – Identificaram que a coordenada y do vértice é sempre c	1	3,7
E – Reconheceram que os vértices estão sempre sobre o eixo das ordenadas	1	3,7
F – Responderam de forma incorreta	3	11,1
G – Não responderam	4	14,8
Total	27	100,0

Dica: *Para utilizar o aplicativo, deves, primeiramente, desenvolver os produtos notáveis das funções.*

Tabela b₃ *Função*	*O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?*	*O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?*	*Para que valores de x a função é crescente?*	*Para que valores de x a função é decrescente?*	*Coorde-nadas do vértice*
$f(x)=(x-7)^2$					
$f(x)=(x-5)^2$					
$f(x)=x^2$					
$f(x)=(x+5)^2$					
$f(x)=(x+7)^2$					

Em relação à primeira questão da tabela acima, dentre os vinte e sete protocolos analisados 33,3% responderam corretamente, identificando o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas como sendo $(0,c)$, em que c é o termo independente da função $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$. Entretanto, 51,8% dos discentes afirmaram que não há ponto de interseção das funções, com exceção de $f(x)=x^2$, uma vez que não é possível observar esses pontos na construção gráfica disponibilizada pelo aplicativo, conforme exemplifica a Figura 56:

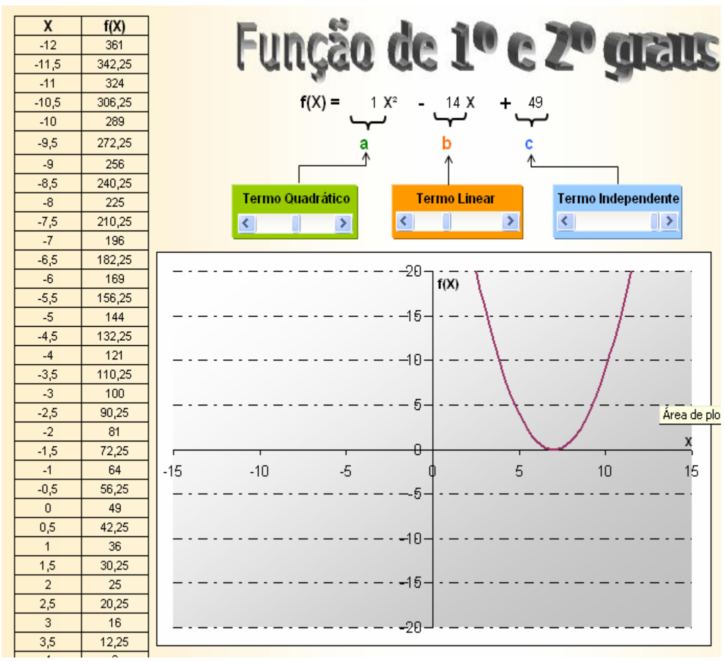


Figura 56 – Gráfico da função $f(x)=(x-7)^2$

Destaca-se, ainda, que 14,8% não responderam essa questão.

Os demais itens da tabela foram respondidos de maneira correta, por 77,8% dos participantes; de forma incorreta, por 7,4%; e não responderam 14,8%.

b_{31}) Compara os gráficos com a função $f(x) = x^2$. O que acontece com o gráfico quando somamos ou subtraímos uma constante positiva na variável x?

A respeito dessa questão, seguem os tipos de respostas dadas pelos discentes, organizadas e categorizadas de acordo com o que revela a Tabela 33:

Tabela 33 – Distribuição das respostas do item b_{31} da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Fizeram referência ao movimento de translação sobre o eixo das abscissas	15	55,6
B – Responderam de forma incorreta	6	22,2
C – Não responderam	6	22,2
Total	27	100,0

A Figura 57, abaixo, exemplifica as respostas pertencentes à Categoria A.

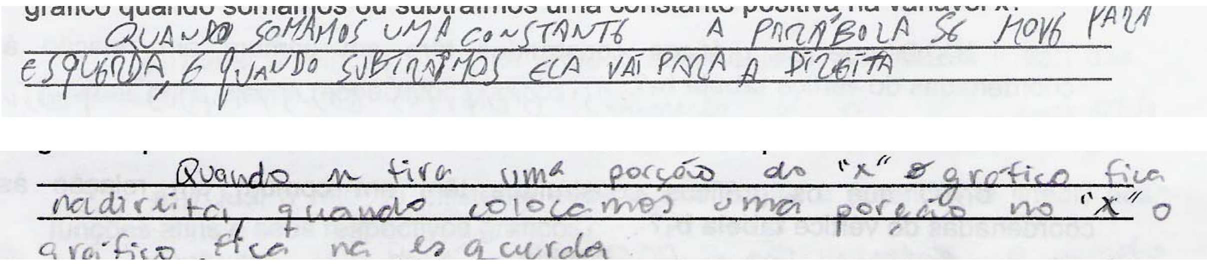


Figura 57 – Protocolos de registros de alunos – situação 7 – item b_{31} – Categoria A

*b_{32}) O que os gráficos construídos têm em comum em relação às coordenadas do vértice na **tabela b_3**?*

Nessa última questão, as respostas foram categorizadas segundo mostra a Tabela 34:

Tabela 34 – Distribuição das respostas do item b_{32} da situação 7

Categorias	Alunos	Percentual (%)
A – Identificaram que a coordenada y é sempre 0 e x depende da constante adicionada ou subtraída	7	25,9
B – Identificaram que as coordenadas do vértice e do ponto de intersecção com o eixo das abscissas são iguais	5	18,6
C – Identificaram que a coordenada y é sempre zero	4	14,8
D – Responderam de forma incorreta	4	14,8
E – Não responderam	7	25,9
Total	27	100,0

A utilização desse aplicativo permitiu um estudo global e qualitativo das funções de 1º e 2º graus, explorando a conversão entre suas representações e, desse modo, articulando as variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada um dos registros algébrico, tabular e gráfico.

De fato, segundo Duval (2003, p.17):

> [...] a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção, com os eixos etc.) e, de outro lado, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1 etc.).

10 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO FINAL

Após a conclusão das oito atividades, optou-se por avaliar o trabalho desenvolvido, por meio da aplicação de um novo questionário composto por quatro perguntas abertas. Todos os alunos, que compõem as cinco turmas de 8ª série da escola pesquisada foram convidados a responder esse mesmo instrumento, que não exigia identificação. Para fins de análise, os questionários apresentavam um *layout* diferente no cabeçalho, com o objetivo de distinguir os discentes da amostra dos demais.

As questões visavam à avaliação do emprego da planilha nas aulas de Matemática, de forma a destacar as facilidades e/ou as dificuldades na sua utilização. Além disso, solicitou-se o estabelecimento de comparação entre as aulas no laboratório de informática e os encontros na sala de aula e, ainda, a descrição de aspectos positivos e/ou negativos em relação aos roteiros elaborados.

Destaca-se que todos os trinta integrantes da amostra responderam esse questionário final.

Em relação à primeira pergunta, 76,7% dos respondentes afirmaram achar válida a utilização da planilha nas aulas de Matemática, 13,3% consideraram, em parte, positivo e os demais não acharam adequada esse uso. As justificativas apresentadas foram organizadas e categorizadas de acordo com suas freqüências, conforme mostra a Tabela 35 na página a seguir. Ressalta-se, ainda, que, nessa tabela, o total corresponde ao número de justificativas apresentadas, sendo que mais de um aluno justificou sua resposta, utilizando mais de um argumento.

Tabela 35 – Distribuição das justificativas da questão A do Questionário Final

Justificativas	Freqüência	Percentual (%)
Propiciou uma forma diferente de desenvolver o conteúdo.	10	27
Facilitou a aprendizagem.	6	16,2
Facilitou a realização dos cálculos e a construção dos gráficos.	5	13,5
Propiciou a aprendizagem de uma nova ferramenta.	5	13,5
Aprimorou os conhecimentos sobre a planilha.	1	2,7
Despertou o interesse do aluno.	1	2,7
Associou-se ao trabalho realizado em sala de aula	1	2,7
Propiciou aplicabilidade da Matemática.	1	2,7
Algumas tarefas foram consideradas difíceis.	1	2,7
Acreditam que vão esquecer o que foi desenvolvido.	2	5,4
As tarefas foram trabalhosas.	1	2,7
Não aprenderam a utilizar a planilha.	1	2,7
Não se associou ao trabalho realizado em sala de aula.	2	5,4
Total	36	100,0

A seguir são transcritas quatro dessas respostas: “Sim, pois, com essa utilização, começamos a perceber a Matemática de uma maneira prática, mais próxima de nós, além de ser uma aula mais descontraída e menos cansativa, que quebra por alguns momentos a ‘mesmice’ de sala de aula”; “Eu considerei válida a utilização da planilha nas aulas de Matemática, porque ela facilita o desenvolvimento de cálculos e gráficos”; “Mais ou menos, teve algumas coisas que não entendi, mas em geral, eu achei fácil” e “Achei o uso do Excel algo que, de certa forma, não possui muita utilidade, pois traz pouco aprendizado, quando comparado ao tempo de dedicação.”

Na segunda questão, 50% dos respondentes afirmaram, apenas, que não apresentaram dificuldades. Enquanto 16,7% relataram que, nas primeiras atividades, necessitaram muito da intervenção da professora, mas, com o transcorrer das atividades, não pediram mais o seu auxílio. Esse fato pode ser observado mediante o seguinte relato: “No início do ano, eu não entendia nada das folhas e só conseguia fazê-las com ajuda. Durante o decorrer do ano, fui aprendendo a utilizar a planilha direito, e então consegui concluir os trabalhos sozinho.” Dentre as facilidades destacadas, aparecem: a realização dos cálculos pela planilha (6,7%), a precisão ao efetuar cálculos com números decimais (3,3%) e a construção de gráficos e tabelas (6,7%). Esses aspectos podem ser observados nas seguintes descrições: “Eu achei fácil, após um primeiro contato, utilizar a planilha, principalmente porque ela nos permite uma maior precisão ao usar números grandes, repetitivos e/ou com vírgula.”, “Foi fácil desenvolver os gráficos na planilha, ela facilitou o desenvolvimento das atividades” e “Com certeza, foi mais fácil do que resolver as funções no papel, pois víamos resultados práticos na planilha.”

Já, em relação às dificuldades apresentadas, ressaltam-se: elaboração das expressões algébricas que representam uma função a partir de um determinado problema (13,3%) e a complexidade na utilização da planilha (3,3%). “Às vezes, é meio complicado decifrar como é para montar as fórmulas no Excel” e “O programa Excel é um programa muito complexo e pouco usado pelos jovens, e isso nos torna muito dependentes dos peritos durante o trabalho.”

Para fins de análise, as respostas dadas à terceira questão foram subdivididas em duas categorias: aulas de Matemática com computador e sem computador. Ressalta-se que 83,3% dos participantes destacaram sua preferência pelas aulas na informática, sendo que 40% desses discentes apontaram mais de um aspecto positivo. E, apenas, 16,7% demonstraram preferência pelas aulas sem computador.

A Tabela 36 mostra a distribuição da freqüência das respostas referentes à primeira categoria.

Tabela 36 – Distribuição das apreciações da questão C do Questionário Final – aulas com computador

Justificativas	Freqüência	Percentual (%)
Diversifica a metodologia empregada.	18	51,4
Amplia conhecimentos sobre informática.	3	8,6
Torna as aulas são interativas.	3	8,6
Facilitam os cálculos e a construção gráfica.	5	14,3
Mostra a aplicabilidade da Matemática.	1	2,9
Propicia a distração.	1	2,9
Provoca demora em realizar as atividades.	2	5,7
Não exercita o raciocínio, pois a planilha faz os cálculos.	2	5,7
Total	35	100,0

Já a Tabela 37 apresenta a distribuição de freqüência das apreciações sobre as aulas de Matemática sem o uso do computador.

Tabela 37 – Distribuição das apreciações da questão C do Questionário Final – aulas sem computador

Justificativas	Freqüência	Percentual (%)
A aula rende mais.	3	60
Há maior concentração por parte dos alunos.	1	20
É mais fácil solucionar dúvidas com a professora.	1	20
Total	4	100,0

A última questão foi dividida em dois itens e solicitou a apreciação dos roteiros elaborados de forma a destacar seus pontos positivos e/ou negativos. Os aspectos positivos apontados estão descritos na Tabela 38, bem como a questão da freqüência.

Tabela 38 – Distribuição das apreciações da questão D do Questionário Final – aspectos positivos

Justificativas	Freqüência	Percentual (%)
Ajudaram a entender o conteúdo.	14	51,9
Facilitaram a utilização da planilha.	9	33,3
Estimularam a pensar.	1	3,7
Eram claros e objetivos.	1	3,7
Apresentaram atividades variadas.	1	3,7
Permitiram perceber a aplicabilidade da Matemática.	1	3,7
Total	27	100,0

"Os roteiros foram bem elaborados, houve exercícios repetidos que nos fizeram aprender bem. Fizemos vários gráficos para responder as questões, o que nos ajudou a aprender e a utilizar a planilha"; "Foram elaborados de forma que nos faça pensar e desenvolver os nossos conhecimentos a respeito do conteúdo" e "Os roteiros nos ajudaram a entender melhor como fazer os exercícios e a utilizar o Excel" são exemplos de aspectos positivos apontados por três desses estudantes.

Na Tabela 39, observam-se os pontos negativos apontados pelos participantes.

Tabela 39 – Distribuição das apreciações da questão D do Questionário Final – aspectos negativos

Justificativas	Freqüência	Percentual (%)
As questões eram de difícil compreensão.	12	63,2
A linguagem era difícil.	4	21,1
As atividades exigiam a escrita das conclusões.	1	5,3
Os roteiros eram extensos.	1	5,3
O computador era que fazia os cálculos.	1	5,3
Total	19	100,0

Em relação aos aspectos negativos, são transcritas as seguintes respostas: "Algumas questões eram complicadas e de difícil compreensão"; "A linguagem usada era muita matemática" e "Às vezes, não dá para entender as perguntas".

Através da descrição das dificuldades apresentadas pelos alunos, constata-se que essas se concentraram na compreensão do enunciado das questões. Para Duval (1993), esse tipo de problema exige, primeiramente, a compreensão do enunciado e a conversão da descrição discursiva dos objetos tratados para a escrita simbólica numérica ou literal e, a partir disso, torna-se necessário efetuar o tratamento matemático, por meio das operações aritméticas, da resolução de equações etc. Disso, resulta a importância da língua natural no processo de ensino da Matemática.

11 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho realizado propôs-se a investigar e a avaliar como ocorre o processo de compreensão do conceito de função, segundo a Teoria de Duval, em alunos do ensino fundamental – 8ª série – mediante a utilização da planilha.

Inicialmente, foi analisado o processo histórico do desenvolvimento do conceito de função e, a partir disso, constatou-se que sua evolução perpassou as diferentes representações e a sua formalização foi decorrência de uma longa investigação realizada por vários matemáticos. Além disso, esses estudiosos passaram por diversas etapas necessárias para a compreensão dessa noção: estabelecimento de conjecturas, explorações, análises dos resultados e, por fim generalizações. Respeitando as devidas proporções, os educadores devem propiciar aos estudantes a vivência dessas etapas, a fim de que possam, de fato, compreender esse conceito.

Para tanto, foram aplicadas oito atividades fundamentadas na Teoria dos Registros de Representação Semióticos de Raymond Duval, de forma a explorar simultaneamente as representações gráfica, tabular e algébrica das funções afim e quadrática. Enfatizou-se, também, o registro em língua natural, seja pela forma como foram apresentadas às tarefas, seja pela solicitação da escrita das conclusões obtidas após a execução das mesmas.

A análise das observações feitas e, principalmente, a apreciação dos protocolos de registros dos trinta participantes da pesquisa, descritas nos capítulos 7, 8, 9 e 10, possibilitou o levantamento de algumas conclusões que serão destacadas a seguir.

Os discentes participaram de forma efetiva, desde o início da aplicação das atividades, demonstrando interesse em aprender a utilizar os diversos recursos da planilha, procurando personalizar seus gráficos por meio da formatação da seqüência de dados, da área de plotagem e das linhas de grade.

As dificuldades encontradas concentraram-se na compreensão dos roteiros e, sobretudo, no entendimento das questões propostas. Fato que pôde ser comprovado logo na realização da primeira tarefa, no item que solicitava a escrita da expressão algébrica que representava o valor pago em relação à quantidade de álcool colocada no tanque, apenas 50% dos respondentes escreveram-na corretamente. Entretanto, no decorrer do trabalho, pôde-se constatar que os estudantes foram estabelecendo a conversão do registro em língua natural para a algébrica de forma mais autônoma. É pertinente sublinhar que, na última situação explorada, na segunda atividade, 86,2% dos respondentes utilizaram a lei de formação da função para a construção da tabela na planilha de maneira adequada. Atribuo essa melhora nos índices das respostas à necessidade de se explicitar a fórmula para se poder utilizar o *software*, isto é, para que fossem construídos as tabelas e os gráficos, foi preciso que os alunos “ensinassem a planilha” a calcular as imagens das funções para determinados valores de seu domínio, fazendo, dessa forma, com que houvesse reflexão sobre o problema apresentado.

Esse resultado nos remete à primeira questão da pesquisa: “Ao utilizar a planilha como recurso no processo de compreensão do conceito de função, como ocorre a coordenação dos registros de representação tabular, gráfico e analítico?”

Para Duval (1999, 2003), só há aprendizagem em Matemática se forem propostas situações que visem ao trabalho concomitante com, pelo menos, dois registros de representação de um mesmo objeto, tornando esse aspecto o caráter central para a atividade matemática e para o funcionamento cognitivo do pensamento.

De acordo com o referencial teórico adotado, as atividades realizadas na planilha objetivaram o trabalho concomitante com as diferentes representações das funções de 1º e 2º graus. Essa ferramenta proporciona a construção gráfica vinculada às expressões algébricas e às representações tabulares, permitindo a exploração, por parte dos usuários, das modificações ocorridas nos gráficos e nas tabelas, mediante as alterações dos parâmetros das funções.

O referido aspecto pôde ser observado, respectivamente, na terceira, sexta e oitava atividades. Tais tarefas exploraram o trabalho concomitantemente às representações algébricas, tabulares e gráficas. A partir da apreciação dos protocolos escritos, verificou-se que os discentes descreviam as alterações gráficas ocorridas com maior detalhamento à medida que avançavam na realização das atividades. As discussões realizadas no grupo permitiram, também, a constatação de que a utilização da planilha facilitou a articulação entre as representações das funções afim e quadrática.

Em relação à segunda questão da pesquisa: “Como são respondidas as questões propostas aos discentes em atividades que utilizam a planilha como recurso para a aprendizagem?”

Na execução das primeiras atividades, os estudantes solicitavam o auxílio da pesquisadora constantemente, fosse para o entendimento do funcionamento da planilha ou fosse para a compreensão das questões apresentadas. No transcorrer do trabalho, o número de estudantes que pediam ajuda diminuiu consideravelmente.

O registro das conclusões solicitadas em vários itens das atividades, em língua natural, mostrou-se bastante impreciso. Nos protocolos da maioria dos alunos, identificou-se que houve compreensão na íntegra ou em parte do que estava sendo questionado, porém, não houve utilização de argumentação clara e objetiva nessas respostas. Tal dificuldade pôde ser observada em várias tabelas que explicitaram a categorização das respostas dadas. Normalmente, a primeira categoria era composta pelas respostas completas, e as demais revelavam visões parciais sobre o tópico questionado.

Ressalta-se, também, que, na sétima atividade proposta, os alunos não perceberam a necessidade de demonstrar algebricamente como determinar os pontos notáveis da uma função quadrática. Em suas concepções, bastava determinar os referidos pontos por meio da utilização dos recursos da planilha, portanto, não ocorreu a percepção da necessidade de generalização desses conceitos.

Em relação à terceira questão: “De que forma a utilização da planilha pode contribuir no processo de apreensão do conceito de função afim e quadrática?”

Os estudantes, de maneira geral, conseguiram descrever os movimentos de rotação e translação ocorridos nos gráficos por meio da manipulação paramétrica, visto que a planilha permitiu a construção gráfica de várias funções em um único sistema cartesiano, o que facilitou a análise dessas alterações. A seqüência de situações propostas, na terceira, sexta e oitava atividades, proporcionou o trabalho com a família das funções afim e quadrática.

Constata-se, ainda, que as atividades, baseadas na transposição entre as diversas representações de uma função, aliadas à utilização da planilha, possibilitaram uma interpretação global das variáveis visuais, permitindo que os alunos se detivessem no entendimento das modificações gráficas ocorridas a cada alteração paramétrica, e não na construção gráfica por intermédio de várias substituições na expressão algébrica, como ocorre no trabalho feito com o uso de lápis e de papel.

Baseada em minha experiência, percebo que a geração de tabelas e gráficos, através da utilização de lápis e de papel, é bastante difícil, pois, tal tarefa demanda tempo, fazendo com que os discentes percam o foco do trabalho, detendo-se na realização de muitos cálculos.

Ao fazer uso da planilha, a conversão entre os diferentes tipos de registros de uma função é facilitada, possibilitando, assim, a experimentação, a visualização e a transposição de suas representações algébricas, tabulares e gráficas de forma dinâmica.

Outro aspecto a ser destacado é o fato de os discentes poderem identificar o(s) zero(s) de uma função afim ou quadrática como sendo a(s) raiz(es), respectivamente, de uma equação do 1º ou do 2º grau. Esse fato pode ser comprovado ao se aproximar o cursor do(s) zero(s) de uma função, pois a planilha fornece as coordenadas desse(s) ponto(s).

Na construção gráfica em mesmo plano cartesiano, os estudantes, às vezes, digitavam de forma incorreta alguma das fórmulas que definiam a família de uma determinada função. Ao analisarem a referida construção, esses discentes percebiam que havia algum erro, pois a representação gráfica não mantinha as características dessa família de curvas. Ao fazerem essa apreciação, os discentes selecionavam o intervalo de células onde fora escrita a expressão algébrica e podiam corrigir algum erro cometido nessa fórmula através de reedição do conteúdo da primeira célula e da propagação da correção para as demais e, dessa forma, o *software* atualizava o gráfico automaticamente. Esse recurso permitia, então, que os usuários observassem, instantaneamente, o efeito das alterações.

Em relação à última questão dessa pesquisa: “Como os discentes avaliam a utilização da planilha para a aprendizagem do conceito das funções afim e quadrática?”

Cerca de 90% dos participantes dessa pesquisa avaliaram de forma positiva - totalmente ou parcialmente - a utilização da planilha nas aulas de Matemática, considerando-a facilitadora da aprendizagem do conteúdo desenvolvido de modo diferente ao do método tradicional. Ademais, destacaram a facilidade na realização dos cálculos e na construção dos gráficos, o que propiciou a aprendizagem ou o aprimoramento do uso da ferramenta.

Os alunos realizaram a última atividade com facilidade, visto que a utilização do aplicativo proporcionou a retomada dos principais aspectos desenvolvidos no decorrer das tarefas anteriores, reforçando, além disso, o trabalho com as representações algébricas, tabulares e gráficas das funções. Constatou-se que, para responder as questões, alguns discentes observavam, de forma alternada, a representações tabulares e/ou gráficas.

Ressalta-se, ainda, que o fato de a pesquisadora acumular a função de professora das cinco turmas deva ser considerado como aspecto positivo, visto que não houve limitação ao número de aulas destinadas à coleta dos dados, sendo respeitado, dessa forma, o ritmo dos alunos na execução das tarefas. Tendo em vista esse aspecto, as atividades referentes à função afim foram desenvolvidas nos meses de abril e maio, ao passo que a função quadrática foi trabalhada no final de junho e no decorrer dos meses de agosto e setembro, após o trabalho com equações do 2º grau.

É pertinente sublinhar, ainda, que o primeiro questionário foi aplicado logo no início do ano letivo, a fim de que os estudantes selecionados para a amostra fossem escolhidos única e exclusivamente em razão da apreciação de suas respostas, sem haver nenhum outro tipo de interferência, quer fosse por afinidade com a pesquisadora, quer fosse pelo desempenho desses alunos na disciplina de Matemática.

Para a preservação de um ambiente favorável para a investigação, todos os discentes foram informados sobre os objetivos do trabalho no laboratório de informática e, além disso, houve a combinação prévia de que as atividades não iriam fazer parte da composição de suas notas trimestrais.

Por outro lado, pode ser considerada uma limitação dessa pesquisa o fato de a pesquisadora trabalhar com um grupo maior do que a amostra analisada. No entanto, essa restrição possibilitou a constatação de que é possível utilizar recursos de ambientes informatizados, em especial a planilha, na perspectiva de que o aluno formule conjecturas, teste hipóteses e reflita sobre resultados, em situações reais de aprendizagem.

Outra limitação a ser apontada refere-se ao fato de que na última atividade aplicada, na qual se utilizou o aplicativo, os participantes puderam comparar as funções afim e quadrática, destacando, oralmente, suas principais diferenças. No entanto, no roteiro, não foi solicitado que essas conclusões fossem escritas, limitando a análise desses resultados às anotações feitas pela pesquisadora.

Conclui-se, então, que, a utilização da planilha, de modo geral, com esse grupo de alunos, facilitou a compreensão do conceito de função na perspectiva de um trabalho que enfatizasse a conversão entre os registros de representação algébrico, tabular e gráfico, conforme preconiza a Teoria dos Registros de Representação Semióticos Raymond Duval.

Enfatiza-se, ainda, que não há garantia de mudanças expressivas no processo de ensino-aprendizagem apenas pela inserção de professores e alunos no mundo digital. É necessário, sobretudo, aliar, ao emprego dos recursos tecnológicos, uma metodologia que propicie a compreensão de conceitos, o desenvolvimento de procedimentos e o enfrentamento de novas situações, objetivando a ação consciente do aluno sobre o objeto em estudo.

Em última instância, sugere-se a realização de pesquisas, na área de Educação Matemática, que visem à exploração das potencialidades da planilha, a fim de que haja o desenvolvimento de outras funções, como as exponenciais, as logarítmicas e as trigonométricas.

REFERÊNCIAS

Borba, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirim Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRAGA, Ciro. **Função: a alma do ensino da matemática**. São Paulo: Annablume, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - 3º e 4º Ciclos. Brasília, 1998.

COUY, Lais; FROTA, Maria Clara Rezende. Representação e visualização no estudo de funções. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007,. Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007.1CD-ROM.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org.). **Educação matemática: Uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2008. p. 167-188.

DULLIUS, Maria Madalena; QUARTIERI, Marli Teresinha. Recursos computacionais nas aulas de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007,. Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007.1CD-ROM.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: DIDACTIQUE ET SCIENCES COGNITIVES, 5., 1993, Strasbourg. **Annales...** Strasbourg: IREM,1993.

______. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. **The Psycology of Mathematics Education** v.1, n. 1, p.2-26, Oct. 1999.

______. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

______. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 1, p. 103-131, Feb. 2006.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2005.

FERREIRA, Ana Cristina Andrejew. **O uso do computador como recurso mediador na disciplina de Matemática no Ensino Médio**. 2004. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - PUCRS, Porto Alegre, 2004.

FERREIRA, Antomar Araújo; GOMES, Elimar Cândida. Os aplicativos Cabri Géomètre II, Excel e Winplot no ensino de matemática na educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007,. Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007.1CD-ROM.

FIORENTINI, DARIO; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica e argumentação dedutiva. In: FRANCO, Sérgio Roberto Kieling (Org.). **Informática na Educação: estudos interdisciplinares**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2004. p. 107-132.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, 6., 1998, Brasília. **Anais eletrônicos RIBIE98.** Brasília: UnB, 1998.1 CD-ROM.

GODINO, Juan D.; BATANERO Carmen; FONT, Vicenç. Perspectiva educativa de las matemáticas. **Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de lãs matemática para maestros**. Granada: ReproDigital, 2003. p. 107-132.

GODINO, Juan D.; FONT, Vicenç. Didáctica del Razonamiento algebraico para maestros. **Didáctica de las Matemáticas para Maestros**. Granada. ReproDigital, 2004. p. 443-456.

GOMES, Romeu. A análise de dados em pesquisa qualitativa. In: MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). **Pesquisa Social: teoria método e criatividade**. Petrópolis: Vozes 1998. p. 67-80.

LOPES, Janice Pereira. **Fragmentação e aproximações entre a Matemática e a Física no contexto escolar: problematizando o conceito de função afim**. 2004. 205 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) -UFSC, Florianópolis, 2004.

LOPES, Wagner Sanches. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino**. 2003. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC, São Paulo, 2003.

MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. **Transição da Educação Básica para o Ensino Superior: A coordenação de Registros de Representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no Curso de Cálculo**. 2006. 233 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - PUC, São Paulo, 2006.

MENDONÇA, Maria do Carmo Domite; OLIVEIRA, Paulo César. Da Educação matemática: funções no centro das atenções. **Educação e Matemática**. Nº 54, p. 37-42, set/out. 1999.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Ciência, Técnica e Arte: O Desafio da Pesquisa Social In: MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). **Pesquisa Social: teoria método e criatividade**. Petrópolis: Vozes 1998. p. 9-29.

MORGADO, Maria José Lenharo. **Formação de professores de matemática para o uso pedagógico de planilhas eletrônicas de cálculo de análise de um curso a distância via internet**. 2003. 284 f. Tese (Doutorado em Educação) - UFSC, Florianópolis, 2003.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; MORETTI, Vanessa Dias. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Ciência & Educação**, v. 9, nº. 1, p. 67-82, abr. 2003.

MORAES, Roque. **Da noite ao dia: tomada de consciência de pressupostos assumidos dentro das pesquisas sociais**. Disponível em: <http://br.groups.yahoo.com> Acesso em 29 abr. 2007. (a)

______. Teoria e pesquisa Disponível em: <http://br.groups.yahoo.com> Acesso em: 21 abr. 2007. (b)

MORETTI, Méricles Thadeu. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, Sílvia Dias

Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 149-160.

PAIS, Luiz Carlos. **Educação Escolar e as Tecnologias da Informática**. Autêntica, 2005.

SANTOS, Fabio Vieira; SILVA, Karina Alessandra Pessôa; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. O uso do computador no estudo de funções no ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007,. Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007.1CD-ROM.

PELHO, Edelweiss Benez Brandão. **Introdução ao conceito de função:** a importância da compreensão das variáveis. 2003. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUCSP, São Paulo, 2003.

TINOCO, Lucia (Org.). **Construindo o conceito de função.** Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 2001.

VALENTE, Wagner. Educação Matemática e Política: a escolarização do conceito de função no Brasil. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo. Ano 9, nº. 12, p. 16-20, jun. 2002.

VASCONCELOS, Celso dos Santos. **Construção do conhecimento em sala de aula.** São Paulo: Libertad, 1996.

ZUFFI, Edna Maura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do Conceito de Função. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo. Ano 8, nº. 9, p. 10-16, abr. 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário inicial

Caro(a) aluno(a)

A fim de te conhecer melhor quanto à utilização dos recursos da tecnologia de informação, solicito tua colaboração para responderes o questionário a seguir.
Agradeço tua disponibilidade.

Elisabete Rambo Braga

A) Das atividades realizadas no computador (relacionadas abaixo), assinala quais tu utilizas.

( ) *Orkut*
( ) MSN
( ) Pesquisas escolares
( ) Digitação de trabalhos
( ) Jogos
( ) Envio de *email*
( ) Fazer *download* de arquivos de música MP3
( ) Outras __________________, __________________, __________________

B) Por quantas horas, em média, tu utilizas o computador diariamente?
____

C) Marca um "X" para cada item da tabela abaixo, de acordo com a freqüência que utilizas os seguintes recursos da tecnologia de informação:

Recursos	**Freqüência**				
Gerais	**Nunca**	**Algumas vezes**	**Muitas vezes**	**Sempre**	**Não conheço**
Processador de texto (*Word* ou outro)					
Planilha eletrônica (*Excel* ou outra)					
Recurso de apresentação (*Power Point* ou outro)					
Correio eletrônico					
Navegador (*Explorer, Firefox* ou outro)					

Recursos	**Freqüência**				
Específicos para a Matemática	**Nunca**	**Algumas vezes**	**Muitas vezes**	**Sempre**	**Não conheço**
Cabri Géomètre					
Winplot					

D) Cita outros recursos tecnológicos que tu utilizas.

____

____

E) Conheces outro(s) *software(s)* para trabalhares com Matemática? Qual(is)?

____

____

F) Marca um "X" para cada item da tabela abaixo, de acordo com o teu entendimento a respeito da utilização da planilha:

A planilha é utilizada para:	**Discordo**	**Concordo parcialmente**	**Concordo**
Construir tabelas			
Organizar dados			
Elaborar diagramas			
Executar cálculos (como uma calculadora)			
Desenhar			
Processar texto			
Controlar o orçamento			
Construir gráficos de funções			

G) Cita outro uso da planilha que tu conheces.

____

____

Dados Pessoais

Nome: ______________________________

Sexo: ( ) F ( ) M

Idade: ______ anos

Ano de ingresso nesta escola: __________

Escolaridade:

Pai
( ) Ensino Fundamental
( ) Ensino Médio
( ) Graduação
( ) Pós-Graduação: ( ) Mestrado
( ) Doutorado

Mãe
( ) Ensino Fundamental
( ) Ensino Médio
( ) Graduação
( ) Pós-Graduação: ( ) Mestrado
( ) Doutorado

APÊNDICE B – Atividades aplicadas

Atividade 1

Em diversos contextos do dia-a-dia, nos deparamos com situações que envolvem vários tipos de grandezas que estão relacionadas entre si. Dentre elas, podemos citar: a relação entre a quantidade de combustível consumida por um automóvel e a quantidade de quilômetros rodados; entre o imposto de renda pago por uma pessoa e seus rendimentos; entre a produção de lixo de uma cidade e sua densidade demográfica.

Todas essas situações nos transmitem a idéia de que, se uma grandeza variar, a outra mudará de valor, ou seja, a variação de uma das grandezas interfere na variação da outra.

A análise dessas interferências é o objetivo do estudo de funções. Dizemos que uma grandeza é função de outra quando há correspondência entre elas e quando, para cada medida de uma, corresponde uma única medida da outra.

As referidas variações e suas características podem ser descritas matematicamente por meio de tabelas, de expressões algébricas e de gráficos. A fim de tornar a idéia de função mais precisa, analisaremos as seguintes situações:

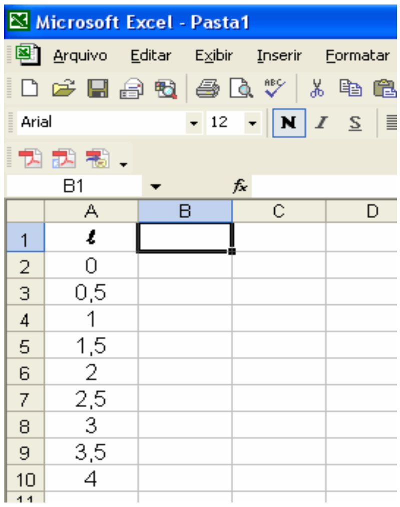
<u>Situação 1</u>

Em fevereiro de 2008, o preço de 1 litro de álcool custava R$ 1,69 num determinado posto de combustível de Porto Alegre.

a) Sendo ℓ a quantidade de litros de álcool comprada e **P(ℓ)** o preço total pago, completa a tabela abaixo:

ℓ (litros)	**P(ℓ)** (reais)
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	

b) Para facilitar os cálculos, segue o roteiro abaixo e constrói no programa *Excel* uma tabela semelhante a esta:



b_1) Reproduz a tabela acima no *Excel* e acrescenta outros valores para ℓ.

b_2) Cada quantidade de álcool colocada no tanque está associado a um único preço, e, portanto, o valor pago é função da quantidade de álcool colocada. A variável **P(ℓ)** depende de ℓ. Escreve a lei de formação. _________

b_3) Na 2ª coluna da 1ª linha (célula B1) da tabela que construíste no *Excel*, escreve a lei da função **P(ℓ)**.

b_4) O *Excel* calcula automaticamente os valores de **P(ℓ)** para cada valor de ℓ. Para isso, seleciona a célula B2 (2ª coluna x 2ª linha), digita o sinal de igualdade (=) e, logo a seguir, a respectiva lei de formação. Na sintaxe do *Excel*, o sinal de multiplicação corresponde ao "asterisco" (*) e, para incluir a variável ℓ na fórmula, deve-se selecionar a célula ao lado (A2), a qual contém o valor dos litros. No *Excel*, não é necessário digitar a lei de formação em cada linha que compõe a tabela; basta selecionar a célula que contém a fórmula recém digitada e, posicionando o cursor no canto inferior direito da célula, arrastá-lo até o fim da tabela (de cima para baixo, sempre sobre a coluna B).

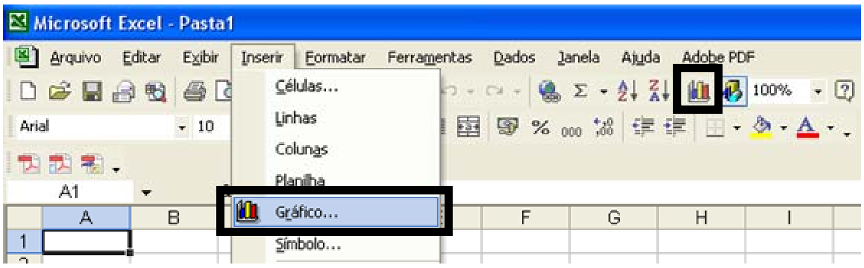
c) As variáveis ℓ e **P(ℓ)** são diretamente proporcionais? São inversamente proporcionais? Ou não há relação de proporcionalidade entre elas? Justifica a tua resposta. ____

____

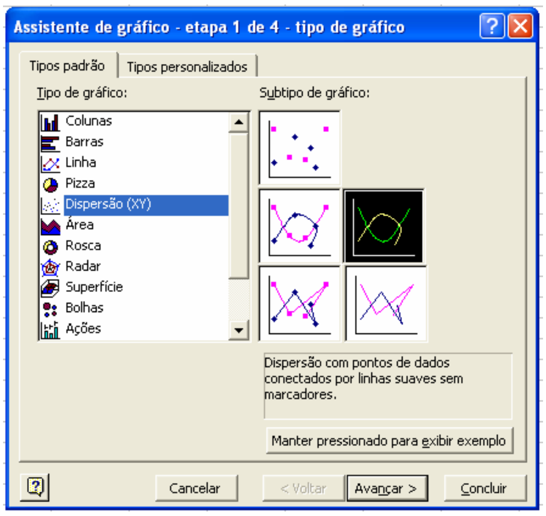
____

d) Para a construção do gráfico, segue as seguintes instruções:

d_1) Seleciona toda a tabela. Em seguida, no menu **Inserir**, clica na opção **Gráfico**, conforme mostra a figura a seguir.



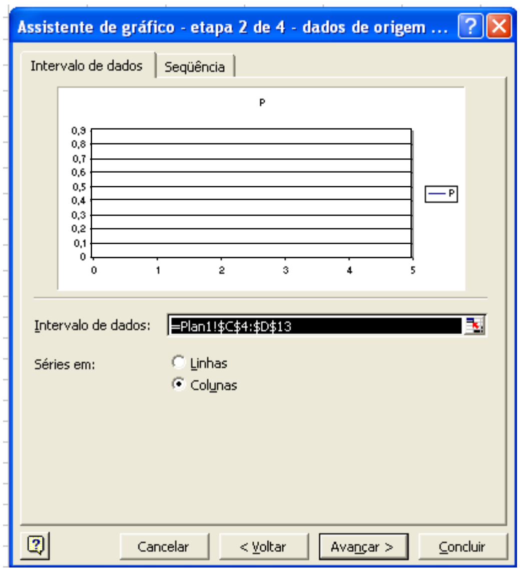
d$_2$) Uma caixa de diálogo chamada **Assistente de gráfico** se abrirá.



d$_3$) Em **Tipo de gráfico**, seleciona a opção **Dispersão** Dispersão (XY) e, em **Subtipo de gráfico**, escolhe a "dispersão com pontos de dados conectados por linhas suaves sem marcadores", conforme mostra a figura acima.

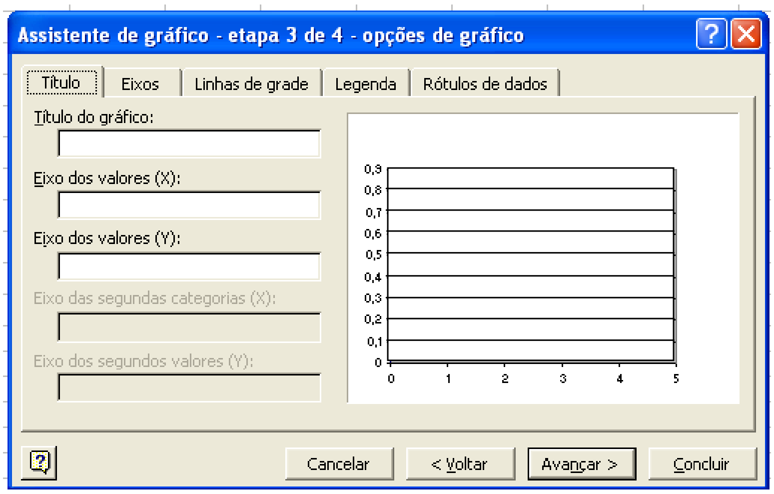
d$_4$) Clica no botão Avançar > .

d$_5$) Na guia **Intervalos de dados**, seleciona "Séries em colunas".



d_6) Clica no botão Avançar > .

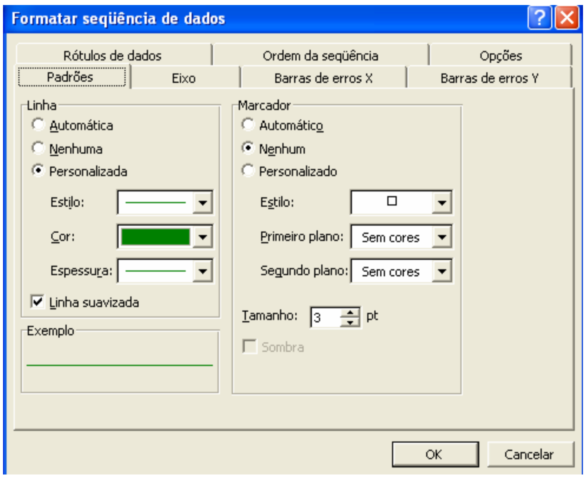
d_7) Na guia **Título**, digita o título do gráfico. Na mesma janela, define o nome do eixo x (abscissa) e do eixo y (ordenada).



d_8) Clica no botão Avançar > .

d_9) Para posicionar o gráfico, seleciona a opção: **Como objeto em: plan 1** e clica no botão Concluir .

d_{10}) Se quiseres alterar as cores ou o tipo de espessura da linha do teu gráfico, deves fazer o seguinte: posiciona a seta sobre a área do gráfico e clica no botão direito do *mouse*. Após, seleciona a opção Formatar seqüências de dados... e, em seguida, escolhendo a guia **Padrões**, configura o gráfico a teu critério, conforme mostra o exemplo da figura a seguir:



d_{11}) Também podes formatar a área de plotagem e as linhas de grade de maneira semelhante à da formatação do gráfico.

e) Que tipo de gráfico obtiveste?______________________________________

A variável ℓ pode assumir qualquer valor real igual ou superior a zero. O gráfico dessa função é uma linha contínua que começa em (0,0) e prolonga-se indefinidamente no sentido ascendente. A referida situação é um exemplo de **função afim**.

f) Qual o valor gasto ao abastecer o tanque com 15,5 litros de álcool? Escreve o cálculo correspondente. ____

g) Supondo que foram gastos R$ 40,00 com o abastecimento de um carro com álcool no referido período, quantos litros desse combustível foram colocados no tanque? Escreve o cálculo realizado para determinar a solução solicitada. _________
____
____

Situação 2

Uma empresa de assistência técnica cobra uma taxa de visita de R$ 55,00 mais R$ 18,00 por hora trabalhada. O preço **P** depende das horas trabalhas **h**, portanto, **P** é função de **h**.

a) Qual é a lei de formação dessa função? ______________________________

b) Constrói uma tabela na planilha que relaciona o preço cobrado por essa empresa com o número de horas trabalhadas. Escolhe, no mínimo, **dez** valores para a variável **h**. Segue os passos do **item b** do exercício anterior.

c) Existe relação de proporcionalidade entre as variáveis **P** e **h**? Justifica tua resposta. ____
____
____

d) Constrói o gráfico correspondente a essa função, a partir dos dados obtidos no item anterior. Segue o roteiro para construção gráfica do **item d** da atividade anterior.

e) Em que ponto o gráfico dessa função intercepta o eixo das ordenadas? O que representa esse ponto? ____________________________________

f) Qual o valor cobrado por um serviço que empregou 2 horas e 30 minutos de mão-de-obra?____

Faze uma apreciação do trabalho realizado, descrevendo tuas facilidades e dificuldades.
____
____
____
____
____

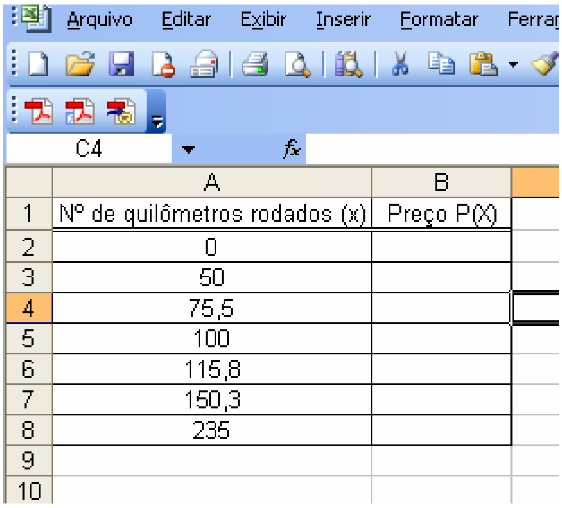
Atividade 2

Observa outras situações que expressam a idéia de função:

<u>Situação 3</u>

Paulo saiu de férias e alugou um carro popular para fazer uma viagem. A diária do aluguel para esse tipo de carro, em uma determinada locadora de Porto Alegre, corresponde a uma taxa fixa de R$ 27,00, mais R$ 0,45 por quilômetro rodado. Esse tipo de tarifação é denominado Diária Controlada.

a) Reproduz a tabela abaixo no *Excel* que relaciona o número de quilômetros rodados x com o valor pago pela diária do aluguel e a completa:



	A	B
1	Nº de quilômetros rodados (x)	Preço P(X)
2	0	
3	50	
4	75,5	
5	100	
6	115,8	
7	150,3	
8	235	
9		
10		

b) Para que o *Excel* calcule automaticamente os valores de **P(x)** para cada valor de **x,** seleciona a célula B2 (2ª coluna x 2ª linha), digita o sinal de igualdade (=) e, logo a seguir, a respectiva lei de formação.
Não te esqueças de que, na sintaxe do *Excel*, o sinal de multiplicação corresponde ao "asterisco" (*) e, para incluir a variável **x** na fórmula, seleciona a célula ao lado (A2), a qual contém o número de quilômetros rodados.
Clica na célula que contém a fórmula recém digitada e, posicionando o cursor no canto inferior direito da célula, arrasta-o até o fim da tabela, a fim de que os demais valores sejam calculados.

c) É correto afirmar que o preço pago pela diária do aluguel é função da quantidade de quilômetros rodados em um determinado dia? Por quê? _____
____
____

d) Determina a sentença matemática que relaciona o preço pago por uma diária do carro (**P**) e o número de quilômetros rodados (**x**) em um dia. ______

e) Constrói o gráfico, utilizando a planilha, que relaciona a quantidade de quilômetros com o valor pago pela diária do aluguel.

Segue o seguinte roteiro para a construção no *Excel*:

e_1) Seleciona toda a tabela e clica na opção **Gráfico** .

b_2) Na caixa de diálogo **Assistente gráfico**, escolhe, na guia **Tipo de gráfico,** a opção Dispersão (XY) e, na guia **Subtipo de gráfico,** a "dispersão com pontos de dados conectados por linhas suaves sem marcadores" .

e_3) Clica no botão Avançar >.

e_4) Na guia **Intervalos de dados**, seleciona **Séries em colunas**.

e_5) Novamente, clica no botão Avançar > .

e_6) Na guia **Título**, digita o título do gráfico, bem como o nome dos eixos da abscissa e da ordenada.

e_7) Clica em Avançar >.

e_8) Para posicionar o gráfico, seleciona a opção: **Como objeto em: plan 1** e clica no botão Concluir.

e_9) Se quiseres, podes formatar a seqüência de dados, a área de plotagem ou as linhas de grade, posicionando a seta sobre a área a ser modificada, clicando no botão da direita do *mouse* e selecionando um dos seguintes itens: Formatar seqüências de dados..., Formatar área de plotagem... ou Formatar linhas de grade... .

f) Nessa primeira situação, existe alguma relação de proporcionalidade? Justifica tua resposta. ____

____

____

<u>Situação 4</u>

Um vendedor recebe um salário mensal fixo de R$ 800,00 e, além disso, uma comissão de 4% sobre o total do que vende.

a) Sendo v o valor das vendas desse trabalhador e S o seu ganho mensal, constrói uma tabela na planilha que relaciona essas grandezas. Supõe diversos valores de venda e utiliza as **dicas** do **item b,** da situação anterior, para a construção da referida tabela.

b) As variações v e S são diretamente proporcionais? Ou indiretamente proporcionais? Ou, então, não há relação de proporcionalidade entre elas?

____

____

____

c) A variável S depende de v. Temos uma função? Qual é a sua fórmula? _____

____

d) Constrói, na planilha, o gráfico que representa essa situação. Segue o roteiro do i**tem e** da situação anterior.

e) Com base nessas informações, quanto esse vendedor precisará vender para que seu ganho mensal seja igual a R$ 1 000,00? ______________________

Situação 5

Para incentivar o pagamento adiantado, algumas administradoras de condomínio oferecem descontos de 1% para cada dia de antecipação na data do pagamento, podendo antecipar, no máximo, 10 dias. Sabendo que o valor de um determinado condomínio é de R$ 850,00, responde as seguintes questões:

a) Qual a expressão algébrica que relaciona o valor do condomínio **V** com o número de dias de antecipação do pagamento **n**. ________________________

b) Quanto um condômino irá pagar se efetuar o pagamento com 5 dias de antecedência?____

c) Podemos atribuir valores negativos para **n**? Por quê?___________________

____

d) Podemos atribuir valores não inteiros para **n**? Justifica tua resposta. _______

____

e) Constrói, no *Excel*, uma tabela com todas as possibilidades de desconto.

f) A partir da tabela construída no item anterior, constrói o gráfico que relaciona o valor pago pelo condômino **V** e o número de dias de antecipação do pagamento (**n**).

g) Que tipo de dispersão deve ser utilizada na construção desse gráfico? Por quê? ____

____

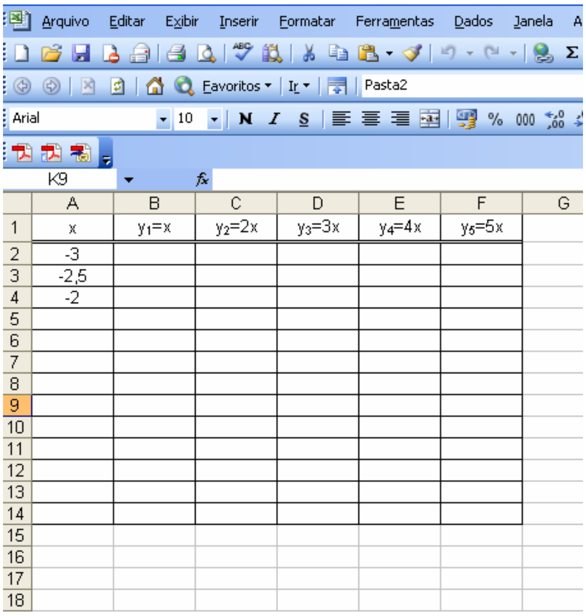
____

Atividade 3

Situação 6

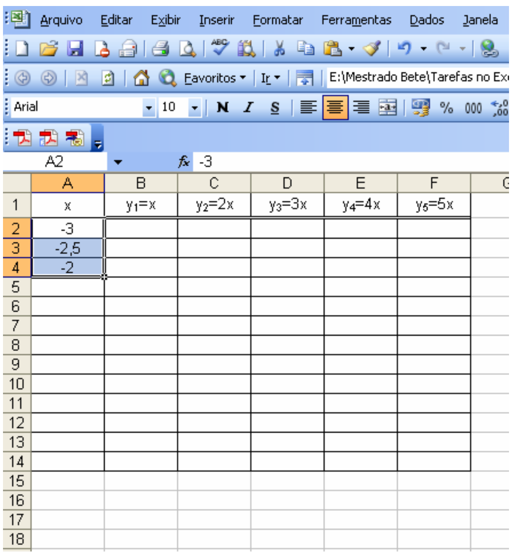
Constrói, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $y_1 = x$, $y_2 = 2x$, $y_3 = 3x$, $y_4 = 4x$ e $y_5 = 5x$, utilizando o *Excel*.

Para tanto, reproduz a tabela abaixo na planilha, seguindo o roteiro descrito:



a) Digita nas células A2, A3 e A4, respectivamente os valores, -3; -2,5 e -2.

b) Seleciona as referidas células, conforme mostra a figura abaixo:



c) Após, arrasta a seta até a célula A14, de forma que apareçam os números de -3 a 3, com variação de 0,5.

d) Na célula B2, digita o sinal de "=", o coeficiente da função, o "*" que corresponde ao sinal de multiplicação e, por último, seleciona a célula A2.

e) Agora, clica na célula que contém a fórmula digitada, posicionando adequadamente a seta sobre a mesma e arrasta-a até o fim dessa coluna.

f) Repete os procedimentos dos **itens d** e **e** para as funções $y_2 = 2x$, $y_3 = 3x$, $y_4 = 4x$ e $y_5 = 5x$.

g) Seleciona toda a tabela e, em seguida, no menu **Inserir**, clica na opção **Gráfico**.

h) O que faz a inclinação da reta variar em relação ao eixo das abscissas?

____

____

____

i) Em que ponto os gráficos dessas funções interceptam o eixo x?

____

____

____

<u>Situação 7</u>

a) Utiliza os procedimentos citados anteriormente e constrói os gráficos $y_1 = -x$, $y_2 = -2x$, $y_3 = -3x$, $y_4 = -4x$ e $y_5 = -5x$ em um único plano cartesiano.

Dica: Podes copiar a tabela da tarefa anterior, alterando apenas a lei de formação de cada função.

b) Compara-os com os gráficos do exercício anterior. Explica o que os diferencia.

____

____

____

Os gráficos construídos são exemplos de **função linear**. A função linear é um caso particular da função afim. Sua lei é $y = ax$ com $a \neq 0$.

c) O que ocorre com o gráfico de uma função linear quando o coeficiente de x é positivo? E quando é negativo?

____

____

____

<u>Situação 8</u>

a) Constrói, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções $y_1 = x$, $y_2 = x+1$, $y_3 = x+2$, $y_4 = x+3$ e $y_5 = x+4$.

Dica: Podes copiar a tabela da primeira tarefa, alterando apenas a lei de formação de cada função.

b) Constrói, no mesmo sistema, os gráficos das funções $y_1 = x$, $y_6 = x-1$, $y_7 = x-2$, $y_8 = x-3$ e $y_9 = x-4$.

c) Compara os gráficos construídos nos itens 3 e 4 com a função $y_1 = x$. O que acontece com o gráfico, na medida em que somamos ou subtraímos uma constante positiva da variável x?

____

____

d) Para cada uma das seguintes funções abaixo, determina o ponto em que cada gráfico intercepta o eixo x.

Função	**Para qual valor de x tem-se $y = 0$?**
$y_1 = x$	
$y_2 = x+1$	
$y_3 = x+2$	
$y_4 = x+3$	
$y_6 = x-1$	
$y_7 = x-2$	
$y_8 = x-3$	

Denomina-se zero ou raiz de uma função $y = ax + b$ com $a \neq 0$, o valor de x que anula a função. Esse valor é dado pela raiz da equação $ax + b = 0$.

Geometricamente, o zero de uma função afim é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo x.

e) A partir do gráfico, analisa para quais valores de x cada uma das seguintes funções é positiva e/ou negativa.

Função	**Para quais valores de x tem-se $y > 0$?**	**Para quais valores de x tem-se $y < 0$?**
$y_1 = x$		
$y_2 = x+1$		
$y_3 = x+2$		
$y_5 = x+3$		
$y_6 = x-1$		
$y_7 = x-2$		
$y_8 = x-3$		

Atividade 4

Na atividade anterior, vimos que o zero ou a raiz de uma função $y = ax + b$ com $a \neq 0$ é o valor de x que anula a função. Esse valor é dado pela raiz da equação $ax + b = 0$.

Situação 9

Os gráficos de duas das funções abaixo se interceptam-se em um mesmo ponto no eixo x. Identifica, algebricamente, as funções que determinam esses gráficos.

a) $y = x + 2$

b) $y = x + 4$

c) $y = 3x + 6$

d) $y = -2x + 2$

Situação 10

Geometricamente, o zero de uma função afim é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo x.

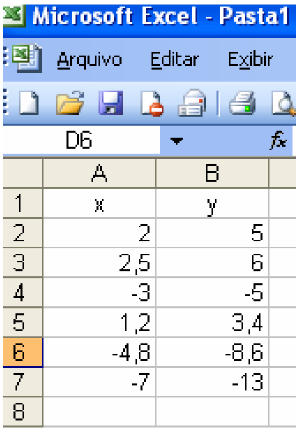
Constrói, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções da atividade1, utilizando o *Excel.*

A partir análise dos gráficos construídos, responde:

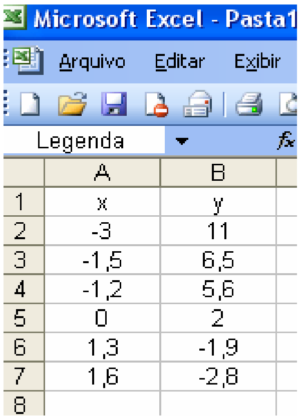
Função	**Para quais valores de x tem-se $y > 0$?**	**Para quais valores de x tem-se $y < 0$?**
$y = x + 2$		
$y = x + 4$		
$y = 3x + 6$		
$y = -2x + 2$		

Situação 11

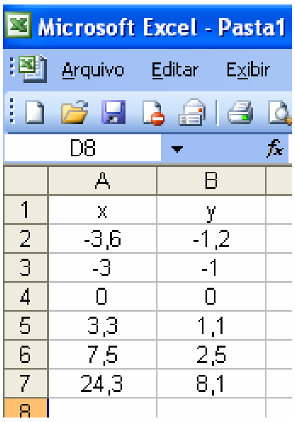
Nas tabelas abaixo, y é função de x. Em cada caso, descobre e escreve a fórmula para obter y.



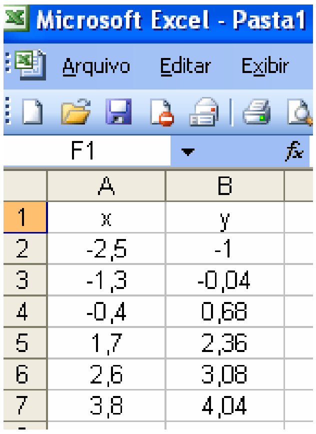
	A	B
1	x	y
2	2	5
3	2,5	6
4	-3	-5
5	1,2	3,4
6	-4,8	-8,6
7	-7	-13
8		



	A	B
1	x	y
2	-3	11
3	-1,5	6,5
4	-1,2	5,6
5	0	2
6	1,3	-1,9
7	1,6	-2,8
8		

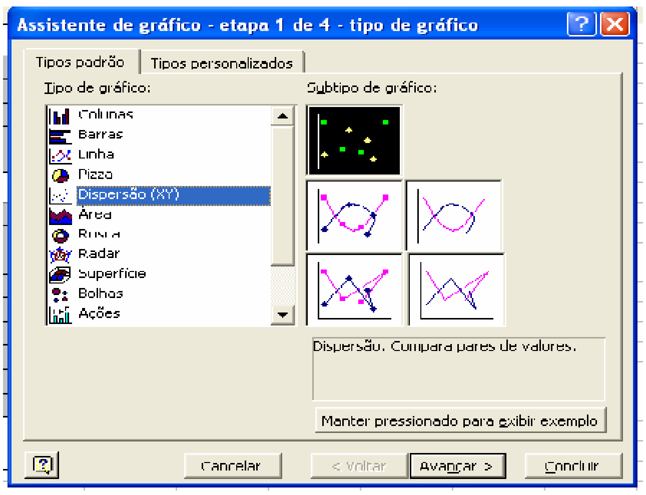


	A	B
1	x	y
2	-3,6	-1,2
3	-3	-1
4	0	0
5	3,3	1,1
6	7,5	2,5
7	24,3	8,1
8		



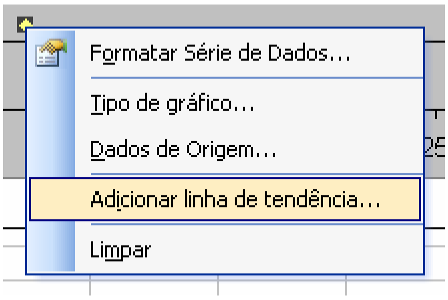
	A	B
1	x	y
2	-2,5	-1
3	-1,3	-0,04
4	-0,4	0,68
5	1,7	2,36
6	2,6	3,08
7	3,8	4,04

Reproduz as tabelas acima na planilha e constrói seus respectivos gráficos. Para essa construção gráfica, utiliza a "Dispersão. Compara pares de valores", conforme mostra a figura a seguir.



Caso não tenhas descoberto alguma das fórmulas, segue as seguintes instruções:

e) Posiciona a seta sobre a série de dados da função que desejas descobrir a lei de formação e clica no botão direito do *mouse*. A seguir, seleciona a opção **Adicionar linha de tendência,** conforme mostra a figura abaixo:



f) Na guia **Tipo**, seleciona a "Tendência linear".

g) Clica no botão 

.

h) Agora, posiciona a seta próxima à linha de tendência e clica, novamente, no botão direito do *mouse*. Após, escolhe a opção 

e, em seguida, na guia **Opções**, seleciona "Exibir equação no gráfico". Automaticamente, o *Excel* mostrará a lei de formação da referida função.

<u>Situação 12</u>

Em um parque de diversões, existem duas formas de compra de bilhetes:

- *Bilhete especial:* R$ 68,40 - com direito a brincar em todos os brinquedos quantas vezes quiser.
- *Bilhete normal*: R$ 5,70 - para brincar em cada brinquedo.

Chama de x o número de brinquedos (repetidos ou não) a serem utilizados por uma pessoa.

c) Escreve a lei de cada função. ______________________________

d) Constrói, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções do **item a**. Para tanto, utiliza a planilha.

e) Analisa os gráficos construídos e responde: Em que situação é mais econômico comprar o bilhete especial? E o bilhete normal?______________

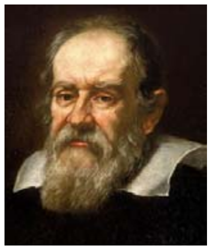
____

____

____

Atividade 5

Situação 1



Galileu Galilei (1564-1642) foi um importante astrônomo italiano do início do século XVII que muito contribuiu com a matemática. Com apenas vinte e cinco anos de idade, Galileu era professor de matemática da Universidade de Pisa, na Itália. Durante o período em que ministrou suas aulas em Pisa, realizou diversas experiências públicas sobre o movimento de queda livre.

Certa vez, ele deixou cair dois pedaços de metal do alto da Torre de Pisa, sendo que um deles tinha uma massa dez vezes maior do que o outro. Contrariando a idéia de Aristóteles, segundo a qual um corpo, com maior massa, cairia mais rapidamente, os dois pedaços se chocaram no chão praticamente no mesmo instante.

Após vários experimentos, Galileu verificou que, desprezada a resistência do ar, todo corpo abandonado de uma altura próxima à superfície da Terra cai em queda livre, independentemente de seu tamanho, massa ou forma.

Em outras palavras, Galileu Galilei descobriu que a distância percorrida por um corpo em queda livre é função do tempo e que essa distância é dada pela seguinte expressão algébrica:

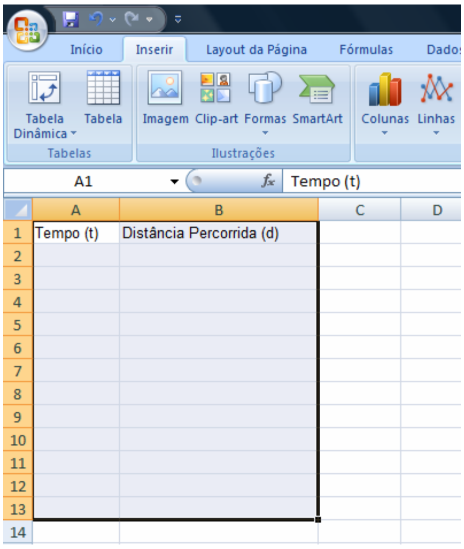
$$d(t)=\frac{1}{2}gt^2 \text{, em que:}$$

$d(t)$ é a distância percorrida, em metros, pelo corpo até chegar ao chão;

g é a aceleração da gravidade na Terra, aproximadamente $9{,}8\ m/s^2$;

t é o tempo, em segundos, que o corpo demora para chegar ao chão.

a) Constrói uma tabela na Planilha, conforme a figura a seguir, que relacione o tempo com a distância percorrida por um objeto em queda livre. Escolha, no mínimo, dez valores para a variável t.



b) É possível considerarmos valores negativos para t nessa situação? Justifica tua resposta.

c) Segue, abaixo, o roteiro abaixo para definir a fórmula que calcula a distância percorrida em função do tempo.

c_1) Seleciona a célula B2, digita o sinal de igualdade (=) e, logo a seguir, a respectiva fórmula. Lembra-te que, na sintaxe do *Excel*, o sinal de multiplicação corresponde ao “asterisco” (*), e o sinal de potenciação, ao “acento circunflexo” (^).

c_2) Agora, seleciona a célula que contém a fórmula e, posicionando o cursor no seu canto inferior direito, arrasta-o até o fim da tabela.

d) Ao dobrar o tempo de queda, o que ocorre com a variável distância?

e) E, quando quadruplica o tempo, o que ocorre com a distância?

f) Ao multiplicarmos o valor do tempo por determinado fator, por quanto deveremos multiplicar a distância percorrida a fim de mantermos a correspondência?

g) A distância percorrida por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao ________________ do tempo que esse corpo leva para chegar ao chão.

h) De acordo com a função estabelecida por Galileu, qual a distância percorrida por um objeto em queda livre, que demorou $1{,}5\,s$ para chegar ao chão? Escreve o cálculo correspondente.

____

____

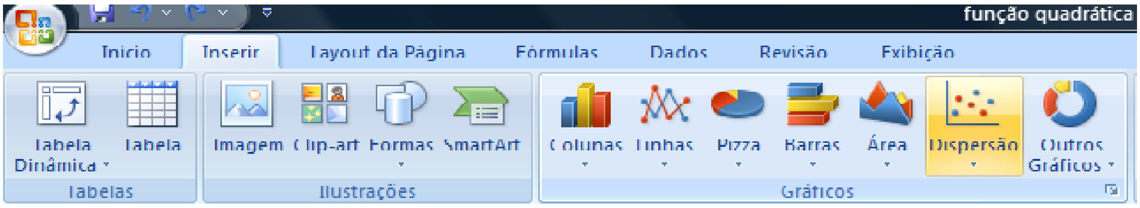
i) Supondo que um objeto foi largado a uma altura de $78{,}4\,m$, quanto tempo ele leva para atingir o chão? Novamente, escreve o cálculo correspondente.

____

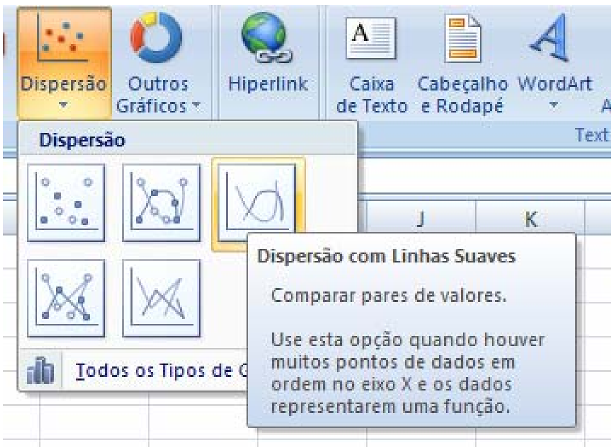
____

j) A partir da tabela do **item a**, constrói o gráfico que representa essa situação no *Excel*, seguindo o seguinte roteiro:

j_1) Seleciona toda tabela. Em seguida, no menu **Inserir**, clica na opção **Dispersão**, conforme mostra a figura abaixo:

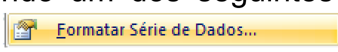


j_2) Em "Dispersão", seleciona a opção "Dispersão com Linhas Suaves".



j_3) Se quiseres, podes formatar a área de plotagem, as linhas de grade ou a série de dados, posicionando o cursor sobre a área a ser modificada, clicando no botão da direita do mouse e selecionando um dos seguintes itens: 

, 

ou 

O gráfico de uma função quadrática é chamado de ***parábola***. Nessa primeira situação, podemos considerar, apenas, os valores positivos para t, isto é, t varia no conjunto dos números reais positivos.

Situação 2

a) Se não houvesse essa restrição, como ficaria o gráfico?

Dica: Para responder essa questão, constrói na Planilha o gráfico da função $y = 4{,}9x^2$, com x variando no conjunto dos números reais.

____

____

b) Em que ponto o gráfico construído intercepta o eixo x?__________________

c) Para quais valores de x tem-se a função $y = 4{,}9x^2$ decrescente?__________

d) E para quais valores de x essa função é crescente?____________________

Atividade 6

Uma função chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** quando, para todo $x \in \Re$, tem-se $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

<u>Situação 3</u>

a) Utiliza o *Excel* para construir os gráficos das seguintes funções, a partir das respectivas tabelas.

a$_1$) $y = -2x^2 + 8$

	A	B
1	x	y=-2x²+8
2	-4	
3	-3	
4	-2	
5	-1	
6	0	
7	1	
8	2	
9	3	
10	4	
11		

a$_2$) $y = x^2 - 6x + 11$

	A	B
16	x	y=x²-6x+11
17	-1	
18	0	
19	1	
20	2	
21	3	
22	4	
23	5	
24	6	
25	7	

a$_3$) $y = -x^2 + 10x - 25$

	A	B
34	x	y=-x²+10x-25
35	1	
36	2	
37	3	
38	4	
39	5	
40	6	
41	7	
42	8	
43	9	

a$_4$) $y = x^2 - 6x$

	A	B
49	x	y=x²-6x
50	-1	
51	0	
52	1	
53	2	
54	3	
55	4	
56	5	
57	6	
58	7	

a5) $y = x^2 + 6x + 9$

	A	B
64	x	y=x²+6x+9
65	-7	
66	-6	
67	-5	
68	-4	
69	-3	
70	-2	
71	-1	
72	0	
73	1	

a6) $y = -2x^2 - 1$

	A	B
79	x	y=-2x²-1
80	-4	
81	-3	
82	-2	
83	-1	
84	0	
85	1	
86	2	
87	3	
88	4	

b) Denominamos vértice da parábola o ponto que a separa em duas partes: uma sempre crescente e outra sempre decrescente. Em cada uma das funções acima, analisa o gráfico construído e determina as coordenadas do vértice.

b1) $y = -2x^2 + 8$

b2) $y = x^2 - 6x + 11$

b3) $y = -x^2 + 10x - 25$

b4) $y = x^2 - 6x$

b5) $y = x^2 + 6x + 9$

b6) $y = -2x^2 - 1$

c) Existe algum eixo de simetria nas parábolas construídas anteriormente? Em caso afirmativo, explica qual é esse eixo.

---

i) Tu deves ter verificado que a parábola sempre intercepta o eixo das ordenadas em apenas um ponto. Determina, em cada gráfico, as coordenadas do ponto de intersecção da parábola com o eixo y.

d1) $y = -2x^2 + 8$

d2) $y = x^2 - 6x + 11$

d3) $y = -x^2 + 10x - 25$

d4) $y = x^2 - 6x$

d5) $y = x^2 + 6x + 9$

d6) $y = -2x^2 - 1$

j) O que as coordenadas do ponto de intersecção da parábola com o eixo y têm em comum?

---

k) A parábola pode interceptar o eixo das abscissas em dois ou em um ponto ou, ainda, não interceptar esse eixo. Esses pontos de intersecção com o eixo das abscissas são denominados de zeros da função.

Determina os zeros de cada uma das funções abaixo, caso ele(s) exista(m).

f_1) $y = -2x^2 + 8$

f_2) $y = x^2 - 6x + 11$

f_3) $y = -x^2 + 10x - 25$

f_4) $y = x^2 - 6x$

f_5) $y = x^2 + 6x + 9$

f_6) $y = -2x^2 - 1$

l) Além disso, a parábola pode ter sua concavidade ou abertura voltada para cima ou para baixo. Observa os gráficos construídos e responde: a concavidade de uma parábola depende do quê?

---

m)A partir dos gráficos construídos no **item a**, analisa para quais valores de x cada uma das funções é positiva e/ou negativa e completa a tabela abaixo:

Função	**Para quais valores de x tem-se $y > 0$?**	**Para quais valores de x tem-se $y < 0$?**
$y = -2x^2 + 8$		
$y = x^2 - 6x + 11$		
$y = -x^2 + 10x - 25$		
$y = x^2 - 6x$		
$y = x^2 + 6x + 9$		
$y = -2x^2 - 1$		

Atividade 7

Situação 4

Interseção com o eixo das ordenadas

a) Constrói, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções: $y_1 = x^2 - 7x + 15{,}5$, $y_2 = x^2 - 5$, $y_3 = -x^2 + 25$ e $y_4 = -3x^2 - 2x - 12{,}7$, utilizando a planilha.

Para tanto, reproduz a tabela abaixo:

	A	B	C	D	E
1	x	y1=x²-7x+15,5	y2=x²-5	y3=-X²+25	y4=-3x²-2x-12,7
2	-6				
3	-5				
4	-4				
5	-3				
6	-2				
7	-1				
8	0				
9	1				
10	2				
11	3				
12	4				
13	5				
14	6				

a_1) Observa, em cada um dos gráficos construídos, o ponto de interseção com o eixo das ordenadas. Qual o valor da abscissa em cada um desses pontos?

____

a_2) Então, para determinar o valor da ordenada desse ponto de interseção, basta calcular o valor numérico de $y = ax^2 + bx + c$ para x = ____.

a_3) Agora, realiza esses cálculos.

a_4) Portanto, a parábola intercepta o eixo y no ponto (__;__).

Situação 5

Interseção com o eixo das abscissas

Já vimos que os zeros ou raízes de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos relembrar alguns pontos sobre as equações do 2º grau:

> ***Equação***: $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e $c \in \Re$ e $a \neq 0$.
>
> ***Raízes***: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.
>
> Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e diferentes.
>
> Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais e iguais.
>
> Se $\Delta < 0$, então a equação não possui raízes reais.

E, portanto, para determinar os zeros ou raízes de uma função $y = ax^2 + bx + c$, temos que analisar o Δ (discriminante) da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

a) Verifica se o gráfico das funções quadráticas abaixo intercepta o eixo x, a partir da análise do valor do Δ.

Função	Valor de Δ	O gráfico intercepta o eixo das abscissas? Em qual(is) pontos?
a1) $y_1 = x^2 - x + 0{,}25$		
a2) $y_2 = x^2 + 6$		
a3) $y_3 = x^2 - 2x - 3$		
a4) $y_4 = -x^2 + 0{,}4x$		
a5) $y_5 = -2{,}5x^2 - 10$		
a6) $y_6 = -x^2 + 2x - 1$		

b) Agora, constrói o gráfico de cada uma das funções acima, utilizando a planilha.

c) Mediante a análise do discriminante, o que podemos afirmar sobre os zeros de uma função quadrática?

___

___

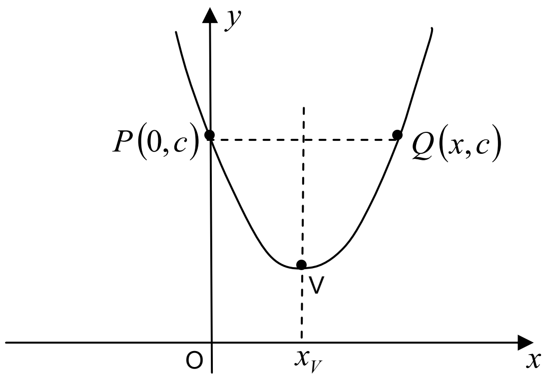
___

Situação 6

Coordenadas do vértice

Sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola cujo eixo de simetria é uma reta vertical que passa pelo vértice.

Todos os pontos desse eixo de simetria têm a mesma abscissa que é x_V do vértice V, conforme mostra a figura abaixo:



Ao substituirmos y por c, na lei da função, observamos que as raízes da equação obtida são as abscissas de **P** e **Q**.

a) Substitui y por c na função $y = ax^2 + bx + c$. ____________________________

b) Diminui c em ambos os lados da igualdade. ____________________________

c) Coloca x em evidência. ____________________________

d) Resolve a equação na incógnita x ____________________________

e) Portanto, $x =$ ___ é a abscissa do ponto **P** e $x =$ ___ é a abscissa do ponto **Q**.

f) A simetria do gráfico acima nos indica que x_V é a média aritmética das abscissas dos pontos **P** e **Q**. Então, calcula, a seguir x_V.

Substituindo o valor de x_V em $y = ax^2 + bx + c$, tu obténs a ordenada do vértice da parábola, denominada y_V.

g) Determina as coordenadas do vértice de cada uma das funções abaixo.

Função	x_V	y_V
g1) $y_1 = x^2 - x + 0,25$		
g2) $y_2 = x^2 + 6$		
g3) $y_3 = x^2 - 2x - 3$		
g4) $y_4 = -x^2 + 0,4x$		
g5) $y_5 = -2,5x^2 - 10$		
g6) $y_6 = -x^2 + 2x - 1$		

Atividade 8

Situação 7

O aplicativo a ser utilizado nesta atividade, visa à construção gráfica de funções de 1º e 2º graus, a partir da modificação dos parâmetros das respectivas funções. Para tanto, basta clicar nas setas de cada um dos termos: a da direita faz com que o coeficiente aumente o seu valor, e a da esquerda, diminua. Ou, então, podes movimentar a barra de rolagem para a direita ou para a esquerda.

c) Utiliza o aplicativo para construir os gráficos das funções de 1º grau, determinadas nas tabelas a_1, a_2 e a_3, e completa-as a seguir.

Tabela a_1 Função	O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente?
$f(x) = -10x$				
$f(x) = -5x$				
$f(x) = x$				
$f(x) = 5x$				
$f(x) = 10x$				

a_{11}) Tu deves ter verificado que, quanto maior é o coeficiente **a** (coeficiente angular), maior é a inclinação da reta. Além disso, essas funções são sempre crescentes ou decrescentes. Qual a relação existente entre o coeficiente **angular** das funções de 1º grau e o crescimento ou o decrescimento delas?

____

____

Tabela a_2 Função	O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta a o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente ?
$f(x) = x - 15$				
$f(x) = x - 10$				
$f(x) = x$				
$f(x) = x + 10$				
$f(x) = x + 15$				

a_{21}) Qual a relação existente entre o coeficiente **b** (coeficiente linear) das funções afins e seus respectivos gráficos?

____

____

Tabela a_3 Função	O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decrescente ?
$f(x) = -15$				
$f(x) = -10$				
$f(x) = 0$				
$f(x) = 10$				
$f(x) = 15$				

a_{31}) Além do fato de serem retas, o que os gráficos construídos na **tabela a_3** têm em comum?

____

____

As funções do tipo $y = b$ são denominadas **funções constantes**.

d) Utiliza o aplicativo para construir os gráficos das funções de 2º grau, determinadas nas tabelas b_1, b_2 e b_3, e completa-as a seguir.

Tabela b_1 Função	O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decres-cente?	Coorde-nadas do vértice
$f(x) = x^2$					
$f(x) = 5x^2$					
$f(x) = 10x^2$					
$f(x) = 20x^2$					

b_{11}) Compara os gráficos construídos na **tabela b_1**. O que acontece com o gráfico da função $f(x) = x^2$ à medida que aumentamos o valor de seu coeficiente?

____

____

b_{12}) O que os gráficos construídos têm em comum em relação às coordenadas do vértice **tabela b_1**?

____

____

Tabela b_2 Função	O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decres-cente?	Coorde-nadas do vértice
$f(x) = x^2 - 15$					
$f(x) = x^2 - 10$					
$f(x) = x^2$					
$f(x) = x^2 + 10$					
$f(x) = x^2 + 15$					

b_{21}) Compara os gráficos construídos na **tabela b_2** com a função $f(x) = x^2$. O que acontece com os gráficos quando somamos ou subtraímos uma constante positiva para obter uma nova função?

____

____

b_{22}) O que os gráficos construídos têm em comum em relação às coordenadas do vértice na **tabela b_2**?

____

____

Dica: Para utilizar o aplicativo, deves, primeiramente, desenvolver os produtos notáveis das funções.

Tabela b_3 Função	O gráfico intercepta o eixo y? Em qual(is) ponto(s)?	O gráfico intercepta o eixo x? Em qual(is) ponto(s)?	Para que valores de x a função é crescente?	Para que valores de x a função é decres-cente?	Coorde-nadas do vértice
$f(x)=(x-7)^2$					
$f(x)=(x-5)^2$					
$f(x)=x^2$					
$f(x)=(x+5)^2$					
$f(x)=(x+7)^2$					

b_{31}) Compara os gráficos com a função $f(x)=x^2$. O que acontece com o gráfico quando somamos ou subtraímos uma constante positiva na variável x?

___

___

b_{32}) O que os gráficos construídos têm em comum em relação às coordenadas do vértice na **tabela b_3**?

___

___

APÊNDICE C – Questionário final

Caro(a) aluno(a):

Conto com a tua colaboração para responder as questões a seguir, as quais têm como objetivo avaliar o trabalho desenvolvido sobre função afim e função quadrática no Laboratório de Informática.

Grata,

Elisabete Rambo Braga

A) Consideraste válida a utilização da planilha nas aulas de Matemática? Justifica a tua resposta.

____

____

____

____

B) Descreve tuas facilidades e/ou dificuldades ao utilizar a planilha no decorrer das atividades propostas.

____

____

____

____

C) Compara uma aula de Matemática na qual seja usado o computador com uma em que não seja utilizado esse recurso, de forma a destacar pontos positivos e/ou negativos.

____

____

____

____

D) Em relação aos roteiros elaborados para cada uma das tarefas, aponta:

D_1) aspectos positivos. ____

____

____

____

D_2) aspectos negativos. ____

____

____

____