FACULDADE DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Marcelo Cavasotto

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE CÁLCULO:
O que os erros cometidos pelos alunos podem informar

Porto Alegre

2010

MARCELO CAVASOTTO

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE CÁLCULO:
O que os erros cometidos pelos alunos podem informar

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Faculdade de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Lori Viali

PORTO ALEGRE
2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C377d Cavasotto, Marcelo

Dificuldades na aprendizagem de cálculo : o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. / Marcelo Cavasotto. – Porto Alegre, 2010.

141 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, PUCRS.

Orientação: Prof. Dr. Lori Viali.

1. Matemática - Ensino Superior. 2. Cálculo – Ensino e Aprendizagem. 3. Cálculo – Dificuldade de Aprendizagem. 4. Análise de Erros. 5. Estudantes de Matemática. I. Viali, Lori. II. Título.

CDD 510.7

Ficha elaborada pela bibliotecária Cíntia Borges Greff CRB 10/1437

MARCELO CAVASOTTO

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE CÁLCULO:
O que os erros cometidos pelos alunos podem informar

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Faculdade de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Aprovada em____de_________________de_______

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Maria Cecília Bueno Fischer - UNISINOS

____

Prof. Dr. João Batista Siqueira Harres - PUCRS

____

Prof. Dr. Lori Viali - PUCRS

____

Dedico essa dissertação a meus amigos e família, em particular a meus pais, Caetano Cavasotto e Eva Alda Medeiros Cavasotto, por todo carinho, apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Lori Viali, por toda atenção, compreensão e sabedoria ao orientar o trabalho na etapa final.

A professora Ruth Portanova, pelo carinho e orientação no período em que trabalhamos juntos na pesquisa.

Aos professores, monitores e alunos de Cálculo Diferencial e Integral I, pela colaboração sem a qual não teria sido possível realizar esse trabalho.

A todos os professores que passaram pela minha vida de estudante, desde as séries iniciais. Há um pouco de cada um nesse trabalho.

Aos meus educandos, pois a aprendizagem significativa sempre será motivo para estudar.

Com a introdução do [...] infinitamente pequeno e do infinitamente grande, a matemática, normalmente tão estritamente ética, perdeu a graça [...] O estado virgem de validade absoluta e a prova irrefutável de tudo matemático perderam-se para sempre; foi inaugurado o reino da controvérsia e chegamos ao ponto em que toda a gente deriva e integra, não porque perceba o que está a fazer, mas por pura fé, porque até agora deu sempre certo.

Friedirich Engels

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma pesquisa que utilizou a técnica de análise de erros para a compreensão das dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial. Embora reconheça a influência de outros fatores, a preocupação do pesquisador nessa investigação esteve centrada nos conhecimentos matemáticos relativos ao Cálculo. O ponto de partida foi análise das avaliações realizadas durante o semestre. Além disso, também foi analisado um material que os alunos poderiam confeccionar para consultar durante as provas e aplicado um questionário junto aos envolvidos com a disciplina (alunos, professores e monitores). Essa pesquisa permitiu concluir que o maior obstáculo enfrentado pelos educandos nessa disciplina não está nos conteúdos específicos do Cálculo, mas sim nos conhecimentos da Matemática básica, estudados nos níveis Fundamental e Médio.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Cálculo. Análise de Erros. Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo.

ABSTRACT

This paper aims to present a study that used the technique of error analysis for understanding the difficulties presented by the students in the discipline of Differential Calculus. While acknowledging the influence of other factors, the concern of the researcher in this work was focused on mathematical knowledge for the Calculus. The starting point was the analysis of the assessments made during the term. It also was analyzed material that students could consult during the examinations and applied a questionnaire to those involved with the discipline (students, teachers and mentors). This research concluded that the greatest obstacle faced by students in this discipline is not the specific content of the calculus, but the basic knowledge of mathematics, studied in elementary and high levels.

Keywords: Calculus Teaching and Learning. Calculus Error's Analysis. Difficulties in Understanding Calculus.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, podemos perceber um movimento crescente de reflexões a respeito de temas relacionados à Educação Matemática. A variedade de tópicos é grande e abrange todos os níveis de ensino (fundamental, médio e superior) nos aspectos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático. No ensino superior, conforme MALTA (2004), as preocupações convergem para as disciplinas básicas, na área das ciências exatas.

> Pode-se afirmar, baseando-se na comunicação informal que ocorria entre professores de nossas melhores universidades, que a atenção para essa questão foi provocada pelo crescente índice de reprovação nas disciplinas básicas, em especial as disciplinas de Cálculo. (MALTA, 2004, p.41).

Especificamente sobre o ensino de Cálculo, existem muitas linhas de pesquisa já contempladas e outras em desenvolvimento. Estas pesquisas tratam desde os conhecimentos matemáticos preliminares dos alunos (em especial sobre funções), passando pela análise de erros e também propostas diferenciadas de ensino de Cálculo como, por exemplo, a utilização da Modelagem Matemática, recursos à História e uso de computadores, além de análise de livros didáticos.

> As dificuldades relacionadas à aprendizagem da Matemática, o alto índice de reprovações dos alunos em disciplinas dessa área, as dificuldades de engenheiros em lidar com os conceitos matemáticos na vida profissional, são algumas variáveis que indicam a necessidade de examinar questões relacionadas ao tema “ensino-aprendizagem da Matemática para Engenharia”. (SOARES; SAUER, 2004, p.245).

De um modo geral, quando os alunos encontram alguma dificuldade na compreensão de determinado conteúdo ou mesmo na resolução de exercícios, procuram ajuda nas monitorias da disciplina. Durante minha graduação, na Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), tive a oportunidade de ser monitor de Matemática por um período de quatro semestres. Dentre as disciplinas monitoradas estavam as de Cálculo e outras que envolviam os mesmos conhecimentos estudados nesta disciplina.

Nesse período, trabalhando com os alunos que apresentavam dificuldades de aprendizagem em Cálculo, percebi que os obstáculos não vencidos estavam relacionados à Matemática estudada no Ensino Médio (principalmente funções) e também no Ensino Fundamental (em grande parte, as manipulações algébricas). Desde então tenho interesse em pesquisar mais sobre o assunto e o mestrado foi uma ótima oportunidade para aprofundar mais esse tema.

Este trabalho versa sobre as preocupações existentes com relação às dificuldades na aprendizagem de Cálculo I. O texto está distribuído em cinco capítulos que incluem a especificação da metodologia adotada no desenvolvimento da pesquisa, análise dos dados e, na sequência, estudos sobre análise de erros e do material de consulta de alunos em provas. Finalizando temos as considerações finais sobre a pesquisa, além de alguns itens anexados, cuja finalidade é apresentar uma amostra do material utilizado nas análises.

1.1 Objetivo Geral

Verificar e classificar as dificuldades na aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I dos cursos de Engenharia da PUCRS.

1.2 Objetivos específicos

Investigar as consultas feitas aos monitores das disciplinas de Cálculo e relacionar com os erros cometidos pelos alunos;

Investigar os questionamentos feitos pelos alunos aos professores das disciplinas de Cálculo, relacionando-os com os erros cometidos nas avaliações;

Verificar os erros cometidos pelos estudantes nas atividades de cálculo diferencial e integral, classificando-os de acordo com sua relação com os conteúdos estudados nos níveis fundamental, médio e superior ou como erro de interpretação.

1.3 Definição do problema

Historicamente se constata um grande índice de reprovação nas disciplinas matemáticas iniciais em cursos universitários, particularmente no que se refere ao ensino de Cálculo. É possível afirmar que os serviços de apoio ao ensino de Cálculo nas universidades praticamente se concentram nos esforços dos professores e monitores em recuperar conteúdos que os alunos deveriam ter aprendido nos níveis Fundamental e Médio?

1.4 Questão de pesquisa

É possível localizar as dificuldades que os estudantes trazem ao ingressar na universidade nos níveis de ensino fundamental, médio ou superior?

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Inicialmente busquei entender os tipos de dificuldades que estudantes dos cursos de Engenharia apresentam na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, tentando identificar a origem dos problemas. Como dificuldades de aprendizagem são aqui considerados, inicialmente, os erros cometidos pelos alunos. Existem, é verdade, outros fatores que também influenciam no nível de aprendizagem, como hábitos de estudo, aspectos psicoemocionais e a situação sócio-econômica. A partir disso, é possível entender muitas das dificuldades pela análise de erros. Nesta pesquisa, as atenções voltam-se aos aspectos referentes ao conhecimento matemático, sem abordar os demais fatores referidos anteriormente.

> Em todas experiências de uso dos erros, relatadas por Borasi, destacam-se as discussões, registradas pela pesquisadora, que permitiram não só o desenvolvimento de sua própria pesquisa sobre uso dos erros, como também a utilização desses erros para o ensino de Matemática. Nesse sentido é que Borasi (1996, p.3) considera serem os erros "oportunidades para a aprendizagem e pesquisa", afirmativa com a qual concordo e na qual me baseio para o desenvolvimento de pesquisas na área, bem como no uso que tenho feito dos erros durante mais de duas décadas. (CURY, 2007, p.38).

Podemos atribuir à Análise de Erros, enquanto linha de pesquisa, um caráter diagnóstico, uma vez que, de acordo com Cury (2007) é possível entender como se dá o processo de construção do conhecimento por parte dos alunos por meio de suas produções escritas. Assim sendo, a partir dessas produções, podemos compreender as dificuldades apresentadas por eles com relação aos conteúdos. E, a partir dessa compreensão, torna-se viável a elaboração de estratégias efetivas para a superação de tais dificuldades.

> As ações diagnósticas buscam construir um conhecimento sistematizado sobre as necessidades e dificuldades dos alunos, visando ao aprimoramento das abordagens no ensino do Cálculo. O conhecimento construído através desses estudos, disponibilizado e discutido pelos professores, poderá contribuir para a elaboração e implementação de estratégias didáticas mais efetivas, onde as noções já construídas e as hipóteses dos alunos sejam objeto do diálogo em sala de aula, permitindo uma articulação entre conhecimentos prévios e novos, a superação de noções mais ingênuas por noções mais elaboradas e o desenvolvimento das habilidades necessárias ao uso dessas noções na resolução de problemas. (DOERING, C.I.; NÁCUL, L.B.C.; DOERING, L.R.; 2004, p.220).

Inicialmente, a intenção foi confrontar as dificuldades encontradas na etapa de levantamento de dados com as apontadas nos estudos sobre análise de erros de Cury (2007, 2004) e demais autores que tenham este enfoque. Deste confronto, busquei embasamento teórico à hipótese inicial, de que os conhecimentos matemáticos desenvolvidos nos níveis fundamental e médio são pré-requisitos para um bom rendimento nessa disciplina. Além disso, a própria análise de erros trouxe idéias para as propostas de solução para este problema, uma vez que também pode ser considerada como metodologia de ensino, pois

> [...] analisar as produções é uma atividade que traz, para o professor e para os alunos, a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes. (CURY, 2007, p.13).
>
> [...] a análise qualitativa das respostas dos alunos, com uma discussão aprofundada sobre as dificuldades por eles apresentadas, apoiada em investigações já realizadas é, talvez, a melhor maneira de aproveitar os erros para questionar os estudantes e auxiliá-los a (re)construir seu conhecimento. (CURY, 2007, p.27).

2.1 A análise de erros enquanto linha de pesquisa

Conforme Cury e Cassol (2004), embora seja enfocada de diversas formas, a análise de erros como abordagem de pesquisa em Educação Matemática se apresenta de três formas, quais sejam:

2.1.1 Identificação e classificação

Nesta abordagem o foco está direcionado para a detecção e classificação dos erros cometidos pelos alunos, sendo que, na maioria das vezes, a análise se coloca apenas como uma forma de criticar os estudantes ou ainda o ensino que receberam. Em geral, não há a preocupação em investigar as causas dos erros (origens), nem mesmo é cogitada a possibilidade de aproveitá-los positivamente em propostas de soluções.

2.1.2 Identificação e classificação com conseqüências

Nesse segundo tipo, de forma análoga ao anterior, também ocorre a detecção e classificação dos erros cometidos pelos alunos. No entanto, a preocupação maior está relacionada com suas causas e conseqüências destes erros, levando em consideração os conteúdos, a origem das dificuldades, as concepções dos alunos, bem como as implicâncias deste problema no processo de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático.

2.1.3 Diagnóstica

Finalmente, o foco se desloca em direção às atividades propostas para os educandos. A análise dos erros é baseada nas soluções encaminhadas pelos alunos e leva em consideração a teoria sobre a qual foi elaborada a proposta. A preocupação maior não está nos erros, mas sim no processo de ensino e aprendizagem, em particular no funcionamento cognitivo do aluno.

Ainda segundo Cury e Cassol (2004), geralmente na etapa de análise dos dados se elaborada uma classificação para os erros, que são listados ou é indicado o número de vezes em que ocorre cada tipo. Com relação às entrevistas, podem ser transcritas ou ainda submetidas à análise de conteúdo.

2.2 A análise de erros enquanto metodologia de ensino

Do ponto de vista da didática de ensino da Matemática podemos aproveitar positivamente os erros cometidos pelos estudantes. Sentar com os alunos e discutir os caminhos que eles seguiram para solucionar uma determinada questão pode promover o diálogo entre educador e educando. A respeito dessa interação, Cury (2007) sugere que

> [...] a análise qualitativa das respostas dos alunos, com uma discussão aprofundada sobre as dificuldades por eles apresentadas, apoiada em investigações já realizadas é, talvez, a melhor maneira de aproveitar os erros para questionar os estudantes e auxiliá-los a (re)construir seu conhecimento. (CURY, 2007, p.27).

Com relação ao diálogo em sala de aula, Freire (2003) também o percebe de forma positiva e entende que deve ser estimulado, pois possibilita que o educador reconstrua suas concepções a respeito do tema, conheça melhor os educandos e compreenda como eles estão processando o novo conhecimento.

Além disso,

> O objeto a ser conhecido, num dado lugar, vincula esses dois sujeitos cognitivos, levando-os a refletir juntos sobre o objeto. O diálogo é a confirmação conjunta do professor e dos alunos no ato comum de conhecer e reconhecer o objeto de estudo. Então, em vez de transferir o conhecimento estaticamente, como se fosse uma posse fixa do professor, o diálogo requer uma aproximação dinâmica na direção do objeto. (FREIRE, 2003, p.124).

Acredito que o vínculo referido por Freire (2003) possa ser interpretado como o contrato didático defendido por Silva (1999), o qual só existe em função da aprendizagem dos alunos e a cada nova etapa é renegociado e renovado. Conforme Silva (1999), de um modo geral, a prática de ensino mais comum nas aulas de Matemática é aquela na qual o professor expõe determinado conteúdo, mostra alguns exemplos no quadro e em seguida aplica alguns exercícios. Os alunos, entendendo ou não a aula, devem solucionar as questões propostas e, se encontrarem dificuldades, solicitarem auxílio ao professor.

Ainda segundo Silva (1999), tal prática ocorre freqüentemente nas aulas de Cálculo, quando, por exemplo, se está desenvolvendo o estudo de integrais, mediante uma lista de regras de integração, com o simples "adestramento" com o recurso da resolução de exercícios. Desta forma, não se trabalha efetivamente o significado da integração, nem se questiona a integrabilidade das funções.

Em um exemplo de ruptura e renegociação, Silva (1999) apresenta um caso no qual o professor introduz um determinado conceito novo não mais por meio de uma aula expositiva (contrato anterior), mas com o recurso de atividades elaboradas a partir de situações-problema, fazendo com que os alunos trabalhem individualmente ou em duplas para resolver algumas questões. Com relação a essa prática, o autor acredita que o contrato do aluno se assemelha ao de um pesquisador e prevê a progressão do saber.

Além disso,

> [...] O erro não é mais uma falha que se deve evitar a qualquer preço. Ele pode contribuir para a construção do conhecimento. Entretanto, convém notar que existem muitos tipos de erros e que nem todos são, necessariamente, construtivos do conhecimento. (SILVA, 1999, p.48).

Outro aspecto relevante com relação ao erro é o de que ele traz consigo aquilo que o aluno já sabe (ou não sabe) sobre o assunto em estudo. Vasconcellos (2004) afirma que um conhecimento novo somente é possível quando construído a partir de conhecimentos prévios. Para ele, o professor deve promover esse confronto, provocando a contradição entre os modelos mentais que os educandos trazem com o real.

> O professor parte do que o aluno tem de quadro de significação e vai introduzindo, pela problematização, novos elementos para a análise. O conhecimento anterior do aluno, como foi apontado, não pode ser desprezado, pois o novo vai ser construído a partir do existente, a não ser que entendamos que o conhecimento vai ser transmitido e depositado na cabeça do aluno de acordo com aquilo que falamos. (VASCONCELLOS, 2004, p.89).

Finalmente, podemos ainda pensar na didática da análise de erros como uma forma de aprender a aprender. Logicamente isso depende da forma com a qual o educador faz os questionamentos e encaminha a superação das dificuldades encontradas pelos educandos na resolução de um exercício. Ele pode, por exemplo, ao invés de mostrar o caminho correto ou a solução pronta, sugerir que os estudantes pesquisem sobre o tema em estudo, orientando-os com relação às fontes a serem pesquisadas, a fim de que eles superem suas dificuldades através do próprio esforço.

Assim,

> Compreender o sentido de um texto implica estabelecer relações entre texto e significado, colocar em movimento modos de entender e compreender, indagar possibilidades alternativas de compreensão, perceber e dar sentidos e assim por diante [...] Aparecendo a elaboração própria, torna-se visível o saber pensar e o aprender a aprender. (DEMO, 2005, p.24).

Acredito que este estudo permitiu refletir sobre as dificuldades que os alunos têm ao ingressar em uma universidade, no que diz respeito ao déficit de aprendizagem de Matemática nos ensinos Fundamental e Médio. Aqui foram localizadas algumas das dificuldades existentes e foi possível aprofundar as reflexões sobre esse tema.

3 METODOLOGIA

Num primeiro momento da pesquisa foi realizada uma revisão bibliográfica sobre técnicas de análise de erros, buscando embasamento sobre esse tema. Nessa etapa, procurei conhecer como é feita uma análise de erros e quais os procedimentos adotados nesse tipo de investigação, de modo que essa técnica se tornasse uma ferramenta eficiente. Para tanto, foram analisados artigos e pesquisas que utilizaram essa mesma metodologia, aplicada em disciplinas da Matemática de ensino superior. Com relação à literatura, nessa etapa foram consultados trabalhos da professora Helena Noronha Cury sobre análise de erros.

Ainda nessa etapa, foram consultadas dissertações já defendidas, cujos temas estavam ligados ao ensino e aprendizagem de Cálculo. Embora os assuntos fossem novas metodologias de ensino, a busca, nesse momento, se concentrou nas justificativas, procurando referências com relação às dificuldades na aprendizagem que motivaram tais estudos. Contudo, as referências não foram encontradas e, portanto, somente no final deste trabalho voltarei a comentar sobre essas dissertações.

No começo da pesquisa, surgiram duas novidades em relação ao projeto original. Primeiro a sondagem, que foi uma prova aplicada no início do semestre, cujo objetivo era verificar o nível de conhecimento dos alunos em Matemática. Essa avaliação consistia em uma folha com dez exercícios que envolviam conteúdos relativos à Matemática estudada nos níveis de ensino Fundamental e Médio, relevantes para os estudos de Cálculo. A sondagem foi realizada no início do semestre, logo nas primeiras semanas de aula. Em meus primeiros contatos com os professores de Cálculo tomei conhecimento da sondagem e me interessei em analisar as produções dos alunos. A primeira análise de erros foi feita tendo como objeto de estudos as provas de sondagem de duas turmas.

Também tomei conhecimento de que estavam ocorrendo oficinas de aprendizagem que tratavam de assuntos preliminares para o estudo de cálculo. Tais encontros ocorriam em horários, geralmente, antes das aulas do turno da noite e eram freqüentados por alunos, de acordo com seus interesses, não havendo uma obrigatoriedade para tal. Acompanhei algumas das atividades realizadas nas oficinas. Eram aulas expositivas, nas quais os ministrantes eram alunos do último semestre do curso de licenciatura em matemática. Nos dias que acompanhei, após uma explicação inicial sobre um determinado assunto, os alunos tinham uma série de exercícios para resolver e contavam com o apoio dos ministrantes para solucionar suas dúvidas, individualmente. Voltarei a me referir sobre esse tema nas considerações finais.

Serviram como objeto de estudo, além da sondagem, as avaliações realizadas por duas turmas ao longo do semestre, tendo sido analisados ao todo seis provas, duas de sondagem e quatro da disciplina. Com relação às análises dos erros cometidos pelos alunos nestas atividades, na maioria dos casos não ocorria um único erro em uma mesma questão. Aconteciam erros em série. Contudo, para efeitos de classificação nesta pesquisa, foram considerados apenas os erros iniciais e que geraram a sucessão posterior.

Para a realização das provas, os alunos poderiam confeccionar um material de consulta, que consistia em uma folha de ofício, a qual poderia ser preenchida em frente e verso, com informações que considerassem relevantes. A folha de consulta era entregue junto com a prova e isso viabilizou que estivessem disponíveis para estudo. Esse material também foi analisado, pois poderia conter indícios das dificuldades na aprendizagem da disciplina, particularmente naquelas reconhecidas pelos estudantes como tal. No final deste trabalho, constam anexados alguns desses materiais de consulta, a título de exemplificação.

Com a finalidade de melhor compreender os componentes da amostra analisada (alunos, monitores e professores), foram elaborados questionários específicos para cada grupo. Esses questionários continham perguntas objetivas e algumas de caráter subjetivo para verificar os diferentes pontos de vista sobre os problemas, já referidos, na aprendizagem dessa disciplina. Ao todo, colaboraram nessa etapa 72 alunos, 8 professores e 4 monitores.

No questionário aplicado aos alunos as perguntas tiveram a intenção de trazer reflexões a respeito de questões relativas ao ensino e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral, bem como sobre os serviços de apoio oferecidos pela Universidade. Além disso, foi possível esboçar um perfil dos alunos, conhecer seus interesses, o envolvimento com o estudo e participação ou não nas oficinas. Já no questionário aplicado aos monitores e professores o objetivo foi verificar o tipo de questionamento recebido, as propostas oferecidas como solução e suas percepções sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos.

No final desse trabalho foram reunidas as informações coletadas a partir dos questionários aplicados com os dados das análises de erro. Isso permitiu aprofundar as reflexões sobre o tema ampliando as possibilidades de discussão.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

4.1 Questionários

4.1.1 Questionário respondido pelos alunos:

Com o objetivo de ter uma noção do perfil dos alunos das engenharias da PUCRS, elaborei um questionário com dez questões. Aproveitei, também, para saber a opinião deles sobre as oficinas. Como a finalidade aqui não era traçar um perfil muito detalhado, nem aprofundar as opiniões, as perguntas foram elaboradas de forma objetiva, sendo que, em alguns itens, foram reservados espaços para registrarem observações. No total, 72 alunos, de duas turmas, responderam o questionário.

As oficinas ajudaram a solucionar suas dúvidas?

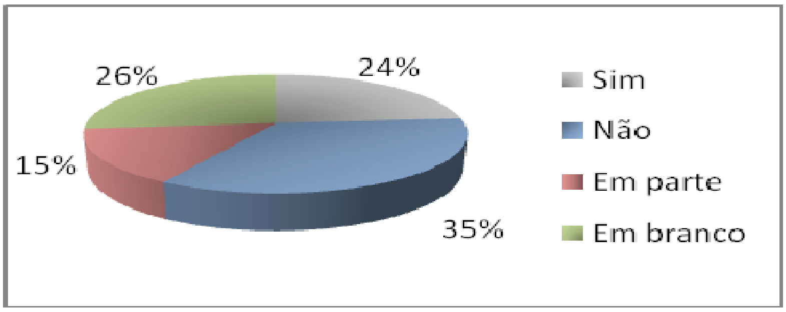


Figura 1 – Respostas dos alunos a pergunta um do questionário

Dentre os 25 alunos que responderam não, 19 acrescentaram a observação de que jamais tinham comparecido as oficinas, sendo que dois ainda comentaram que sequer sabiam que existiam. Já entre aqueles não responderam a questão (branco), 15 comentaram que não participaram dos encontros e um justificou que não freqüentava por problemas com relação ao horário em que ocorriam as oficinas.

Durante as aulas das oficinas você se sentia à vontade para fazer perguntas?

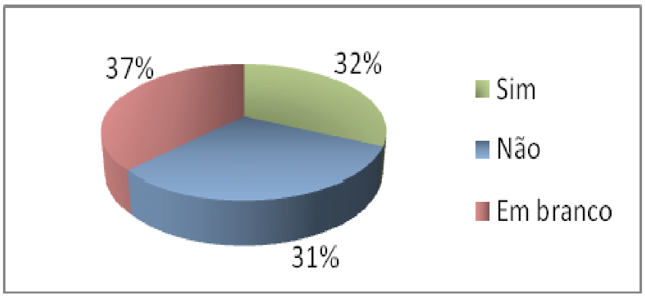


Figura 2 – Respostas dos alunos a pergunta dois do questionário

Nessa questão houve um aparente empate, que se revelou inconsistente, pois entre os que responderam não, 15 observaram que não freqüentavam os encontros. Quatro alunos se queixaram com relação à postura do ministrante das oficinas, considerando-o inflexível, arrogante, com explicações não claras e que por vezes deixava de responder as perguntas.

Gostaria que fossem proporcionados momentos para discutir e analisar questões de provas e trabalhos fora do horário de aula?

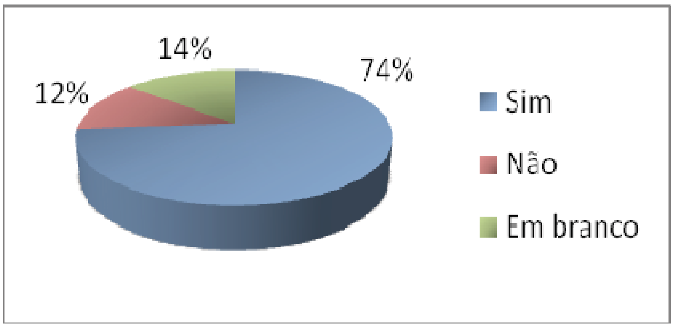


Figura 3 – Resposta dos alunos a pergunta três do questionário

A quarta questão solicitava sugestões para futuros encontros:

Para esse item, ocorreram poucas sugestões e a maior parte das respostas não foi muito clara.

No subitem que pedia sugestões de conteúdos/assuntos a serem trabalhados as respostas se distribuíram de acordo com o gráfico a seguir:

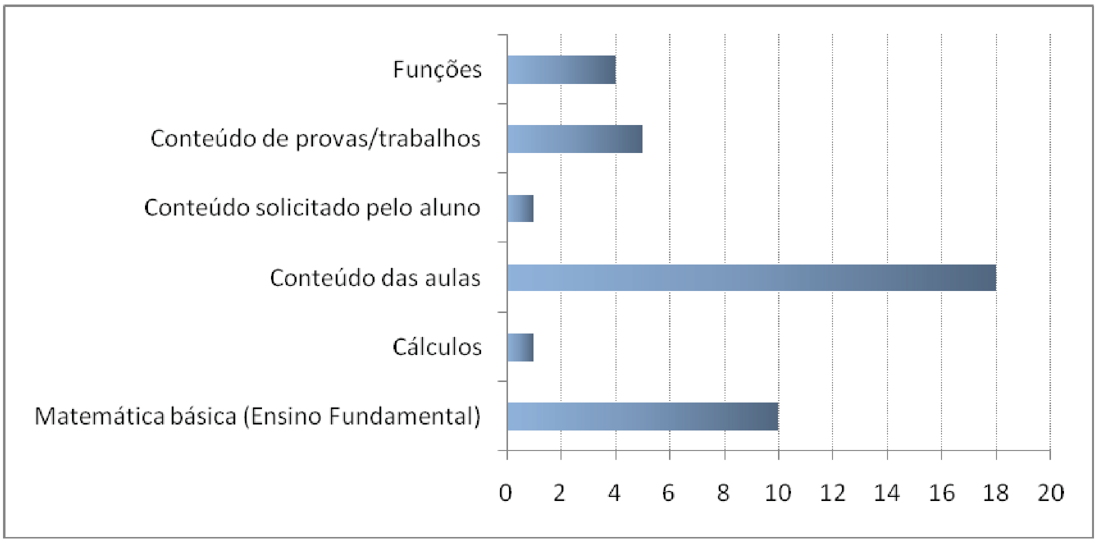


Figura 4 – Sugestões dos alunos para assuntos a serem trabalhados nas oficinas

Já no subitem no qual foi solicitado aos alunos que fizessem sugestões quanto à forma de trabalho, novamente houve poucas sugestões, sendo que um aluno sugeriu monitoria e quatro solicitaram listas de exercícios.

Num terceiro subitem da quarta questão, foram pedidas sugestões com relação aos horários disponibilizados para esses encontros. Para essa pergunta, quatro alunos solicitaram que fossem oferecidas oficinas em horários compatíveis para quem trabalha. Outros foram mais específicos e informando turno(s) de preferência. As sugestões apareceram nas seguintes proporções:

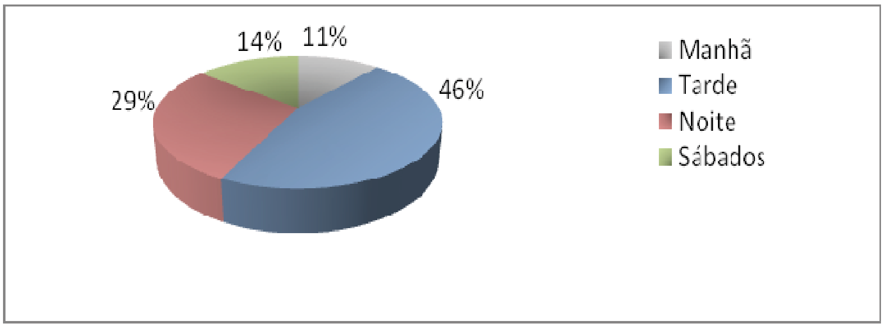


Figura 5 – Sugestões dos alunos para horários das oficinas

Você estudou principalmente em:

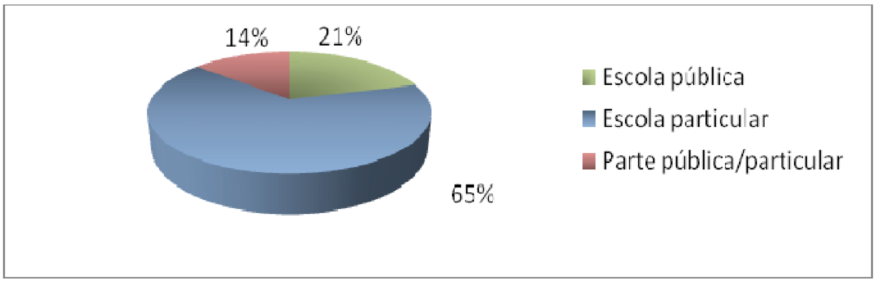


Figura 6 – Respostas dos alunos para a pergunta cinco do questionário

Tipo de curso:

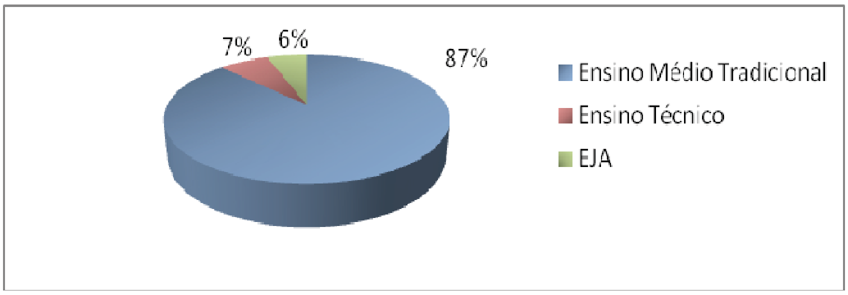


Figura 7 – Respostas dos alunos para a pergunta 5.1 do questionário

Turno principal:

Curiosamente, dentre os alunos entrevistados nenhum estudou à tarde.

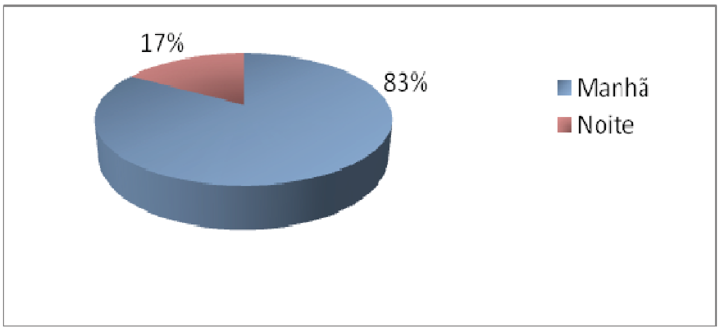


Figura 8 – Respostas dos alunos para a pergunta 5.2 do questionário

Idade:

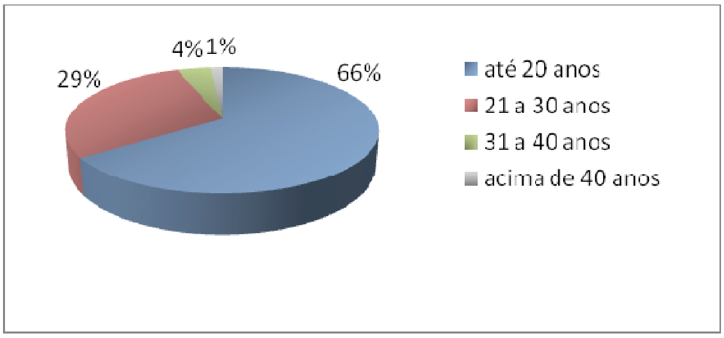


Figura 9 – Respostas dos alunos para a pergunta seis do questionário

Sexo:

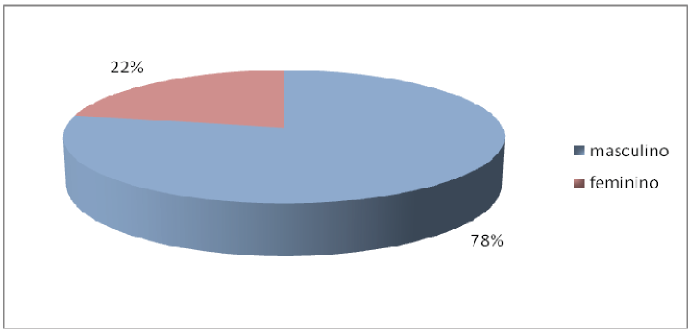


Figura 10 – Respostas dos alunos para a pergunta sete do questionário

Atualmente está trabalhando/estagiando?

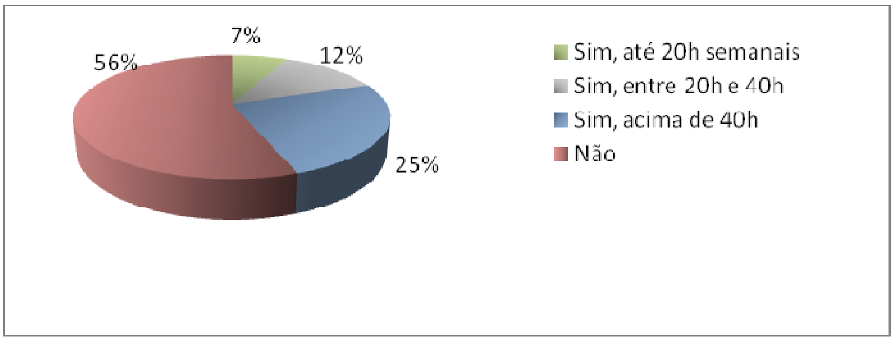


Figura 11 – Respostas dos alunos para a pergunta oito do questionário

Tem o hábito de estudar, fora do horário de aula:

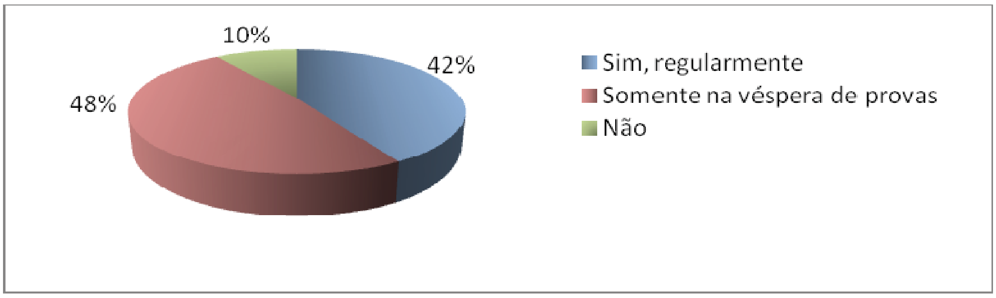


Figura 12 – Respostas dos alunos para a pergunta nove do questionário

Quando tem dúvidas, o que faz:

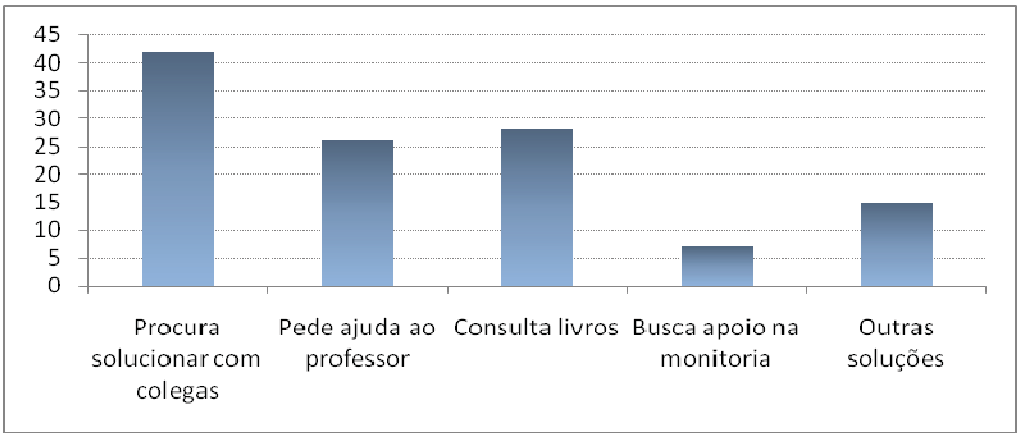


Figura 13 – Respostas dos alunos para a pergunta dez do questionário

Algumas observações feitas na análise do questionário:

Dentre 7 alunos que buscam apoio na monitoria, 3 trabalham, com uma carga horária acima de 40 horas semanais. Dos 40 alunos que não trabalham, somente 2 consultaram a monitoria. Os outros 2 alunos que buscaram esse apoio trabalham, entre 20 horas e 40 horas por semana.

Dos que consultaram monitores:

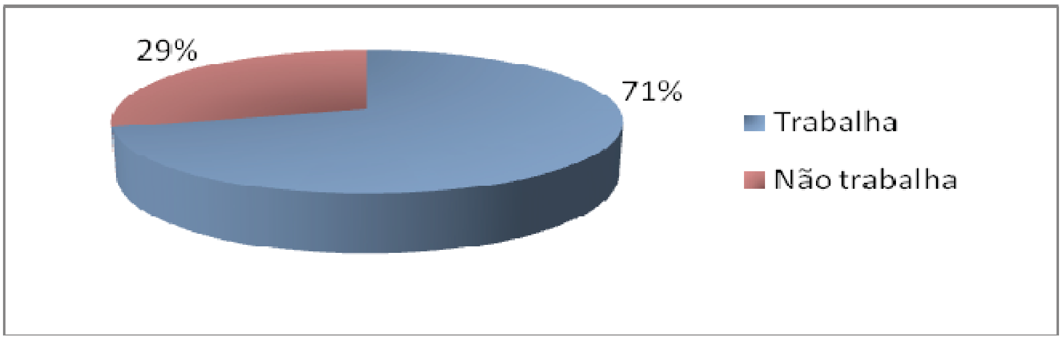


Figura 14 – comparação entre as respostas para as perguntas oito e dez do questionário

O que talvez nos permita dizer que, caso houvesse mais horários de atendimento compatíveis com os horários de trabalho, maior seria o número de consultas aos monitores.

Entre os que não têm o hábito de estudar ou estudam somente na véspera das provas, 18 não trabalham.

Figura 15 – comparação entre as respostas para as perguntas oito e nove do questionário

Dos 40 que não trabalham 29 disseram que não freqüentaram as oficinas. Curiosamente, 20 desses 29 alunos apontaram que gostariam que fossem proporcionados momentos para discutir e analisar questões de provas e trabalhos, fora do horário de aula.

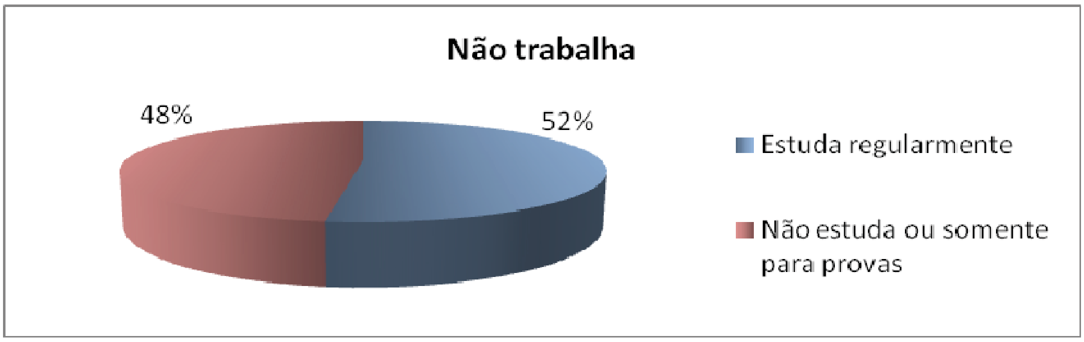


Figura 16 – comparação entre as respostas para as perguntas oito e nove do questionário

Dentre os que têm o hábito de estudar regularmente,

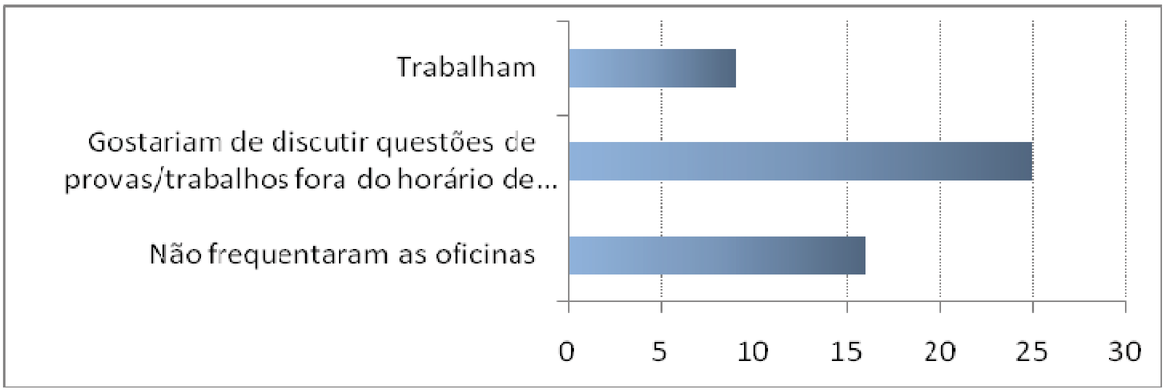


Figura 17 – comparação entre as respostas para as perguntas nove e três do questionário

Desse grupo de nove que trabalham e tem o hábito de estudar regularmente,

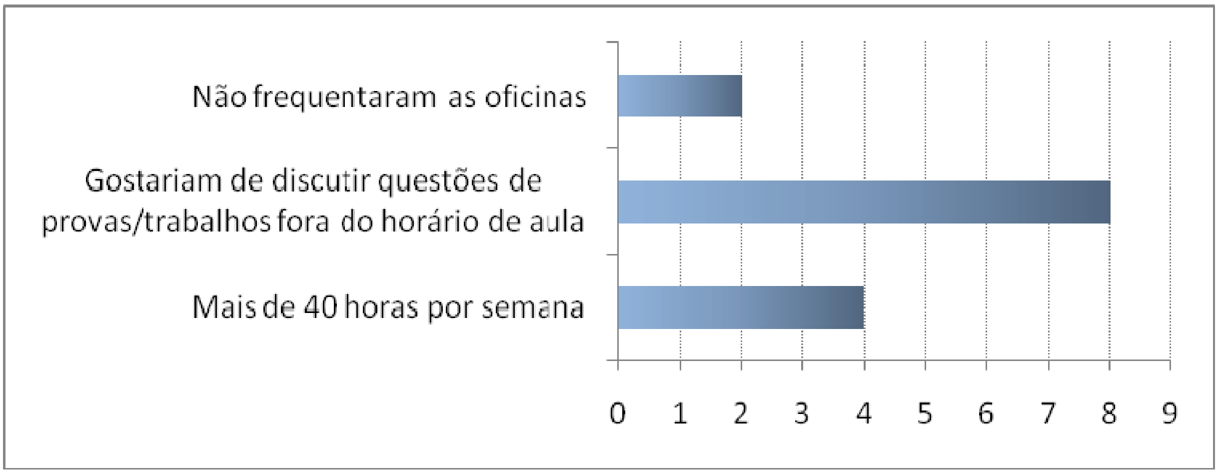


Figura 18 – comparação entre as respostas para as perguntas nove e três do questionário

4.1.2 Questionário respondido pelos monitores

Aos monitores foram feitas seis perguntas, no sentido de tentar identificar o tipo de dúvidas que os alunos trazem, bem como se são sempre os mesmos que freqüentam a monitoria. Quatro monitores colaboraram com a pesquisa.

Na primeira pergunta, “Em média, quantos alunos consultam a monitoria diariamente?” dois responderam que entre 6 e 10. Os outros dois marcaram a opção acima de 21 alunos.

Quando questionados se saberiam identificar se são sempre os mesmos alunos que freqüentavam a monitoria durante o semestre, três respostas sim e uma não. Embora esse monitor, que respondeu não, diga que variam muito as pessoas que consultam, ele pode perceber alguns que freqüentavam a monitoria mais seguidamente.

Quando questionados se as consultas são mais regulares, ao longo do semestre, ou se intensificam na véspera de avaliações, todos responderam que são mais procurados em dias próximos a provas ou trabalhos. Um inclusive complementou que no transcorrer do semestre, os alunos que fazem consultas vêm aprofundar/aperfeiçoar seus conhecimentos, enquanto nas vésperas de provas ele atende pessoas com muitas dificuldades, que querem aprender tudo na última hora.

Com relação ao tipo de questionamento que os alunos fazem, o escore foi o seguinte:

Figura 19 – Respostas dos monitores para a pergunta quatro do questionário

Na quinta pergunta, “As dúvidas apresentadas pelos alunos estão relacionadas principalmente com o ensino fundamental, médio ou superior?”, eles relataram que os estudantes têm dúvidas relativas aos três níveis, sem destacar nenhum em particular.

Já na sexta e última questão, quando foram solicitados a destacar algum (s) assunto (s) específico ou recorrente dentre as dúvidas apresentadas pelos alunos, as respostas apontaram para fatoração, resolução de equações, funções, limites, derivadas, integrais e geometria analítica.

4.1.3 Questionário respondido pelos professores

O questionário aplicado junto aos professores de Cálculo Diferencial e Integral I dos cursos de Engenharia da PUCRS continha nove perguntas. A intenção era trazer o ponto de vista dos professores, suas percepções em sala de aula, bem como seu olhar sobre os serviços de apoio à disciplina, ainda que de forma abreviada. Oito professores colaboraram com a pesquisa.

A primeira pergunta era com relação ao tamanho das turmas (número de alunos). As respostas variaram entre 45 e 60 alunos, o que nos dá uma noção do quanto deve ser difícil para um professor acompanhar e atender tantos estudantes que apresentam dificuldades na disciplina.

Com relação ao número de reprovações, dois não responderam, três marcaram a opção entre 11 e 15 alunos e outros três relataram que mais de 21 alunos não são aprovados, em cada turma. Ou seja, podemos dizer que mais de um terço dos alunos matriculados em Cálculo reprova no semestre. Considerando dez turmas, na média de 45 a 60 educandos, em cada uma, esse número pode tranquilamente superar 180 alunos.

A pergunta número 3 pedia para os professores apontarem a(s) principal(s) causa(s) dessas reprovações. Foram dadas algumas alternativas e o escore foi o seguinte:

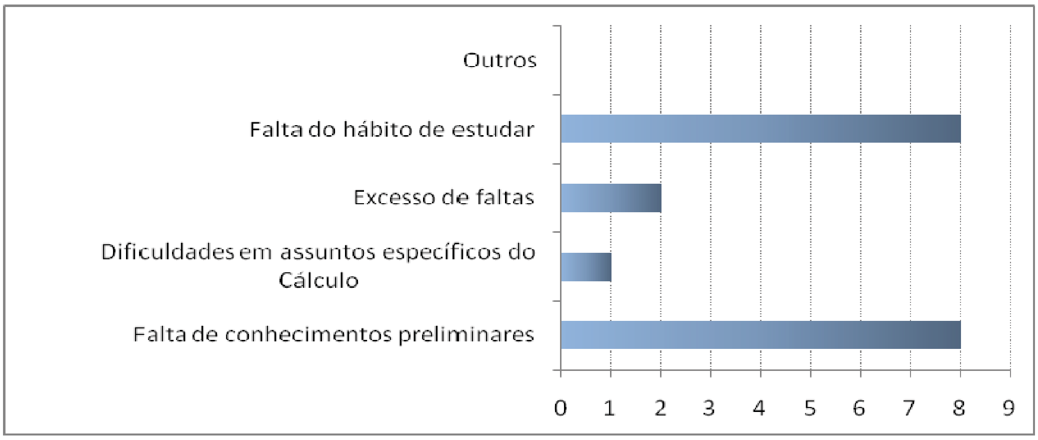


Figura 20 – Respostas dos professores para a pergunta três do questionário

Os professores apontaram, principalmente, a falta de conhecimentos preliminares e do hábito de estudar como as principais causas das reprovações. Um deles ainda questionou: *“Os alunos sabem estudar?”*

A quarta pergunta era referente ao tipo de questionamentos que os educandos fazem em sala de aula. Foram dadas algumas alternativas e as respostas apareceram nas quantidades mostradas a seguir:

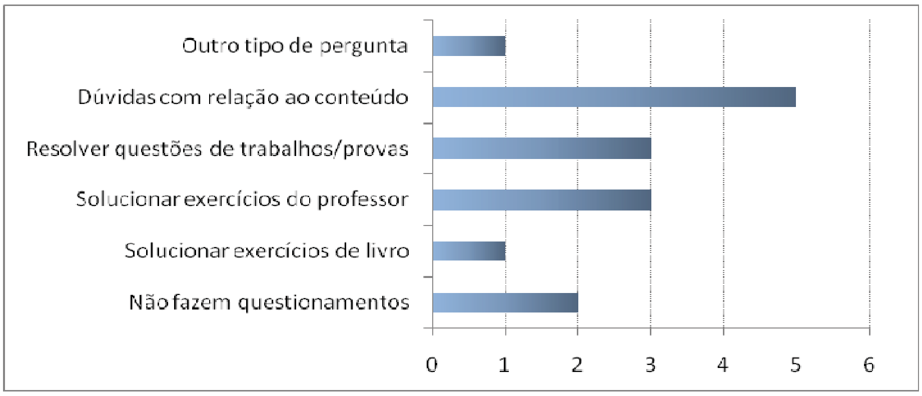


Figura 21 – Respostas dos professores para a pergunta quatro do questionário

O que registrou outro tipo de pergunta apontou dúvidas relativas ao ensino fundamental e médio.

A questão número cinco não tinha alternativas e era solicitado que eles relacionassem as dúvidas apresentadas pelos alunos com os níveis de ensino fundamental, médio ou superior. Para esse item, obtivemos os seguintes dados:

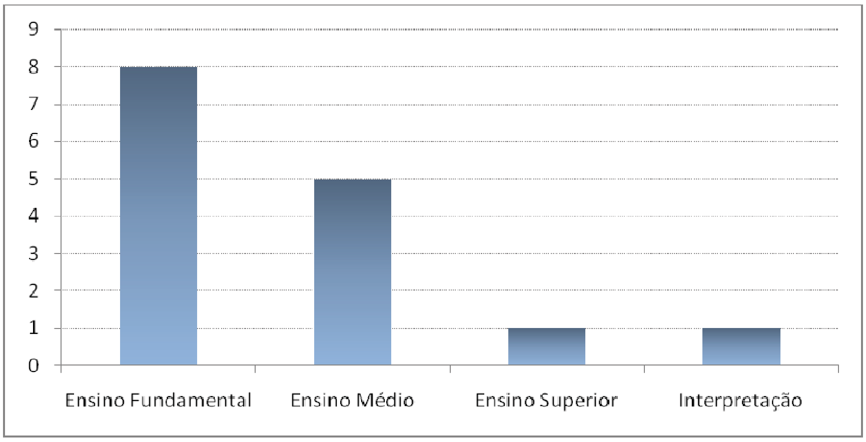


Figura 22 – Respostas dos professores para a pergunta cinco do questionário

Um dos professores registrou, ainda, a seguinte observação: *“Por vezes alguns alunos rejeitam a orientação de estudos referentes a assuntos básicos”.*

Na pergunta seis, foi solicitado que apontassem algum assunto específico ou recorrente dentre as dúvidas apresentadas pelos alunos. Surgiram as seguintes respostas:

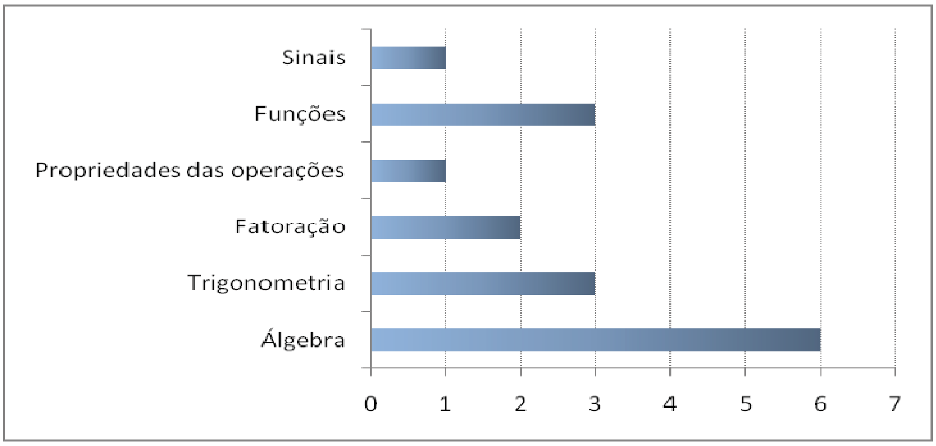


Figura 23 – Respostas dos professores para a pergunta seis do questionário

Sétima questão: Você acredita que o apoio oferecido pelos monitores é suficiente? Dois professores responderam que sim, três acreditam que não e os demais marcaram a opção em parte. Além das alternativas, apareceram algumas observações:

“Se houvesse continuidade no atendimento, seria suficiente. Mas os alunos geralmente só aparecem na véspera das provas”.

“Se não houver formação de hábito de estudo, não é suficiente”.

“O aluno necessita participar das aulas e dedicar horas para estudar”.

Na última questão com alternativas foi perguntado se os professores percebiam alguma melhora com relação aos alunos que freqüentavam as oficinas. Todos responderam que sim.

Finalizando esse questionário, foram pedidas sugestões para os serviços de apoio ao ensino de Cálculo. Seguem as sugestões:

Uso do laboratório de aprendizagem;
Propor atividades que levem os educandos a pensar;
Mais horários para as oficinas;
Cursos de extensão com matemática de ensino fundamental e médio;
Grupos de estudo orientados por monitores;
Trabalho paralelo em oficinas temáticas;
Incentivar os alunos a freqüentar as oficinas e laboratórios de aprendizagem.

4.2 Análise dos erros cometidos na sondagem

Em um primeiro momento desta pesquisa, tive a oportunidade de analisar um material elaborado por professores de Cálculo Diferencial e Integral I da PUCRS, cuja finalidade seria verificar o nível de conhecimento matemático dos alunos matriculados na disciplina no primeiro semestre de 2008. Este procedimento foi chamado de sondagem e consistia em uma folha (frente e verso) com dez exercícios (18 itens ao todo), os quais envolviam conteúdos relativos à Matemática estudada nos níveis de ensino Fundamental e Médio (anexo), todos de acordo com o que pode ser considerado relevante para os estudos de Cálculo. A sondagem foi realizada na primeira quinzena de março. Neste contexto, em meus primeiros contatos com os professores de Cálculo, tomei conhecimento da sondagem e me interessei em pesquisar as produções dos alunos.

Conforme já discutimos anteriormente, a análise de erros enquanto linha de pesquisa pode ter um caráter diagnóstico, possibilitando a compreensão das dificuldades na aprendizagem apresentadas pelos estudantes. Como minha intenção neste primeiro momento da investigação é procurar compreender, refletir e, de alguma forma, tentar "mapear/identificar" o fenômeno do insucesso na aprendizagem do Cálculo, o material produzido pelos alunos que participaram da sondagem pode ser considerado como uma fonte rica de informações.

De posse das sondagens realizadas em duas turmas (94 alunos ao todo), comecei a analisar o material e logo pude identificar que, para cada questão e em todas elas, existem alguns tipos de erros que se repetem de forma análoga, ou ainda relacionados de alguma maneira. Assim, resolvi seguir uma linha de investigação em análise de erros que se assemelha ao que Cury e Cassol (2004) classificam como sendo a segunda forma em pesquisas deste tipo.

Nessa etapa ainda não pretendo discutir possíveis soluções para o problema de pesquisa, esse procedimento servirá para entender os tipos de dificuldades que os alunos trazem ao ingressar na Universidade e como isso reflete em seus rendimentos no transcorrer dos cursos, em particular no caso dos alunos de Engenharia e nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Segue a análise dos erros cometidos na sondagem:

1ª Questão: Se $x \neq 2$ e $x \neq 0$, simplifique a expressão $\frac{x^3 + x^2 - 6x}{8x^2 - 16x}$.

Responderam satisfatoriamente	6
Em Branco	38
Erro por simplificação equivocada	6
Erro no princípio da resolução	11
Erro na manipulação de potências	3
Erro em tentativa por substituição numérica	20
Iniciaram de forma correta, mas pararam	10

Desconsiderando acertos e questões deixadas em branco, temos um total de 50 erros. Re-categorizando e agrupando-os de acordo com o nível de ensino, ficam distribuídos da seguinte forma:

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 19

Erro em conteúdo de ensino médio: 0

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 31

Considerei erros de potenciação, simplificação e respostas incompletas como erro em conteúdo de ensino fundamental. Já os que saíram fazendo substituições numéricas ou resolvendo equações, classifiquei como erro de interpretação, pois não sabiam o que o enunciado estava pedindo.

Uma das ocorrências que mais me preocupou aqui foi o grande índice de questões em branco. Teriam sido por que os alunos não entenderam o enunciado? Ou, uma vez entendido, não souberam como proceder?

Dentre os alunos que iniciaram os procedimentos de uma forma adequada, mas não deram seqüência à questão, alguns extraíram as raízes das equações do numerador e do denominador em separado e não souberam o que fazer com elas, parando e deixando o exercício por fazer. Outros conseguiram colocar o x em evidência em ambas, mas após simplificarem essa etapa, não perceberam que poderiam fazer mais um passo e obter uma solução ainda mais simples para a questão.

Com relação às simplificações equivocadas no desenvolvimento do exercício, uma em particular me chamou a atenção, devido aos tipos de erros cometidos, qual seja:

$$\frac{x^3+x^2-6x}{8x^2-16x}=\frac{x^3+x-6x}{8x-16x}=\frac{x^3-5x}{-8x}$$

$$\frac{x^3-5x}{-8x}=0 \rightarrow x^3-5x=8x \rightarrow x^3=8x+5x$$

$$\rightarrow x^3=13x \rightarrow x=\sqrt[3]{13x}$$

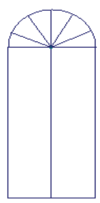
Já com relação aos erros no trabalho com potências, o mais comum deles foi adicionar os termos com índices diferentes, fazendo a soma dos expoentes, sem considerar a sucessão de equívocos posteriores. Por exemplo:

$$\frac{x^3+x^2-6x}{8x^2-16x}=\frac{2x^5-6x}{8x^2-16x}=\frac{8x^5}{8x^2}=x$$

Outra situação que foi muito presente neste 1º exercício da sondagem foram as substituições numéricas, quase todas por x=*1* (afinal, o enunciado dizia que $x \neq 2$ e $x \neq 0$). Apenas um caso de substituição por outro número, qual seja: x=*3*. Assim como os que tentaram resolver como se fosse uma equação ou separando a expressão em duas equações (uma do numerador e outra do denominador) resolvendo-as em separado.

Apesar de toda a sucessão de erros após esses inícios, acredito que o maior obstáculo nessa questão foi a interpretação do enunciado: “simplifique a expressão”. Não que esteja errado, pois é o mais adequado para o tipo de exercício. A questão é a deficiência na interpretação, na leitura. Não é calcular o valor numérico, nem mesmo encontrar as raízes da equação.

Questão 2: A figura a seguir mostra uma janela em que a parte superior é formada por um semi-círculo e a parte inferior por um retângulo, cuja altura *h* possui o dobro da medida da base *b*. Qual a medida da altura total da janela?



Responderam satisfatoriamente	30
Em branco	20
Iniciaram de forma correta, mas pararam	6
Erro de interpretação geométrica	29
Erro na manipulação algébrica	5
Tentativa por substituição numérica sem sucesso	4

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 40

Erro em conteúdo de ensino médio: 4

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Embora essa seja uma das questões com o maior número de acertos, ainda assim a quantidade de erros preponderou. Por podermos classificá-la como de nível fundamental e se tratar de uma resolução relativamente simples, preocupam alguns tipos de erros cometidos nesse exercício e, novamente, a ocorrência de um índice alto de questões em branco.

Dentre os erros cometidos, não só devido ao maior número de incidências na categoria, preocupam aqueles decorrentes de interpretações geométricas equivocadas. O mais comum deles foi não estabelecer uma relação adequada entre a altura *h* e a medida da base *b*, ainda que isso esteja bem claro no enunciado. Alguns não perceberam que a medida do raio do semicírculo é a mesma da metade da base. Outros saíram “calculando” áreas de retângulo e circunferência.

Seis alunos iniciaram de forma satisfatória, estabelecendo uma relação entre a altura *h* e a medida da base *b*, alguns até relacionando a medida do raio com a da base *b*, mas não calcularam a altura total da janela.

Quanto aos erros de manipulação algébrica, foram semelhantes aos do item anterior, principalmente, nessa categoria, em simplificações inadequadas.

Questão 3: O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo é R$ 28000,00. Encontre o valor do carro e da moto em reais.

Responderam satisfatoriamente	44
Em branco	10
Acerto por tentativa	26
Erro por tentativa	1
Erro na montagem do sistema	2
Erro na resolução do sistema	7
Montaram o sistema corretamente, mas não seguiram	4

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 4

Erro em conteúdo de ensino médio: 10

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Nessa questão podemos observar um bom número de acertos, 75% dos estudantes conseguiram chegar ao resultado esperado. Embora nesta etapa da pesquisa as atenções estejam voltadas aos erros cometidos pelos alunos, não poderíamos deixar de comentar os acertos "por tentativa", que representaram uma fatia considerável dentre as respostas corretas. Em todos esses casos a resolução funcionou praticamente de forma análoga, testavam valores para a moto (R$1000,00; R$2000,00; R$3000,00...) até encontrarem um (R$5000,00) para o qual os valores das motos adicionados aos dos carros, conforme o enunciado, fechassem com as adições da questão. Em alguns casos, colocavam uma observação: "*fiz por tentativa, se houver uma forma correta de resolver eu não sei*". Acredito que essas resoluções por tentativas foram motivadas por se tratarem de valores inteiros no enunciado (R$41000,00 e R$28000,00), além de quantidades pequenas de motos e carros envolvidas nas adições. Fossem outros números, certamente teriam maior dificuldade nesse tipo de resolução.

Dois alunos montaram o sistema de forma equivocada e outros onze o montaram acertadamente. Desses, sete cometeram erros na resolução do sistema, praticamente todos por sinal. Quatro alunos montaram o sistema, mas não souberam resolver, parando e deixando a questão pela metade.

Questão 4: Simplifique a expressão: $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{ab^3}}{b-1+\frac{1}{b}}$

Responderam satisfatoriamente	0
Em branco	43
Erro relacionado ao M.M.C.	18
Erro na divisão de frações	5
Erro na fatoração de expressões algébricas	1
Erro na manipulação de potências	3
Erro por simplificação inadequada	10
Iniciaram corretamente, mas pararam	13
Tentativa por substituição numérica equivocada	1

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 37

Erro em conteúdo de ensino médio: 14

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Nenhum aluno chegou a uma solução satisfatória para este item da sondagem. Alguns chegaram a uma resolução parcial da questão, considerando a simplificação acabada quando ainda poderiam fazer mais uma etapa. Outros pararam ainda mais cedo. Para exemplificar essa situação, segue abaixo a forma que eu consideraria mais simples para reescrever a expressão da questão e a que parte dos alunos chegaram:

$\frac{b+1}{ab^2}$ (forma mais simples)

$\frac{b^3+1}{ab^2(b^2-b+1)}$ (resposta final deste grupo de alunos)

Quanto às questões em branco, o índice segue alto e as perguntas que podemos fazer para refletir sobre isso seguem praticamente as mesmas: O enunciado está claro? Os alunos não souberam como proceder? Seria a divisão de frações que os “assustou”?

Dentre os erros, duas categorias em destaque pela incidência: aqueles cometidos por simplificações inadequadas, bem como os relacionados com o M.M.C. Alguns não souberam como operar a divisão de frações, outros apresentaram novamente os equívocos na manipulação de potências e na fatoração de expressões algébricas.

Questão 5: Simplifique e expressão: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, onde $f(x)=\frac{1}{x}$

Respondeu satisfatoriamente	1
Em branco	42
Erro na interpretação de f(x+h)	50
Erro por simplificação inadequada	1

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 1

Erro em conteúdo de ensino médio: 50

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Dentre todos os erros cometidos na sondagem, por considerar que as funções são o eixo central no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, os resultados apresentados neste item foram os que mais me preocuparam. Mais da metade cometeu erro na interpretação de $f(x+h)$ e acredito que muitos dos que deixaram a questão em branco não souberam o que fazer por também não compreender essa simbologia. Para ilustrar essas interpretações equivocadas, apresento a seguir duas das que mais apareceram nas soluções apresentadas pelos alunos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(\frac{1}{x}+h)-\frac{1}{x}}{h}=\frac{h}{h}=1$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x}+f(h)-\frac{1}{x}}{h}=\frac{f(h)}{h}$$

Questão 6: Encontre a soma das raízes da equação $(2^x)^{x+4}=32, x\in R$

Responderam satisfatoriamente	26
Em branco	37
Erro na fatoração de 32	2
Erro no trabalho com potências	6
Tentativa por substituição numérica equivocada	15
Erro de sinal	5
Outros	3

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 13

Erro em conteúdo de ensino médio: 18

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Mais uma vez podemos fazer os questionamentos com relação às questões deixadas em branco, pois o índice reaparece elevado e tem se repetido a cada item da sondagem.

Outra ocorrência que tem persistido é a tentativa por substituição numérica, na maioria das vezes equivocada e inconclusiva. Chegam a um valor numérico no final e consideram a questão por acabada, não se dão conta também que não era isso que o enunciado pedia.

Surgiram alguns erros no trabalho com os expoentes, relativos às propriedades operatórias entre potências de mesma base, bem como ao reescrever o número 32 como uma potência de 2. Alguns alunos cometeram erros de sinal na resolução da equação

Um caso, em particular, chamou a atenção devido à sucessão de equívocos:

$$(2^x)^{x+4} = 32 \to 2^4 = 32 \to 16 = 32 \to x = \frac{32}{16} \to x = 2$$

Como podemos observar, esse aluno começou "cortando" os "x" do expoente, depois seguiu em frente sem se dar conta da incoerência ao escrever que $2^4 = 32 \to 16 = 32$ e, finalizando a resolução, fez surgir um novo "x", para então obter $x = \frac{32}{16} \to x = 2$.

Outro tipo de erro que destaco neste exercício, que pode ser considerado um "clássico" devido à ocorrência no dia-a-dia em sala de aula de qualquer nível de ensino, foi o seguinte:

$$(2^x)^{x+4} = 2^5 \to x \cdot x + 4 = 5 \to x^2 = 5 - 4 \to x^2 = 1 \to x = 1$$

Finalmente, alguns solucionaram a exponencial corretamente, mas fizeram o que o enunciado pedia: a soma das raízes. Não vejo este tipo de erro como má interpretação do enunciado, mas o entendo como uma distração/esquecimento.

Questão 7: Determine o conjunto de todos os valores reais de x para os quais a expressão que segue está definida em R. $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x^2+6x}$

Responderam satisfatoriamente	4
Em branco	60
Tentativa por substituição numérica com acerto	13
Tentativa por substituição numérica equivocada	4
Erro na resolução da equação do 2º grau	3
Erro no princípio da resolução	4
Iniciaram de forma correta, mas pararam	2
Outros	4

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 5

Erro em conteúdo de ensino médio: 12

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

O enunciado pedia, em outras palavras, para determinar o domínio da função e nem é preciso aprofundar muito no assunto para reconhecermos a importância deste conhecimento para os estudos no Cálculo. O percentual de alunos que deixou de fazer o exercício está querendo nos dizer algo, como um alerta. Retomaremos essa discussão nas considerações finais desta análise.

Por existir apenas um único valor para o qual a função não está definida nos reais, $x=0$, acredito que é até aceitável um número reduzido de alunos ter acertado o exercício e justificado a resposta por meio de uma substituição numérica. Podemos pensar na possibilidade de que, se fosse outra função para a qual não pudéssemos colocar o "*x*" em evidência no denominador e, resolvendo a equação e encontrando a solução do exercício, os alunos não teriam a facilidade de usar uma substituição numérica para chegar a uma conclusão. Ainda assim, não podemos duvidar da capacidade dos alunos terem abstraído e raciocinado o suficiente para enxergar a resposta correta. Mesmo que os desempenhos na sondagem, de um modo geral, não nos encorajem a pensar desta forma.

Com relação aos erros, ocorreram na resolução da equação de 2º grau, na manipulação algébrica de potências de mesma base e aqueles que, mesmo colocando o "x" em evidência no denominador e solucionando corretamente a equação, não souberam ou se esqueceram de finalizar o exercício.

Destaco a seguir algumas das soluções apresentadas pelos alunos:

$f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 + 6x} = 1$ *"x deve ser um valor que substituindo na expressão* $x^3 - x^2 + 6x$*, o resultado obtido será igual a 1."*

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 + 6x} = \frac{1}{6x^5}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 + 6x} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x - 6x} \rightarrow f(x) = \frac{1}{5x} \rightarrow f(x) = -5x$$

Nesses dois casos, além de todos os equívocos cometidos na resolução, a questão ficou sem uma conclusão, afinal deveriam ser apontados valores para os quais a função não estaria definida nos reais.

Questão 8: Resolva em R as seguintes equações:

Item a: $(x+1)(x+2) = (x+5)^2$

Responderam satisfatoriamente	37
Em branco	19
Erro relacionado com produtos notáveis	14
Erro na multiplicação (x+1)(x+2)	5
Erro em operação básica no desenvolvimento	1
Erro de sinal	12
Tentativa por substituição numérica equivocada	1
Erro por "perder algo" no caminho	1
Iniciou de forma correta, mas parou	1
Outros	3

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 33

Erro em conteúdo de ensino médio: 5

Erro em conteúdo de ensino superior:0

Erro de interpretação: 0

Vamos pensar nos resultados (escore de acertos e erros) desta questão apenas dentro do contexto da sondagem, para então podermos admitir que este item teve um bom número de respostas satisfatórias (40% de acertos). Além disso, nessa questão tivemos uma redução considerável no número de alunos que não tentaram resolver (20% das questões ficaram em branco).

Com relação aos erros, se concentraram no trabalho com produtos notáveis e naqueles de sinal no desenvolvimento da resolução. Um aluno tentou fazer a questão por substituição numérica, outro não reescreveu parte de seus encaminhamentos na passagem de uma linha para outra (por distração, provavelmente) e houve ainda um caso no qual a solução se encaminhava de forma adequada, mas não teve seqüência, não chegando a uma resposta final.

Seguem algumas soluções para ilustrar:

$$(x+1)(x+2)=(x+5)^2 \to x^2+2x+x+1=x^2+25 \to$$
$$x^2-x^2=25-2 \to x=\frac{23}{3}$$

Praticamente todos os erros relacionados com produtos notáveis foram do tipo acima, alguns outros ocorreram como veremos a seguir.

$$(x+1)(x+2)=(x+5)^2 \to x^2+3x+3=x^2+10 \to$$
$$x^2-x^2+3x+3-10=0 \to 3x-7=0$$

Nesse caso, além dos erros cometidos na resolução, ao chegar em $3x-7=0$ o aluno simplesmente parou.

$$(x+1)(x+2)=(x+5)^2 \to x+3=2x+25$$
$$\to 3x=21 \to x=7$$

$$(x+1)(x+2)=(x+5)^2 \to x^2+2x+x+2=x^2+25+10x$$
$$\to 3x+2=25 \to 3x=23 \to x=\frac{23}{3}$$

Este é aquele caso do aluno que "perdeu algo no caminho". De fato, do segundo para o terceiro passo ele esqueceu o "$10x$". Pelo encaminhamento inicial e também o que se observa no restante da resolução, é possível que tenha sido um erro por distração.

Item b: $\frac{2(x+3)}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}$

Responderam satisfatoriamente	5
Em branco	42
Erro relacionado ao M.M.C.	15
Simplificação inadequada	3
Erro de sinal	22
Substituição numérica equivocada	1
Erro em operação básica no desenvolvimento	2
Outros	4

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 42

Erro em conteúdo de ensino médio: 5

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

As questões deixadas em branco novamente aparecem em destaque, permitindo questionar se as operações com frações seriam assustadoras, pois se trata de uma equação de 1º grau e apenas cinco alunos chegaram à resposta correta. É mais um caso preocupante, pois apesar de não ser a equação mais simples já vista, também está longe de ser considerada difícil a ponto de termos um índice tão pequeno de soluções satisfatórias. Ainda que seja um tanto difícil olhar para um exercício, tentar se colocar na posição do aluno e não do professor que já conhece os caminhos, as resoluções, é complicado aceitar essa realidade, em se tratando de nível superior.

Com relação aos erros, houve uma grande incidência nos de sinal e muitos na determinação do M.M.C., sendo que em alguns casos esses equívocos ocorreram simultaneamente. Ocorreram também erros em operações básicas, como adição e multiplicação, além das simplificações inadequadas e um caso de tentativa por substituição numérica.

Ilustrando alguns desses erros, seguem abaixo algumas das soluções analisadas:

$$\frac{2(x+3)}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}\rightarrow\frac{2x+6}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}$$
$$\rightarrow 2x+2-x-2=2-\frac{x+1}{4}\rightarrow x=2-\frac{x+1}{4}$$
$$\rightarrow 4x=2-x+1\rightarrow 5x=3\rightarrow x=\frac{3}{5}$$

Nessa solução, podemos ver os erros de sinal (a maioria foi da mesma forma) entre outros equívocos, como aquele mais ao final, da passagem do denominador 4 para o outro lado da igualdade, multiplicando o *x*.

$$\frac{2(x+3)}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}\rightarrow 4x+12-3x+12=8-x-1$$
$$\rightarrow 2x=-17\rightarrow x=-\frac{17}{2}$$

Aqui um caso no qual o aluno determinou o M.M.C. corretamente em cada lado da equação separadamente, mas de forma equivocada simplificou os denominadores diferentes e acabou errando a questão. Para efeitos de escore, considerei essa solução como erro por simplificação inadequada.

$$\frac{2(x+3)}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}\rightarrow\frac{2x+6}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}\rightarrow$$
$$2x+3-x-2=2-\frac{x+1}{4}\rightarrow x+1=8-x+1\rightarrow$$
$$2x+2=8\rightarrow 2x=6\rightarrow x=3$$

Mais um caso de erro por simplificação inadequada, além de termos um M.M.C. errado mais para o final.

$$\frac{2(x+3)}{3}-\frac{x-4}{2}=2-\frac{x+1}{4}\rightarrow 8x+12-6x-24+24+3x+3=0$$
$$\rightarrow 5x+15=0\rightarrow x=-\frac{15}{5}\rightarrow x=-3$$

Questão 9: A partir de um ponto, observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30º. Caminhando 23m em direção ao prédio, atingimos um outro ponto, onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60º. Desprezando a altura do observador, calcule em metros a altura do prédio.

Responderam satisfatoriamente	7
Em branco	16
Interpretação correta (desenho), mas não soube seguir	32
Erro de interpretação (desenho)	38
Outros	1

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 1

Erro em conteúdo de ensino médio: 32

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 38

Nesta questão, se por um lado as respostas satisfatórias ainda não representam um índice significativo, que seria num valor ideal 100% e embora ainda tenha ocorrido um número considerável de erros, não se pode lamentar a falta de iniciativa para resolver o exercício, ainda que se considere 17% de questões em branco um índice alto, pois o desejável seria nenhuma questão em branco. A maior parte dos erros cometidos nessa questão foi provocada por equívocos na interpretação do problema. Trinta e dois alunos fizeram uma representação correta da situação proposta, mas não souberam dar seqüência à resolução.

Questão 10: Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) as seguintes afirmações, explicando seu raciocínio:

Para este exercício, assim como em todas as questões da sondagem deixadas em branco, ficam algumas perguntas: Aqueles alunos que não justificaram suas respostas pensaram em uma solução ou simplesmente marcaram V ou F? Ficamos sem ter como analisar os erros sem justificativa e também não podemos valorizar os acertos dessa mesma forma. Se a sondagem não contaria para a avaliação, qual a necessidade de marcar uma resposta sem justificar? Vergonha de deixar em branco? Mas aí seria incoerente com as demais questões da atividade. Como as atenções nessa etapa da pesquisa estão voltadas a analise dos erros, não aprofundaremos nesses questionamentos, pois as reflexões e explicações seriam extensas e fugiriam do nosso objetivo: compreender as dúvidas que os alunos têm em relação aos conteúdos.

Outra pergunta que imaginei ao analisar essas respostas foi a seguinte: Eles primeiro julgaram as sentenças (se verdadeiras ou falsas) e depois tentaram justificar suas respostas ou pensaram no que estava escrito para depois marcar V ou F?

Vamos analisar, em cada item da questão 10, os erros cometidos nas justificativas, bem como no julgamento das sentenças (se são verdadeiras ou falsas).

Item a: (   ) $8^{\frac{2}{3}} = 2^2$

Acertaram resposta e justificativa	30
Acertou resposta, mas justificativa errada	1
Acertaram resposta, mas não justificaram	11
Errou resposta e justificativa correta	1
Erraram resposta e justificativa	10
Erro na resposta e sem justificativa	28
Em branco	13

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 51

Erro em conteúdo de ensino médio: 0

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Comparando acertos e erros com justificativas coerentes, isto é, resposta e justificativa correta, erro no julgamento e na justificativa, temos uma diferença considerável em favor das respostas satisfatórias (31% contra 11%). Já nas tentativas por “chutes” a situação se inverte e o erro prevalece (30% contra 12%). Apenas um aluno acertou a resposta, mas errou a justificativa. Houve ainda um caso no qual ocorreu a incoerência da sentença ter sido considerada falsa, mas a justificativa mostrar que é verdadeira.

Nas justificativas erradas apareceram, principalmente, as dificuldades no trabalho com as propriedades operatórias das potências. Seguem algumas das soluções:

(F) $8^{\frac{2}{3}} = 2^2 \rightarrow 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \neq 4$

(F) $8^{\frac{2}{3}} = 2^2 \rightarrow 8^{\frac{1}{2}} = 2^2$

(F) $8^{\frac{2}{3}} = 2^2 \rightarrow 2^2 = 8$

(F) *"pq* 2^2 *é 4 e* $8^{\frac{2}{3}}$ *é* $\pm 8^{6,666}$ *que daria muito mais que 4".*

Item b: (   ) $\sqrt{x^2} = x$, para $x \in R$

Acertou resposta e justificativa	1
Acertaram resposta, mas justificativa errada	2
Acertou resposta, mas não justificou	1
Errou resposta e justificativa correta	0
Erraram resposta e justificativa	51
Erro na resposta e sem justificativa	32
Em branco	7

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0

Erro em conteúdo de ensino médio: 85

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Neste item houve quase uma unanimidade, pois praticamente todos aqueles que erraram a questão justificaram suas respostas da mesma forma. Percebemos também que todos os alunos que responderam sem justificar erraram, com uma única exceção. Somente um acertou justificando adequadamente e dois acertaram mesmo errando a justificativa. Seguem algumas soluções:

(V) $\sqrt{x^2} = x$, para $x \in R \rightarrow \quad \sqrt[2]{x^2} = x \rightarrow x = x$

Isto é, na justificativa simplesmente fizeram a simplificação do índice do radical pelo expoente do radicando. Foi essa a justificativa de grande parte dos alunos que erraram a questão.

(V) $\sqrt{x^2} = x$, para $x \in R$

"verdadeiro, pois a raiz quadrada de um número positivo elevado ao quadrado é igual ao valor do próprio número". O erro aqui foi considerar que os números reais são apenas positivos. Ocorreram algumas outras justificativas nesse mesmo sentido, apenas foram usados exemplos numéricos.

(V) $\sqrt{x^2} = x$, para $x \in R$

"sendo x um número real qualquer, o expoente 2 significa elevado a ele mesmo, e assim a raiz será o próprio x".

(V) $\sqrt{x^2} = x$, para $x \in R$

"raiz quadrada e potência de 2 são ações opostas, ou seja, se anulam".

(V) $\sqrt{x^2} = x$, para $x \in R$

"porque $x \in R$*"*

Item c: ( ) $sen(3\theta) = 3sen(\theta)$, para $\theta \in R$

Acertaram resposta e justificativa	15
Acertaram resposta, mas justificativa errada	11
Acertaram resposta, mas não justificaram	35
Errou resposta e justificativa correta	0
Erraram resposta e justificativa	3
Erro na resposta e sem justificativa	13
Em branco	17

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0

Erro em conteúdo de ensino médio: 62

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Nesta questão, ficamos com poucas alternativas na análise, pois, como já comentamos anteriormente, não há o que analisar em respostas (certas ou erradas) sem as respectivas justificativas. Por tanto, vamos verificar aquelas que apresentam uma explicação, tanto as questões que foram acertadas, quanto as que foram erradas.

Relembrando um pouco as produções escritas de toda a sondagem, em praticamente todas as questões encontramos tentativas por substituição numérica. Sabemos que na Matemática é muito mais fácil mostrar que uma sentença é falsa, pois basta um contra exemplo. Já para mostrar que algo é verdadeiro, o processo é mais trabalhoso. Há que se considerar que estamos lidando com alunos de Engenharia, a maioria recém chegando à Universidade e, portanto, não foi exigido algo muito rigoroso nessas justificativas. Mas o curioso em todos os itens dessa questão 10 foi o fato das substituições numéricas não terem aparecido tanto. Se tivessem se repetido, certamente veríamos um reflexo em termos de respostas e justificativas satisfatórias.

Para este item c, considero que seria exigido um esforço muito maior para tentar mostrar que é verdadeiro (até porque não é), do que simplesmente fazer um teste para qualquer valor de θ e verificar que se trata de uma sentença falsa e esse procedimento já serviria como justificativa. Além disso, evidenciamos que essa alternativa de solução não foi muito utilizada, pois temos um índice considerável se somarmos questões em branco, acertos e erros sem justificativa. Seguem algumas soluções e explicações para as respostas:

(F) $sen(3\theta) = 3sen(\theta)$, para $\theta \in R \rightarrow$ *”na primeira o 3 multiplica o ângulo e na segunda o seno”*.

Não está errado, mas não é uma justificativa adequada. Apenas traduz em uma frase o que está na simbologia da sentença. Ocorreram outras justificativas semelhantes, apenas com algumas palavras diferentes.

(F) $sen(3\theta) = 3sen(\theta)$, para $\theta \in R \rightarrow$ *"teria que ser?"*. Essa foi a "justificativa".

(F) $sen(3\theta) = 3sen(\theta)$, para $\theta \in R \rightarrow$ *"limite de* $sen(3\theta)$: 1 ou -1 e limite de $3sen(\theta)$: 3 ou -3.

(V) $sen(3\theta) = 3sen(\theta)$, para $\theta \in R \rightarrow \left.\begin{array}{l} sen(3 \cdot 30^\circ) = sen(90^\circ) = 1 \\ 3 \cdot sen(30^\circ) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{array}\right\} 1 \neq \frac{3}{2}$

Na resolução anterior, pudemos observar um dos casos nos quais a justificativa contradiz a resposta marcada pelo aluno. Esse educando não se deu conta disso e não alterou a opção assinalada, a qual provavelmente foi feita antes de refletir sobre a questão.

Item d: ( ) $\ln(a^2 b^3) = (\ln a)^2 + (\ln b)^3$

Acertaram resposta e justificativa	7
Acertaram resposta, mas justificativa errada	12
Acertaram resposta, mas não justificaram	16
Errou resposta e justificativa correta	0
Erraram resposta e justificativa	3
Erro na resposta e sem justificativa	27
Em branco	29

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0

Erro em conteúdo de ensino médio: 58

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

De forma análoga ao item anterior, possivelmente os resultados nesse exercício seriam outros se fosse utilizada a substituição numérica como um primeiro procedimento de resolução. As respostas sem justificativa (certas, erradas e em branco) somam um índice alto (77%) e dentre os que acertaram a questão, 12 alunos justificaram suas afirmações de forma equivocada. Analisando as respostas, percebi que os equívocos foram provocados, principalmente, pela falta de conhecimento das propriedades operatórias dos logaritmos. Além disso, muitas justificativas incorretas foram devido ao fato dos alunos não perceberem que, tanto em $(\ln a)^2$ quanto em $(\ln b)^3$, o que está sendo elevado às respectivas potências não é o "*a*" nem o "*b*", mas sim os logaritmos. Apresento a seguir algumas das soluções com justificativas incorretas:

(F) $\ln(a^2b^3) = (\ln a)^2 + (\ln b)^3 \rightarrow$ *"correto seria* $\ln(a^2b^3) = \ln a^2 + \ln b^3$ *"*.

Dentre as questões com resposta correta e justificativa errada, essa explicação foi a mais freqüente.

(F) $\ln(a^2b^3) = (\ln a)^2 + (\ln b)^3 \rightarrow$ *"correto:* $\ln(a^2b^3) = \ln a^2 \cdot \ln b^3$ *"*.

(V) $\ln(a^2b^3) = (\ln a)^2 + (\ln b)^3 \rightarrow$ *"são formas de mostrar a mesma equação"*.

(F) $\ln(a^2b^3) = (\ln a)^2 + (\ln b)^3 \rightarrow \ln(a^2b^3) \neq \ln^2 a^2 \cdot \ln^3 b^3$.

(F) $\ln(a^2b^3) = (\ln a)^2 + (\ln b)^3 \rightarrow$ *"o* $\ln$ *da expressão não poderia ser elevado a nenhum expoente"*.

Item e: (   ) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

Acertaram resposta e justificativa	44
Acertaram resposta, mas justificativa errada	2
Acertaram resposta, mas não justificaram	16
Errou resposta e justificativa correta	0
Erraram resposta e justificativa	8
Erro na resposta e sem justificativa	20
Em branco	4

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 46

Erro em conteúdo de ensino médio: 0

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Dado o grande número de alunos que somados acertaram resposta e justificativa, questões em branco e soluções sem explicação, restaram poucas resoluções para analisar. Alguns que justificaram corretamente o fizeram por contra exemplo (substituição numérica), mas a maioria procedeu através do produto notável $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, que já havia aparecido anteriormente, no item "*a*" da questão 8. Dentre os que erraram, verifiquei se o erro poderia ter alguma relação com o da questão anterior já referida, constatando que nem todos cometeram o mesmo equívoco em ambas. Alguns cometeram um erro duplo, pois trabalharam de uma forma no item "*a*" da oitava questão (por exemplo: $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 10$) e consideraram que $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ seria verdadeiro. Poucos mantiveram uma coerência nas duas questões. Houve quem errasse a anterior, mas acertasse, mesmo sem justificar, esta que estamos analisando no momento. E ainda aqueles que trabalharam de uma forma correta na questão 8 e, contraditoriamente, apontaram que a sentença do item "e" da décima questão seria verdadeira.

Item f: ( ) $\left(xy\right)^2 = x^2y^2$

Acertaram resposta e justificativa	31
Acertaram resposta, mas justificativa errada	2
Acertaram resposta, mas não justificaram	30
Errou resposta e justificativa correta	1
Erraram resposta e justificativa	11
Erro na resposta e sem justificativa	12
Em branco	7

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 56

Erro em conteúdo de ensino médio: 0

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Neste item tivemos mais um caso no qual o aluno errou a questão, mas, contraditoriamente, a sua justificativa afirmava que a sentença é verdadeira. Dois alunos acertaram a questão, embora suas explicações não fossem satisfatórias e muitos obtiveram êxito na resposta sem justificar. Devido ao fato da sentença ser verdadeira, não teríamos aqui a possibilidade de apontar um contra-exemplo e, portanto, as substituições numéricas não serviriam como justificativas, mas sim como uma pista para resolver a questão. Ainda assim, tais justificativas foram aceitas, pois não estavam sendo exigidas explicações muito rigorosas, como demonstrações. Seguem abaixo algumas das resoluções com justificativas equivocadas:

(F) $(xy)^2 = x^2y^2 \rightarrow \begin{cases}(1+2)^2 = 9 \\ 1^2 + 2^2 = 5\end{cases} \rightarrow 9 \neq 5$

(F) $\left(xy\right)^2 = x^2y^2 \rightarrow$ *"pois daria* $\left(xy\right)^2 = (x^2 \cdot xy)\cdot(yx \cdot y^2)$ "

(F) $\left(xy\right)^2 = x^2y^2 \rightarrow \begin{cases}(1\cdot 2)^2 = (3)^2 = 9 \\ 1^2 \cdot 2^2 = 1\cdot 4 = 4\end{cases} \rightarrow 9 \neq 4$

(F) $\left(xy\right)^2 = x^2y^2 \rightarrow (xy)^2 = x^2 \cdot xy \cdot xy \cdot y^2 = x^4y^4$

(F) $\left(xy\right)^2 = x^2y^2 \rightarrow (xy)^2 = xy \cdot xy = 2xy$

(F) $\left(xy\right)^2 = x^2y^2 \rightarrow$ *"Não pode, pois o resultado de* $x \cdot y$ *é que deve ser elevado ao quadrado".*

Até é verdade, mas faltou ponderar sobre o resultado de $x^2 \cdot y^2$.

(F) $\left(xy\right)^2 = x^2y^2 \rightarrow (xy)^2 = x^2 \cdot 2xy \cdot y^2$

Esse aluno fez uma confusão com a regra dos produtos notáveis, ele inclusive errou o item anterior por considerar verdadeiro $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. Essa mesma confusão também apareceu em outras soluções, mas acredito que nesta ficou mais claro o tipo de erro.

Item g: ( ) $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

Acertaram resposta e justificativa	21
Acertaram resposta, mas justificativa errada	5
Acertaram resposta, mas não justificaram	24
Errou resposta e justificativa correta	1
Erraram resposta e justificativa	10
Erro na resposta e sem justificativa	25
Em branco	8

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 65

Erro em conteúdo de ensino médio: 0

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Neste exercício, o tipo de erro mais comum foi justificar a resposta (errada) simplificando o expoente de "*x*" pelo índice do radical, obtendo $x + y^2$, ou ainda os dois expoentes pelo mesmo índice e, desta forma, considerando a sentença como verdadeira. O número de respostas sem justificativa ultrapassa os 50% e somando-se com as questões deixadas em branco, sobram poucas soluções para analisar, descontando-se também as que foram acertadas e bem justificadas.

Item h: ( ) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x+y}{y+x}$

Acertaram resposta e justificativa	28
Acertaram resposta, mas erraram justificativas	4
Acertaram resposta, mas não justificaram	29
Errou resposta e justificativa correta	1
Erraram resposta e justificativa	4
Erro na resposta e sem justificativa	18
Em branco	10

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 56

Erro em conteúdo de ensino médio: 0

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

A sentença aponta um dos erros mais comuns em adição de fração: somar numeradores e denominadores. Dentre os erros nas justificativas, os mais freqüentes estavam relacionados com o M.M.C., dos quais $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x+y}{y\cdot x}$ e $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{2x+2y}{y\cdot x}$ foram as explicações mais utilizadas. Entre os que acertaram resposta e justificativa, a maioria justificou através de contra-exemplo.

Dados finais dessa etapa:

Entre itens e subitens, a sondagem continha 18 exercícios, totalizando 1692 questões analisadas nessa etapa. Descontados 377 acertos e 422 questões deixadas em branco, as 893 questões erradas se distribuíram da seguinte forma:

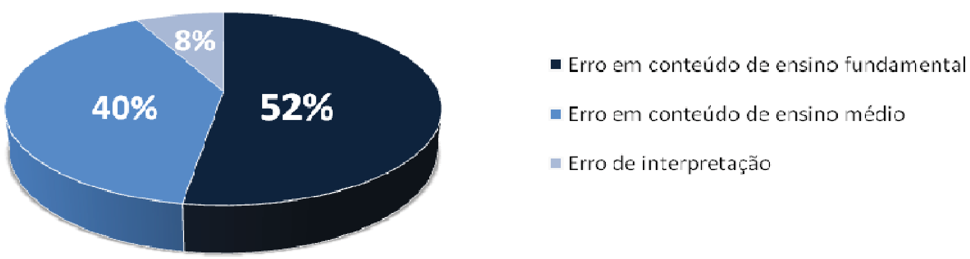


Figura 44 – Distribuição dos erros cometidos na sondagem

4.3 Análise dos erros cometidos na primeira avaliação

Por se tratar de duas provas muito parecidas, com questões semelhantes, resolvi unir as análises dos erros dessa etapa. Vou colocar os enunciados das duas provas e em seguida um resumo das análises dos erros. Ao todo, 104 alunos realizaram a avaliação. Segue a análise dos erros nessa atividade.

Turma A: Prova aplicada em 7 de abril de 2008, sendo que 58 alunos compareceram.

Turma B: Prova aplicada em 8 de abril de 2008, sendo que 46 alunos compareceram.

Turma A, 1ª questão: dados os vetores $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

a) Encontre um vetor unitário com a mesma direção e sentido de $\vec{v}$.

b) Dado $\vec{w} = a\vec{i} + 4\vec{j}$, determine o valor de ***a*** para que $\vec{w}$ seja ortogonal a $\vec{u}$.

c) Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ao deslocar uma partícula sobre um segmento de reta do ponto P(3,2) ao ponto Q(6,5).

Turma B, 1ª questão: dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ e $\vec{v} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$

a) Encontre um vetor unitário com a mesma direção e sentido de $\vec{v}$.

b) Dado $\vec{w} = -3\vec{i} + a\vec{j}$, determine o valor de ***a*** para que $\vec{w}$ seja ortogonal a $\vec{u}$.

c) Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ ao deslocar uma partícula sobre um segmento de reta do ponto A(4,0) ao ponto B(-2,4).

Item a:

Acertos: 53

Em branco: 3

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 13
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 22
Erro de interpretação: 13

Nesse item, considerei as tentativas por gráficos como interpretação errada da questão ou do conteúdo envolvido. Nos erros de procedimento, a maior incidência foi envolver o vetor $\vec{u}$ nas resoluções. Ocorreram também algumas respostas erradas sem desenvolvimento, provavelmente "chutes". Já nos erros em conteúdos de ensino fundamental, encontrei os erros de sinal, no trabalho com a raiz, operações elementares e na manipulação algébrica. Seguem alguns exemplos dos erros encontrados nesse item:

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 - (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{12}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 - (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{15}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 - (-2)^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\vec{v} = (3-4)+(-2-2) = -1+(-4) = -1\vec{i} - 4\vec{j} \\ |u\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \end{array}\right\} \frac{u\vec{v}}{|u\vec{v}|} = \frac{-1\vec{i}}{\sqrt{17}} + \frac{-4\vec{j}}{\sqrt{17}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6{,}40 \rightarrow \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{5\vec{i}}{6{,}40} + \frac{-4\vec{j}}{6{,}40}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{25+16} = \sqrt{49} = 7 \rightarrow \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{5\vec{i}}{7} + \frac{-4\vec{j}}{7}$$

Item b:

Acertos: 30

Em branco: 16

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 49
Erro de interpretação: 9

Nessa questão, muitos alunos cometeram erros por usar uma fórmula errada ou no desenvolvimento do produto escalar. Alguns não souberam proceder, fazendo algumas tentativas com recursos que não os ajudariam a solucionar o exercício (muitos esboçaram gráficos). Houve, também, aluno que escolheu o vetor errado para trabalhar. É possível que o número elevado de erros, principalmente por estratégias equivocadas de resolução, seja decorrente de dificuldades na leitura e interpretação do enunciado. Seguem alguns exemplos dos erros encontrados nesse item:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} = a\vec{i} + 4\vec{j} \\ a = ? \quad \vec{w} \perp \vec{u} \\ \vec{u} = 5i - 4j \\ \vec{w} = -5i + 4j \end{array}\right\} \vec{w} \cdot \vec{u} = (-5+5) + (-4+4) \rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = (0,0) \perp$$

$$\vec{u} = (3\vec{i} - 2\vec{j})^2 \rightarrow \vec{w} = a\vec{i} + 4\vec{j} \rightarrow \vec{w} = 9\vec{i} + 4\vec{j} \rightarrow a = 9$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} = a\vec{i} + 4\vec{j} \\ \vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \end{array}\right\} \vec{w} = 3\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{w} = a\vec{i} + 4\vec{j} \rightarrow 2a + 4j = 0 \rightarrow a = \frac{4}{2} \rightarrow a = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} = a\vec{i} + 4\vec{j} \\ \vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \end{array}\right\} \vec{w} = -3\vec{i} + 4\vec{j} \rightarrow a = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} = (3, a) \\ \vec{u} = (4,2) \end{array}\right\} \vec{w} \cdot \vec{u} = (-12 + 2a) \rightarrow a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$$

Item c

Acertos: 54

Em branco: 17
Erro em conteúdo de ensino fundamental: 1
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 13
Erro de interpretação: 19

Nessa questão, vários alunos iniciaram de forma correta, mas por algum motivo pararam e deixaram a solução incompleta. Houve um grande número de soluções que continham a fórmula certa para solucionar a questão, mas os alunos se atrapalharam e usaram dados equivocados, errando o exercício. Dentre esses, muitos consideraram o ângulo errado para resolver o problema. Ocorreram enganos na escolha do procedimento, alguns esboçaram gráficos e outros tentaram com fórmulas impróprias. Já entre aqueles que "chutaram" uma resposta qualquer, um dos alunos acrescentou ao lado da resposta: *"chute na Lua"*. Seguem algumas respostas, para exemplificar o tipo de erro analisado nesse item.

"O trabalho será zero, pois a força $\vec{F}$ e o plano $\vec{V}$ formam um ângulo de 90º, cujo $\cos 90^\circ = 0$."

$$W = \vec{F} \cdot d \cdot \cos\theta = (3\vec{i} - 2\vec{j}) \times (3\vec{i} + 3\vec{j}) \rightarrow W = 9\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$(2,-4) \rightarrow d = \sqrt{2^2 + (-4^2)} \rightarrow d = \sqrt{20}$$

$$W = \left|-i + 3j\right| \cdot \left|10\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow W = \sqrt{10} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow W = 5 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \rightarrow W = 5\sqrt{20}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\vec{F}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} \rightarrow \left|\vec{F}\right| = \sqrt{10} = 3{,}16 \\ AB = \sqrt{6^2 + 4^2} \rightarrow AB = \sqrt{52} = 7{,}2 \end{array}\right\} W = 3{,}16 \cdot 7{,}2 \cdot 0{,}55 \rightarrow W = 12{,}5J$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\vec{F}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} \rightarrow \left|\vec{F}\right| = \sqrt{10} \\ AB = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = (-2 - 4) + (4 - 0) = -2 \\ \cos\theta = \dfrac{AB}{\left|AB\right|} = \dfrac{-2}{\sqrt{52}} \end{array}\right\} W = \sqrt{10} \cdot \sqrt{52} \cdot \frac{-2}{\sqrt{52}} \rightarrow W = -2\sqrt{10}$$

Turma A, 2ª questão: Seja $f(x) = \sqrt{x+1} + 4$

Turma B, 2ª questão: Seja $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$

Para as duas turmas os mesmos subitens:

a) O domínio da *f* é______________

b) *f*(3) = ______________________

c) *f*(x) = 7 se x = ________________

d) Faça um esboço do gráfico de *f*

e) A imagem de *f* é ______________

Item a:

Acertos: 55

Em branco: 2

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 13
Erro em conteúdo de ensino médio: 34
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 0

Na turma A, dentre os que demonstraram compreender a definição de domínio, mas optaram por uma estratégia equivocada para determiná-lo, a maioria cometeu o seguinte engano:

$$f(x) = \sqrt{x+1} + 4$$
$$x + 1 + 4 \geq 0$$
$$x \geq 5$$

Alguns simplesmente desconsideraram o 4 e não realizaram cálculos, determinando $x \geq 0$ como domínio. Um tipo de equívoco, em particular, chamou atenção pelo tipo de resultado, sem aparente relação com qualquer da expressão original:

$$x + 1 > 0 \rightarrow x > -2 .$$

Na turma B, alguns alunos responderam que o domínio da função seria todo o conjunto dos reais. Como não constava desenvolvimento nessas soluções, imagino que foram chutes. Já os que erraram ao responder que seria [3;∞), seis respostas assim, penso que cometeram o seguinte equívoco:

$$\sqrt{x - 2 - 1} \geq 0 .$$

Item b:

Acertos: 84

Em branco: 5
Erro em conteúdo de ensino fundamental: 6
Erro em conteúdo de ensino médio: 9
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 0

Na turma A, dois alunos responderam da seguinte forma:

$$F(3) = \sqrt{3+1} + 4 = \sqrt{8}$$

Dentre as soluções corretas, uma chamou atenção, qual seja: $F(3) = \sqrt{4} + 4$. Por que não $F(3) = 6$? O que teria desmotivado tal aluno a seguir? Na turma B, três respostas sem desenvolvimento e duas "incompletas": ($f(3) = \sqrt{1} - 1$). Resolvi considerar essas respostas como erro e computei como erro relacionado com o ensino fundamental.

Item c:

Acertos: 82

Em branco: 7

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 8
Erro em conteúdo de ensino médio: 7
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 0

Considerei como acerto casual toda resposta sem desenvolvimento, embora exista a possibilidade do cálculo mental. Ainda assim, soluções como “x = -14” e “x = R*” são erros preocupantes, por evidenciar falta de conhecimento no trabalho com radicais. Ocorreram, também, erros em operações elementares, tais como:

$$\sqrt{7+1}+4=\sqrt{8}+4$$

$$\sqrt{44+1+4}=\sqrt{49}=7$$

$$\sqrt{x+1}+4=7 \rightarrow \sqrt{x+1}=7-4 \rightarrow \sqrt{x+1}=3 \rightarrow x+1=3^2 \rightarrow x=10$$

E erros de manipulação algébrica, como:

$$\sqrt{x+1}+4=7 \rightarrow \sqrt{x+1}-3=0 \rightarrow x=\sqrt{x+1}-3$$

$$\sqrt{x+1}+4=7=\sqrt{x+1}+4=\sqrt{x+1}-3=0=x+1-3=x=2$$

$$\sqrt{x+1}+4=7 \rightarrow \sqrt{1x}+4=7 \rightarrow 1x+4=7 \rightarrow 1x=7-4 \rightarrow x=3$$

Também encontrei erros no trabalho com o radical:

$\sqrt{2^2+1}+4=7$, no caso ele deve ter pensado $\sqrt{2^2}+1+4=7$

Item d:

Acertos: 64

Em branco: 9

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 31
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 0

Nesse item, a maioria dos que erraram representou uma reta. Alguns esboçaram uma parábola, outros acertaram o tipo de curva, mas deslocada em relação ao eixo y. Houve, também, alunos representaram a curva com a concavidade invertida. Gráficos de funções são estudados no ensino médio, portanto foram computados como erros relativos a esse nível.

Item e:

Acertos: 62

Em branco: 10

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 32
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 0

Nessa segunda questão reparei que, em muitas das soluções dos alunos, os gráficos, domínios e imagens eram incoerentes. Isso me leva a questionar se eles sabem o que estão fazendo quando escrevem o domínio e a imagem da função. Aparentemente não vêem ligação entre essas perguntas. Alguns responderam de forma coerente com os seus gráficos, também equivocados. Assim, podemos dizer que a maior parte dos erros cometidos nesse item foi uma conseqüência do erro anterior.

Turma A, 3ª questão: represente graficamente a função *g* tal que

$$g(x) = \begin{cases} |2x+1| & ,se \text{ x} \leq 0 \\ 3 & ,\text{se } 0 < \text{x} < 1 \\ -x^2+1 & ,\text{se x} \geq 1 \end{cases}$$

Turma B, 3ª questão: represente graficamente a função *g* tal que

$$g(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & , se\ x \le -1 \\ 2 & , se\ -1 < x < 1 \\ |x - 2| & , se\ x \ge 1 \end{cases}$$

Acertos: 9

Em branco: 9

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 86
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 0

Alguns alunos erraram duas partes do gráfico, a maioria acertou apenas o gráfico no intervalo (-1,+1). Já aqueles que cometeram erros em apenas uma parte, o maior índice de erros foi no do módulo. Apenas nove alunos responderam de forma satisfatória.

Turma A, 4ª questão: Um projétil é lançado verticalmente para cima e seu deslocamento em função do tempo é dado pela expressão $S = 200 - 2t^2$ (*S* em metros e *t* em segundos).

Turma B, 4ª questão: Um projétil é lançado verticalmente para cima. Supondo que sua altura h (metros), em relação ao solo, t segundos depois do lançamento, seja $h(t) = -4t^2 + 200t$.

Para as duas turmas, os mesmos subitens:

a) Faça a representação gráfica do trajeto realizado pelo mesmo.

b) Determine a altura máxima atingida pelo projétil.

c) Determine o tempo em que o projétil permaneceu no ar.

Item a:

Acertos: 52

Em branco: 23

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 29
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 0

A maior parte dos estudantes que errou essa questão representou uma reta, alguns esboçaram a parábola com a concavidade invertida e quatro representaram 1/2 parábola. Dois erraram a posição da curva em relação ao eixo y e um que, curiosamente, representou o gráfico como sendo um ponto.

Item b:

Acertos: 40

Em branco: 30

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 12
Erro em conteúdo de ensino médio: 22
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 0

Cinco alunos encontraram corretamente o tempo, mas provavelmente esqueceram de determinar a altura. Sete calcularam o tempo e o consideraram como altura. Encontrei, também, erros em operações elementares e na resolução de equações de segundo grau. Seguem algumas soluções, para exemplificar o tipo de erro encontrado nessa questão.

$$2t^2 - 200 = 0 \rightarrow t = \frac{200 \pm \sqrt{200^2 - 4.2.0}}{4}$$

$$t = \frac{200 \pm 200}{4} \rightarrow t_1 = 100 \text{ e } \mathrm{t}_2 = 0$$

$$200.100 - 2(100)^2 = 0 \rightarrow 20000 - 20000 = 0$$

20000m

$$2000 - 200 = 18 \text{ metros}$$

$$S = 200t - 2t^2 \rightarrow \text{módulo}: 200 + 4$$

$$\mathrm{S} = 200 + 4 \rightarrow \mathrm{S} = 204 \text{ metros}$$

$$\frac{200t}{2t^2} = \frac{200t}{4t} = 50m$$

Altura máxima em t = 50s $\rightarrow S = 200.50 - 2(50)^2 \rightarrow S = 50000000m$

$$S = 200t - 2t^2 \rightarrow \mathrm{S} = \frac{200\mathrm{t}}{2t^2} \rightarrow S = \frac{200}{2t}$$

$$S = 100t \rightarrow S = 100s$$

$$200.50 - 2(50)^2 = S \rightarrow 10000 - 500000 = S \rightarrow S = 490000m$$

“altura máxima = $\frac{tempo}{2}$ *„*

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{40000}{4} = 10000$$

Altura Max = 196m. Obs: esse aluno representou o gráfico como uma reta e com os eixos invertidos.

Item c:

Acertos: 50

Em branco: 41

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 6
Erro em conteúdo de ensino médio: 7
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 0

Em algumas provas, nesse item, encontrei erros na resolução de equação de 2º grau. Seguem algumas das soluções analisadas, para exemplificar os erros encontrados nesse exercício.

$$-4t^2 + 200t = 0$$
$$t^2 + 20t = 0$$
$$t = 4{,}2s$$

h = 625m : 1

$$2.10^2 = 200 \rightarrow 2.100 = 200 \rightarrow 200 = 200 \rightarrow 10s$$

"$2t^2$ =tempo de subida; $4t^2$ =tempo total que ele fica no ar, que seria o tempo de subida + o tempo de descida".

$$t = \frac{1920000}{60} \rightarrow t = 3200s \text{ ou t} = 53{,}33\,\text{min}$$

$$2t^2 - 200 = 0 \rightarrow t = \frac{-0 \pm 40}{2} \rightarrow t = 20s$$
$$s = 0^2 + 1600 \rightarrow s = 1600$$

Turma A, 5ª questão: complete a tabela a seguir com valores para *x* e *y* que tornem os pares (*x*,*y*) pertencentes a uma função polinomial de primeiro grau e descreva a lei da função.

X	0	1	2	4	6
Y	1		4		

Turma B, 5ª questão: complete a tabela a seguir com valores para *x* e *y* que tornem os pares (*x*,*y*) pertencentes a uma função polinomial de primeiro grau e descreva a lei da função.

X	0	1	2	3	4
Y	4			2	

Acertos: 33

Em branco: 25

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 39
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 7

Sete dos alunos que acertaram a questão não colocaram a lei de formação, que o enunciado pedia. Classifiquei essas respostas como erradas e considerei como erro de interpretação do enunciado. Ocorreu uma solução sem preencher a tabela e com o seguinte desenvolvimento para a lei de formação:

$$0 = x + 1 \rightarrow 1 = 1 + 1 \rightarrow 4 = 2 + 2$$

É estranho que não se deram conta de que, com a lei de formação que colocaram, não tinha como chegar aos números que usaram para preencher a tabela. Seguem algumas respostas (tabela preenchida e lei de formação) analisadas, para exemplificar o tipo de erro encontrado nesse item.

Esta tabela

X	0	1	2	3	4
Y	4	6	5	2	8

Esta lei:

$f(x) = 3x + 4$

Esta tabela:

X	0	1	2	3	4
Y	4	1	4	2	0

Lei de formação:

$f(x) = 3x - 2$

Esta tabela:

X	0	1	2	3	4
Y	4	0,66	1,33	2	2,66

Lei de formação:

$$f(x) = \frac{4x}{6}$$

Esta tabela:

X	0	1	2	3	4
Y	4	2	0	2	4

Lei de formação:

$f(x) = |2x - 4|$

Esta tabela:

X	0	1	2	3	4
Y	4	3,25	2,75	2	1,25

Lei de formação.

$$f(x) = \frac{4}{1 + x}$$

Esta tabela:

X	0	1	2	3	4
Y	4	0	2	2	0

Lei de formação:

$f(x) = |x^2 - 5x + 4|$

Esta tabela:

X	0	1	2	4	6
Y	1	2,5	4	7	10

Lei de formação:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{se } x \text{ é par} \\ x + \dfrac{5}{2}, \text{se } x \text{ é ímpar} \\ 1, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Esta tabela:

X	0	1	2	4	6
Y	1	1	4	16	36

Lei de formação:

$f(x) = x^x$

Turma A, 6ª questão: Dadas as funções $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ e $h(x) = x^3$ ache a lei da composta $f \circ g \circ h$, sendo ($f \circ g \circ h$)(x) = $f(g(h(x)))$.

Turma B, 6ª questão: Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $h(x) = x^2$ ache a lei da composta $f \circ g \circ h$, sendo ($f \circ g \circ h$)(x) = $f(g(h(x)))$.

Acertos: 59

Em branco: 16

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 10

Erro em conteúdo de ensino médio: 19

Erro em conteúdo de ensino superior: 0

Erro de interpretação: 0

Além das questões deixadas em branco, na Turma B encontrei doze respostas erradas, sendo cinco:

$$\frac{1}{x+1}$$

Algumas das soluções erradas foram causadas por equívocos na manipulação algébrica. Ou seja, os alunos sabiam o que era para ser feito, mas tropeçaram no caminho. Os demais erros foram ocasionados por não saberem o que é função composta.

Na turma A tivemos 17 respostas erradas. Entre as quais:

$$g \circ h = g(h(x)) \rightarrow g(x^3) = \frac{1}{x^3}$$
$$f \circ g \circ h = f(\frac{1}{x^3}) = \frac{1}{x^5+1}$$

$$f(\frac{1}{x}(x^3(x^2+1))) = f(x^2+x^3+1+\frac{1}{x})$$
$$g(h) = \frac{1}{x^3}$$
$$f(g(h(x))) = \frac{1}{x^3}+1$$

$$f \circ g \circ h = (\frac{1}{x^3})^2 + 1 \rightarrow f \circ g \circ h = \frac{1}{x^9}+1$$

Dados finais dessa etapa

Entre itens e subitens, a prova continha 14 exercícios, totalizando 1456 questões analisadas nessa etapa. Descontados 727 acertos e 213 questões deixadas em branco, as 516 questões erradas se distribuíram da seguinte forma:

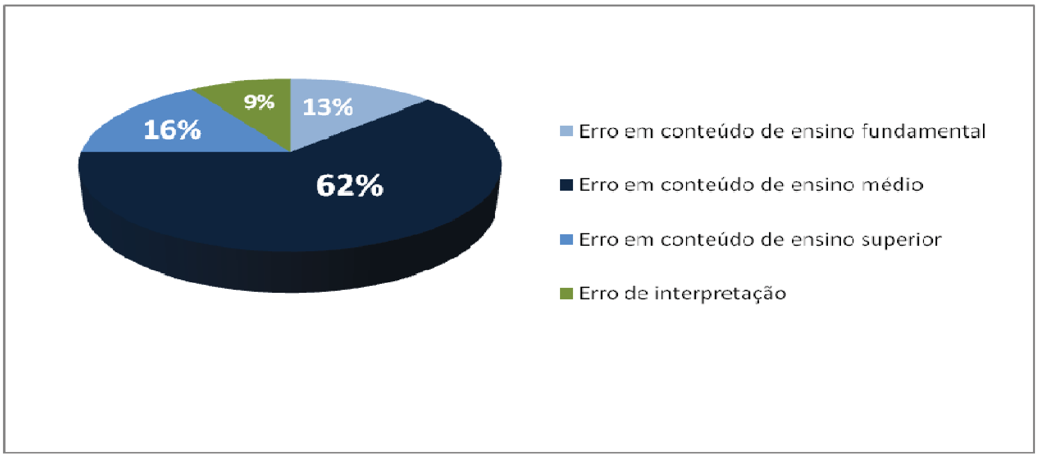


Figura 55 – Distribuição dos erros cometidos na primeira avaliação

4.4 Análise dos erros cometidos na segunda avaliação

De forma análoga à prova anterior, também nessa etapa foram unidas as análises dos erros cometidos pelos alunos das duas turmas. Ao todo, 95 alunos realizaram a avaliação, sendo que um entregou a prova totalmente em branco. Segue a análise dos erros nessa atividade.

Turma A: Prova aplicada em 26 de maio de 2008, sendo que 55 compareceram.

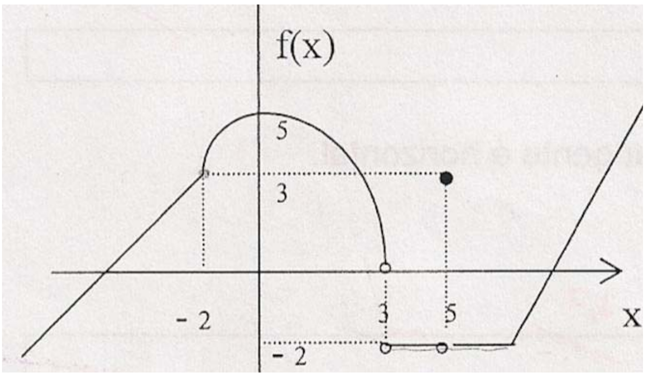
Turma B: Prova aplicada em 27 de maio de 2008, sendo que 40 alunos compareceram.

Turma A, 1ª questão: considerando o gráfico abaixo, responda:

a) $\lim_{x \to -2} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 5} f(x) =$

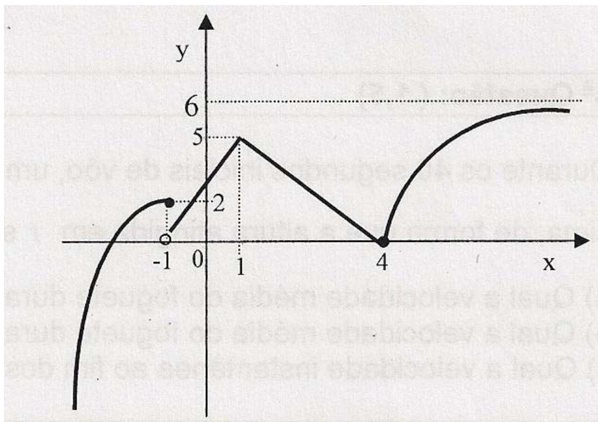


Turma B, 1ª questão: considerando o gráfico abaixo, responda:

a) $\lim_{x \to -1} f(x) =$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 4} f(x) =$



Item a:

Acertos: 64

Em branco: 6

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 25
Erro de interpretação: 0

Por se tratar de uma questão de análise de gráfico e de resposta direta, não havia um desenvolvimento para ser analisado com reflexão sobre as possíveis causas dos erros cometidos. Então apenas computei os erros e, por se tratar de limites, os classifiquei como de ensino superior.

Seguem algumas das respostas equivocadas, para exemplificar os erros encontrados nesse item:

$\lim_{x \to -2} f(x)$ *"pela direita e pela esquerda diferentes"*

$\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -2} f(x) = \exists$

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ R, -∞

$\lim_{x \to -1} f(x) = 2$

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ (-∞,2)

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ -1

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ -∞

Item b:

Acertos: 64

Em branco: 9

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 22
Erro de interpretação: 0

Mais uma questão que mostra o quanto alguns alunos têm de dificuldades para ler e interpretar gráficos. Na turma B, um dos alunos que acertou a questão, colocou a seguinte resposta:

“ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \exists$ tende a 6”

A solução não foi considerada errada, foi feita uma observação de que a resposta deveria ser uma ou outra e foram descontados alguns décimos da pontuação.

Seguem algumas respostas para essa questão:

“pelo eixo negativo de $y - 2$ *, pelos positivos* $\exists$ *”*

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 3} f(x) = -2$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \exists$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = R_1; R_5$

Item c:

Acertos: 53

Em branco: 10

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 32
Erro de interpretação: 0

Seguem algumas respostas, para exemplificar os erros encontrados nesse item:

$\lim_{x \to 5} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 5} f(x) = \exists$

$\lim_{x \to 5} f(x) = [5, -\infty)$

$\lim_{x \to 5} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to 4} f(x) = R_1, +\infty$

$\lim_{x \to 4} f(x) = \exists$

$\lim_{x \to 4} f(x) = 4$

$\lim_{x \to 4} f(x) = 5$

Turma A, 2ª questão: Calcule cada limite abaixo, se existir. Se não existir, justifique a sua resposta.

a) $\lim_{x \to -2} \frac{3x+1}{2-x} =$

b) $\lim_{x \to 5} \frac{4}{x-5} =$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{1-x} =$

Turma B, 2ª questão: Calcule cada limite abaixo, se existir. Se não existir, justifique a sua resposta.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2-x} =$

b) $\lim_{x \to 5} \frac{4x}{x+5} =$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{3}{1-2x} =$

Item a:

Acertos: 77

Em branco: 1

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 12
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 5
Erro de interpretação: 0

A maioria dos erros foi em operações elementares, sinais, no trabalho algébrico, principalmente nas simplificações. Alguns alunos procederam como se estivessem calculando o limite quando *x* tende ao infinito.

Seguem algumas soluções para exemplificar os erros encontrados nesse item:

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x+1}{2-x} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x+1}{2-x} = \exists$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2-x} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2-x} = \frac{6+1}{0} = 7$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2-x} = \frac{2.2+1}{2-2} = \frac{4+1}{0} = \frac{5}{0} = 0$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2-x} = \frac{3+0}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2-x} = \frac{3.2+1}{2-2} = \frac{6+1}{0} = 6$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2-x} = \frac{n}{-1} = \exists$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2-x} = \frac{3x}{-x} = \frac{3}{-1} = -3$$

“o limite não existe porque não dá p/fatorar”

“os limites são diferentes, então a EQUAÇÃO não possui limites”

Item b:

Acertos: 74

Em branco: 1

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 18
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 2
Erro de interpretação: 0

Novamente os erros se concentram em operações elementares, sinais, no trabalho com frações e manipulações algébricas. São poucos os que erram por falta de conhecimento específico de limites.

Seguem algumas soluções encontradas, para exemplificar os erros analisados nessa questão:

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}=\frac{4}{0}=4$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}=\frac{4}{0}=x\neq 5$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}=\frac{4}{(x-5)}\cdot\frac{(x-5)}{(x-5)}=\frac{4x-20}{x^2-25}=\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}=\frac{4}{0}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}=\frac{4}{1}=4$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}=\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)}=10$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}=\frac{4}{0}=0$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4x}{x+5}=L'H=\frac{4}{1+0}=4$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4x}{x+5}=\frac{4.5}{5+5}=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 5^+}\frac{4x}{x+5}=\frac{4.5}{5+5}=2\\ \displaystyle\lim_{x\to 5^-}\frac{4x}{x+5}=\frac{4.(-5)}{-5+5}=\frac{-20}{0}=-20\end{array}\right\}$$

"os limites são diferentes, então a EQUAÇÃO não possui limites"

"o limite é 10, pois pelos dois lados eles tendem a 10"

$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}=\frac{4}{0}=\exists$ *"imagem diferente do limite"*

$\exists$ *"pois a equação com coeficiente zero não existe"*

$\exists$ *"denominador zero"*

Item c:

Acertos: 35

Em branco: 7

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 21
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 32
Erro de interpretação: 0

Nessa questão, um dos alunos que considerou o limite inexistente justificou assim: *"o denominador receberá valores diferentes e na ordem crescente em relação ao numerador, que na resolução da equação esses valores variáveis tenderão a zero à medida que o numerador aumentar"*.

Embora nesse item o grande problema tenha sido em como encontrar o limite da função quando x tende ao infinito, se repetem em grande quantidade os erros em conteúdos de ensino fundamental.

Seguem algumas soluções analisadas, para exemplificar os erros encontrados nesse item:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=\exists$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=\pm\infty \text{ para } x\neq 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=\frac{5}{1-x}\cdot\frac{(1+x)}{(1+x)}=\frac{5+x}{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=\exists \text{ ou - }\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=\frac{5}{1-x}\cdot\frac{5}{(1-x)} \quad x\neq 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=\frac{5}{1-\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=1-\infty$$

“Não existe, pois tende ao infinito”

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=[0,1)\cup(1,\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=\frac{5}{1}=5$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-x}=\frac{5}{1-2}=-5$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-2x}=\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-2x}=\exists$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-2x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-2x}=\frac{3}{-1}=-3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-2x}=\frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-2}=\frac{3}{x}.\frac{x}{1}-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{6-1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-2x}=\frac{3}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}=\frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-2x}=\frac{3}{-\infty}=\frac{-\infty}{0}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-2x}=(0,-\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1-2x}=\frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}=\frac{3}{x}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{3x}{x}-\frac{3}{2x}=3-\frac{3}{2x}=?$$

Turma A, 3ª questão: Dada a função definida por $f(x)=\begin{cases}3x-2, \text{se } 1<x\\ 2, \text{se } x=1\\ 4x+1, \text{se } x<1\end{cases}$,

determine se a função é contínua no ponto x = 1. Justifique sua resposta.

Turma B, 3ª questão: Dada a função definida por $f(x)=\begin{cases}x+7, \text{se } x<3\\ x^2-4, \text{se } x\geq 3\end{cases}$,

determine se a função é contínua no ponto 3. Justifique sua resposta.

Acertos: 29

Em branco: 9

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 0
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 57
Erro de interpretação: 0

Nessa questão, foram analisadas não apenas aquelas consideradas erradas, mas também as parcialmente corretas. Considerei como errados os acertos sem justificativas ou mal justificados. Todos os erros estão relacionados com a continuidade das funções. Além dos equívocos com relação ao conteúdo, as justificativas também expõem as dificuldades tidas para expressar o que pensam. Quatro alunos tentaram justificar esboçando o gráfico, mas com representações erradas. Três deram respostas sem justificativa.

Dentre os que acertaram e justificaram de forma inadequada, a maioria alegou que os limites laterais são diferentes, mas sem concluir que o limite da função não existe. Não fosse curiosa essa conclusão, poderíamos aceitar tais justificativas. Teve quem justificou com $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, mas também sem concluir que o limite não existe.

Seguem alguns exemplos das respostas analisadas, divididas em duas categorias: uma para os que consideraram a função contínua e outra para os que responderam o contrário.

Consideraram *f(x)* contínua: 24

Algumas justificativas:

"O limite e a imagem são os mesmos."

"Pois existe o limite quando x tende a 1."

"Sendo contínua em x = 1."

"Pois quando x = 1 há sua imagem, um ponto fechado, há segmento."

"É contínua, porque o y = 2 e o gráfico é uma reta."

"Pois a imagem em x = 1 existe."

"Limites laterais iguais."

"Pois é diferenciável nesse ponto."

"Ela é contínua no ponto 3, pois ela está sujeita às 3 regras para a verificação da continuidade. A regra que pergunta se a função tem limite, se a função tem uma função inversa e se ela realmente é uma função. Então, depois de ter verificado a existência e que a ela se aplicam as 3 regras citadas acima eu confirmo que ela é uma função contínua."

"f(x) é contínua no ponto 3 apenas para a função $x^2 - 4, \text{se } x \geq 3$*, já na outra função não."*

Consideraram *f(x)* descontínua, mas justificaram mal: 33

Algumas justificativas:

"Apenas uma imagem."

"Pois só existe o limite pela direita."
"Por não ter laterais e por ser um ponto no gráfico."

"O limite e a imagem são diferentes, por isso ela não é contínua."

"Não é contínua, pois conforme o gráfico mostra existe mais de uma lei para essa função."

"Não é contínua, pois os limites não tendem por ambos os lados, coincidindo suas imagens."

"Não creio que seja contínua, pois a função se termina nele."

"Não é contínua, pois nesse intervalo aberto "3" para a expressão $n + 7, \text{se n} < 3$*, e para ser contínua tem que ter apenas uma imagem para cada domínio, o que não se faz presente na expressão, pois* $n = 3$ *tem duas imagens diferentes."*

Turma A, 4ª questão: Um objeto é solto em queda livre de uma altura de 100 pés e se a resistência do ar pode ser desprezada, a altura *h* (em pés) do objeto no instante *t* (em segundos) é dada por $h(t) = -16t^2 + 100$.

a) Ache a velocidade média do objeto no intervalo [1 ; 1,5]
b) Ache a velocidade instantânea quando *t* = 1.

Turma B, 4ª questão: Durante os 40 segundos iniciais de vôo, um foguete é disparado diretamente para cima, de forma que a altura atingida em t segundos é de $s = \frac{t^3}{\sqrt{10}} m$.

a) Qual a velocidade média do foguete durante os primeiros 40 segundos?

b) Qual a velocidade média do foguete durante os primeiros 135m de vôo?

c) Qual a velocidade instantânea ao fim dos 40 segundos? (somente nessa turma).

Item a:

Acertos: 26

Em branco: 18

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 20
Erro em conteúdo de ensino médio: 16
Erro em conteúdo de ensino superior: 0
Erro de interpretação: 15

Dentre os erros analisados, classifiquei como de ensino fundamental aqueles de operações elementares ou resolução de equações. Já os que calcularam apenas a altura, entendi como erro de interpretação, pois não sabiam o que era para ser feito. Doze alunos calcularam apenas a altura, não seguiram o exercício. Dentre esses, alguns o fizeram de forma errada também. Os demais foram classificados como erros relativos ao ensino médio, pois se trata de função de segundo grau e o que foi perguntado está de acordo com esse nível de ensino. Um tipo de erro muito frequente nesse exercício foi colocar os dados errados na resolução.

Seguem algumas das soluções analisadas nesse item. Em algumas coloquei só o início da resolução, pois foi o desencadeador dos erros.

$$\frac{f(80)-f(40)}{40}=...$$

$$\frac{f(40)-f(10)}{40-10}=...$$

$$\frac{f(40)-f(1)}{40-1}=...$$

$$\frac{f(40)-f(39)}{40-39}=...$$

$$\frac{f(80)-f(40)}{40}=...$$

$$V_m=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{20{,}24-0}{40-0=0{,}5}$$

$$h(t)=-16t^2+100 \rightarrow -100+100=-16t^2 \rightarrow 16=t^2 \rightarrow \sqrt{16}=t \rightarrow 4=t$$

$$x=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow v=\frac{100-96}{1{,}5-1} \rightarrow v=\frac{4}{0{,}5} \rightarrow v=8m/s$$

Item b:

Acertos: 24

Em branco: 23

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 18

Erro em conteúdo de ensino médio: 0

Erro em conteúdo de ensino superior: 22

Erro de interpretação: 8

Seguem exemplos das soluções erradas e analisadas nesse item. Novamente em alguns coloquei apenas o início do desenvolvimento, pois foi o desencadeador do erro.

$$\frac{f(40)-f(0)}{40-0}=...$$

$$S=\frac{135^3}{\sqrt{10}}=...$$

$$\frac{t^3}{\sqrt{10}}=135...$$

$$\frac{t^3}{\sqrt{10}}=135 \quad \rightarrow \quad \frac{t^3}{\sqrt{10}}=134 \quad \rightarrow \quad V_m=7{,}53-7{,}51=0{,}02m/s$$

$$t=7{,}53 \qquad\qquad t=7{,}51$$

$$V_m=\frac{f(135)-F(1)}{135-1}=...$$

$$V_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{135}{40}=...$$

$$\frac{t^3}{\sqrt{10}}=135 \Rightarrow t^3=\frac{\sqrt{10}}{135}...$$

$$v=\lim_{h\to 0}\frac{-16h^2-32h-16+100}{h} \rightarrow v=\lim_{h\to 0}\frac{h(-16h-32)+100}{h} \rightarrow \lim_{h\to 0}-16h+52=52\,pés/s$$

Item c: (somente a turma B)

Acertos: 5

Em branco: 14

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 6
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 13
Erro de interpretação: 2

Nessa questão ocorreram erros em resolução de equações, de manipulação algébrica e de sinais, relacionados com o ensino fundamental. Já os erros de nível superior se concentraram na opção de regra errada para derivar a função. Dos alunos que adotaram um procedimento inadequado, um tentou resolver usando limite. Seguem algumas soluções analisadas, para exemplificar os erros encontrados nesse item:

$$f(x)=\frac{t^3}{10^{\frac{1}{2}}}\rightarrow f(x)=t^3\cdot 10^{\frac{-1}{2}}\rightarrow f\,'(\mathrm{x})=3t^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)10^{\frac{-3}{2}}\rightarrow$$

$$f\,'(40)=\frac{3\cdot 40^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{10^3}}\rightarrow f\,'(40)=\frac{3\cdot 1600\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1000}}\rightarrow f\,'(40)=\frac{4800\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{31{,}62}\rightarrow$$

$$f\,'(40)=\frac{-2400}{31{,}62}\rightarrow f\,'(40)=-75{,}9m/s$$

$$f\,'(\mathrm{t})=3\mathrm{t}^2\rightarrow f\,'(40)=3\cdot 40^2\rightarrow f\,'(40)=4800m/s$$

$$\left.\begin{array}{l} S=\dfrac{\mathrm{t}^3}{\sqrt{10}}\rightarrow\dfrac{40^3}{\sqrt{10}}=20253{,}1 \\ S_1=\dfrac{41^3}{\sqrt{10}}=21810{,}4 \end{array}\right\} S-S_1=1557m/s$$

$$f(40)=\frac{40^3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{20238{,}5}{10}=20{,}239Km$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{d(t+\Delta t)-d(t)}{\Delta t}\rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\frac{d(40+0)-d(40)}{0}=\frac{0-0}{0}=0$$

Turma A, 5ª questão: Encontre o(s) ponto(s) da curva $y=f(x)$ no(s) qual(is) a tangente é horizontal. $f(x)=x-\dfrac{x^2}{10}$

Turma B, 5ª questão: Encontre o(s) ponto(s) da curva $y = f(x)$ no(s) qual(is) a tangente é horizontal. $f(x) = 4x - \frac{x^2}{5}$

Acertos: 19

Em branco: 30

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 21
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 17
Erro de interpretação: 8

Nessa questão, os erros relacionados com o ensino fundamental foram: sinal, operações básicas, resolução de equação de 1º grau e simplificação inadequada. Os relacionados com o ensino superior foram: tentativa por limites, quinze usaram regra de derivação equivocada e calculou a raiz da função, e um aluno calculou *f*(5).

A seguir alguns exemplos dos erros analisados nessa questão.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{10} \rightarrow x - \frac{x^2}{10} = 0 \rightarrow x - x^2 = 0 \rightarrow x = x^2$$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{10} = \frac{sen(x)}{10} = 10\cos(x)$$

$$y = f(1) = f\,'(0)(x-0) \rightarrow y = \mathrm{f}\,'\left(4x - \frac{x^2}{5}\right)\left(4x - \frac{x^2}{5} - 0\right)$$

$$y = 4x + \frac{x}{5} - x^2 + 2 \rightarrow y = 4x^3 + 5 \rightarrow P(1{,}4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ 2x=-1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \dfrac{-\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}{10} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}}{10} \rightarrow y=(-0{,}5\,;0{,}0125)$$

$$f(x)=x-\frac{x^2}{10} \rightarrow f\,'(x)=-2x+1 \rightarrow -2x+1=0 \rightarrow -2x=-1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{10}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{40}=\frac{20-1}{40}=\frac{19}{40} \rightarrow P\left(\frac{1}{2},\frac{19}{40}\right)$$

Turma A, 6ª questão: Encontrar a equação da reta tangente à curva dada por $y=e^x \cos x$ no ponto onde x = 1.

Turma B, 6ª questão: Encontrar a equação da reta tangente à curva dada por $y=4e^x+7$ no ponto (0,7).

Acertos: 4

Em branco: 25

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 11
Erro em conteúdo de ensino médio: 12
Erro em conteúdo de ensino superior: 42
Erro de interpretação: 1

Nessa questão, apenas quatro educandos acertaram, entre os 95 que fizeram a prova. Vinte e quatro se equivocaram adotando uma regra errada para a derivada. Um aluno adotou o procedimento correto para a solução, mas se enganou ao transpor dados na resolução. Ocorreram erros de sinal e alguns que acertaram a regra de derivação falharam na manipulação algébrica. Dois alunos tentaram pela equação da reta que passa por um ponto, sem sucesso. A maioria não sabia como proceder, dentre os quais, cinco responderam como

$y = 4e^x + 7$ sem se dar conta que não se trata de uma reta. Um simplesmente calculou *f*(7). Ocorreram erros também na manipulação das funções trigonométricas. Algumas soluções analisadas, para exemplificar os erros encontrados nesse item:

$$\frac{f(7) - f(0)}{7}$$

$$y = 4e^x + 7 \Rightarrow y = 4x + 7$$

"O coeficiente angular a eu acho pela derivada de $f(x)$"

$$y = e^x \cdot \cos(x) \rightarrow y' = e^x - sen(x) \rightarrow m = e^1 - sen(1) = 0 \rightarrow$$
$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 0 = 0(x - 1) \rightarrow y = 0$$

$$y = e^x \cdot \cos(x) \rightarrow y = e^1 \cdot \cos(1) \rightarrow y = 2{,}7$$

$$y = e^x \cdot \cos(x) \rightarrow y' = e^x\left(- sen(x)\right) \rightarrow y' = 2{,}718(- 0{,}017) \rightarrow y' = -0{,}047 \rightarrow$$
$$y = -0{,}047x + b \rightarrow 2{,}71 = -0{,}047 + b \rightarrow 2{,}71 + 0{,}047 = b \rightarrow b = 2{,}76 \rightarrow$$
$$y = -0{,}047x + 2{,}76$$

$$y = e^x \cdot \cos(x) \rightarrow y' = xe(-sen(x)) \rightarrow y = 1 \cdot e \cdot (-sen(90)) \rightarrow y = e$$

$$y - y_0 = a(x - x_0) \rightarrow y - 7 = a(x - 0) \rightarrow y = 4x + 7$$

Turma A, 7ª questão: encontre as derivadas das funções abaixo definidas e escreva o resultado de forma simplificada:

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + \dfrac{1}{x^3} - \sqrt{x^3}$

b) $f(s) = \dfrac{s + 1}{s^2 - s}$

Turma B, 7ª questão: encontre as derivadas das funções abaixo definidas e escreva o resultado de forma simplificada:

a) $f(x)=2x^4-4x^3+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{x^3}$

b) $f(x)=\dfrac{t^2+1}{t+4}$

Item a:

Acertos: 15

Em branco: 14

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 37
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 29
Erro de interpretação: 0

Nessa questão encontrei erros semelhantes aos das outras questões. Muitos erros de sinal, manipulação algébrica e operações elementares. Também muitos erraram na escolha da regra de derivação e alguns alunos derivaram a função duas vezes. Boa parte dos erros nesse item foram decorrentes do trabalho inadequado no momento de derivar o radical. Seguem alguns exemplos dos erros analisados nessa questão.

$$f'(x)=12x^3-8x+\frac{1}{3x^2}-\sqrt{3x^2}\rightarrow f'(x)=12x^3-8x+\frac{x^{-2}}{3}-3x^2\rightarrow$$
$$f'(x)=12x^3-3x^2+\frac{x^{-2}}{3}-8x$$

$$y'=12x^3-8x+\frac{0}{3x^2}-x^{\frac{3}{2}}\rightarrow y'=12x^3-8x-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = 12x^3 - 8x + 0 - \sqrt{x^3} \rightarrow y' = 12x^3 - 8x - \sqrt{x^3}$$

$$y' = 12x - 8x - 3 - \sqrt{3}$$

$$y' = 8x^3 - 12x^2 - 2x^{-3} - \frac{3}{2}x^{\frac{-5}{2}} \rightarrow y' = 8x^3 - 12x^2 - \frac{2}{x^{-3}} - \frac{3}{2\sqrt{x^5}} \rightarrow$$

$$y' = 8 - 12x^2 - 2 - \frac{3}{2\sqrt{x^5}} \rightarrow y' = -12x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x^5}} + 6$$

$$y = 2x^4 - 4x^3 + x^{-2} - x^{\frac{1}{3}} \rightarrow y' = 8x^3 - 12x^2 - 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} \rightarrow y' = 8x^3 - 12x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{3\sqrt[4]{x^3}}$$

Item b:

Acertos: 12

Em branco: 11

Erro em conteúdo de ensino fundamental: 33
Erro em conteúdo de ensino médio: 0
Erro em conteúdo de ensino superior: 39
Erro de interpretação: 0

Nesse item, muitos erros por simplificações inadequadas e também de sinais. Ocorreram também erros nas escolhas da regra de derivação. Houve aluno que se equivocou com a regra do quociente. Dois alunos encaminharam bem suas soluções, mas por algum motivo (provavelmente dúvidas na manipulação algébrica) pararam e deixaram a questão incompleta. Segue uma amostra dos erros encontrados nesse exercício:

$$\frac{g' - f.g - f'}{g^2} \Rightarrow (t+4)^2 = t^2 + 4$$

$$\frac{t^2 + 8t - 1}{t^2 + 8t + 16} = -\frac{1}{16}$$

$$\frac{2t^2+8t-t^2+1}{t^2+8t+16}=\frac{t^2+1}{t^2+16}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{t(t+4)+1}{t(t+8)+16}=\frac{t+4+1}{t+8+16}=\frac{t+5}{t+24}$$

$$\frac{(t^2+1)+2}{16}=\frac{t^2+1}{8}$$

$$f'(t)=\frac{2t}{5}$$

$$f'(t)=\frac{t^3+t^2+7t}{16}$$

$$f'(t)=\frac{2t}{t}=t$$

$$f'(t)=\frac{2+1}{1+4}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

$$f'(t)=\frac{2t}{t}=2$$

$$f'(t)=\frac{2t+4t}{t^2+8t+16}$$

Dados finais dessa etapa

Entre itens e subitens, a prova continha 13 exercícios (para a turma B um a mais), totalizando 1275 questões analisadas nessa etapa. Descontados 501 acertos e 178 questões deixadas em branco, as 596 questões erradas se distribuíram da seguinte forma:

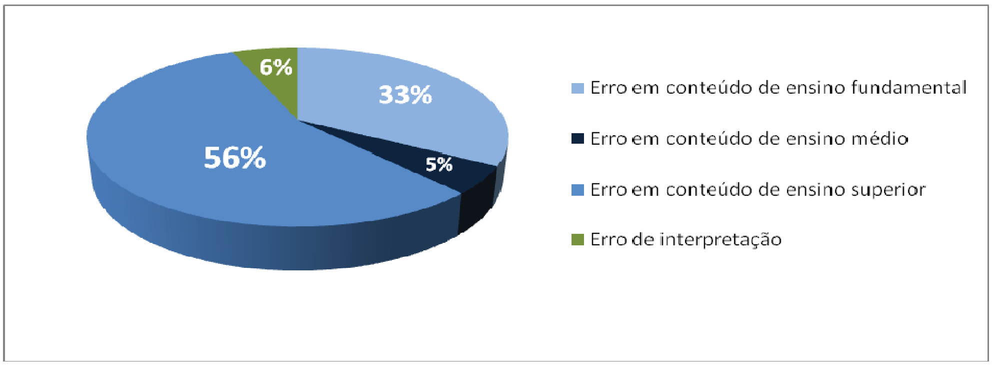


Figura 66 – Distribuição dos erros cometidos na segunda avaliação

Dados finais da análise de erros

Na etapa de análise de erros, foram analisadas 4423 questões, com 1603 acertos e 813 questões deixadas em branco. As 2007 questões erradas se distribuíram da seguinte forma:

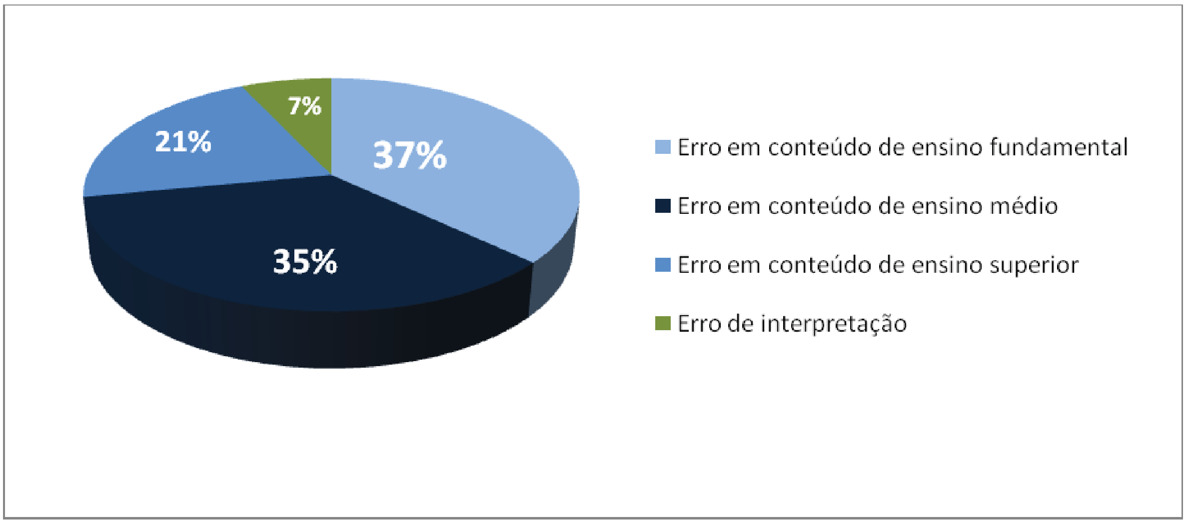


Figura 74 – Distribuição dos erros

4.5 Análise do material de consulta para as provas

A análise desses materiais se mostrou muito aproveitável. Muitos se apresentavam em grande confusão e a falta de metodologia na organização e a poluição visual de alguns dificultaram essa etapa da pesquisa. Ocorreram situações nas quais o aluno apenas copiou anotações de sala de aula ou exercícios com enunciados completos e resoluções, tendo inclusive quem colasse cópias com reduções de páginas de cadernos (que poderiam não ser anotações próprias).

Além de exemplos de exercícios, encontrei listas com regras de derivação, sendo que tais regras eram fornecidas nas provas. Esse tipo de procedimento demonstra o desconhecimento, por parte dos alunos, do que lhes pode ser útil ou onde buscar informações que lhes ajudem na resolução de uma questão.

Entre esses materiais foram registrados resumos de conteúdos tais como: funções trigonométricas, logaritmos (propriedades), conjuntos (definição de função), função exponencial, função inversa, gráficos, produtos notáveis, vetores, limites e continuidade de funções, fórmulas de geometria analítica, e tabelas com valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos 30º, 45º e 60º. E ainda algumas observações dos alunos como:

"Não existe limite de imagem quando os laterais são diferentes"

"constante = constante"

Como se percebe, os conteúdos nos quais sentem menos segurança, e onde buscam mais apoio, são, em grande parte, os de ensino médio. Para os de ensino superior, regras de derivação, na própria prova havia uma fonte de consulta anexa. Já os conteúdos de ensino fundamental, assunto sobre os quais incide um grande número de erros, houve apenas uma referência, produtos notáveis.

Com isso, concluí que falta aos alunos noção do que é necessário conhecer para resolver o tipo de exercício cobrado nas avaliações, além de senso crítico sobre as próprias dificuldades em relação à matemática.

Justamente sobre os conteúdos em que incide o maior número de erros praticamente não há registro no material autorizado à consulta.

No anexo A constarão alguns desses materiais elaborados pelos educandos, para ilustrar essa etapa.

5 Considerações finais

Ao finalizar esta dissertação, convém salientar que, apesar de ser uma pesquisa restrita a uma única disciplina, verifiquei que a maior parte das dificuldades vividas pelos alunos, identificadas nesse trabalho, os acompanham desde as séries iniciais da vida de educandos, em alguns casos, ou já no ensino médio. Isso leva a reflexões que podem sugerir temas para outras pesquisas: o encadeamento do ensino de matemática e a necessidade de seu estudo permanente, tanto como forma de melhorar seu ensino, no lado dos professores, como para estimular os alunos à busca do aprendizado, de uma forma lúdica e constante.

Nas pesquisas em Educação Matemática é possível apurar que a análise de erros pode ser vista sob duas perspectivas não estanques: como linha de pesquisa em Educação Matemática e como metodologia de ensino. Cada qual apresenta suas próprias características e uma pode motivar a ocorrência da outra. Em ambas torna-se evidente o quanto podemos aprender (e compreender) a partir dos erros cometidos pelos alunos.

No caso específico do Cálculo, a análise de erros pode ter um caráter diagnóstico com relação às dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes, em particular aqueles que estão ingressando em um curso superior. Assim,

> Para cada erro detectado e classificado nessas pesquisas com alunos de Cálculo, poderia ser modificada a metodologia de trabalho, buscando maneiras de desafiar os estudantes. (CURY, 2007, p.60).

Toda essa problemática que orbita a disciplina de Cálculo I provoca reflexões no sentido de repensar as práticas letivas atuais, direcionando para mudanças metodológicas, uma vez que se torna evidente a impossibilidade de aceitar que tudo continue como está.

Nesse sentido,

> As pesquisas sobre erros na aprendizagem de Matemática devem fazer parte do processo de formação dos futuros professores, pois, ao investigar erros, ao observar como os alunos resolvem um determinado problema, ao discutir as soluções com os estudantes, os licenciandos em Matemática estarão refletindo sobre o processo de aprendizagem nessa disciplina e sobre as possíveis metodologias de

> ensino que vão implementar no início de suas práticas, podendo ajudar seus alunos logo que detectarem alguma dificuldade. (CURY, 2007, p.93).

Para propor tais mudanças, é necessário compreender as origens do problema e me parece muito adequado utilizar os métodos da análise de erros para tal finalidade, tendo em vista as reflexões apresentadas nesta dissertação. Com relação às dificuldades em motivar mudanças nas práticas letivas tradicionais, reconheço que não é uma tarefa fácil. Afinal,

> A educação é muito mais controlável quando o professor segue o currículo padrão e os estudantes atuam como se só as palavras do professor contassem. Se os professores ou os alunos exercessem o poder de produzir conhecimento em classe, estariam então reafirmando seu poder de refazer a sociedade. A estrutura do conhecimento oficial é também a estrutura da autoridade social. É por isso que predominam o programa, as bibliografias e as aulas expositivas como formas educacionais para conter os professores e os alunos nos limites do consenso oficial. (FREIRE, 2003, p.21).

Participaram desta pesquisa, mesmo que de modo indireto, alunos do curso de Engenharia da PUCRS, que responderam a questionário e tiveram suas produções analisadas. Neste grupo destacaram-se algumas características que formam um breve perfil. Em sua maioria esses acadêmicos formam um grupo de faixa etária jovem, proveniente de escolas da rede privada e com períodos de tempo disponíveis para o estudo. Esse tempo, todavia, nem sempre se revelou produtivo tendo em vista que mais da metade confessou não ter o hábito de estudar ou o fazendo apenas em véspera de provas.

Também colaboraram nesse processo professores e monitores envolvidos com a disciplina, trazendo suas percepções e sugestões. Tanto um grupo quanto o outro faz referências às dificuldades que são decorrentes de déficit de aprendizagem nos níveis fundamental, principalmente, e médio. A falta do hábito de estudar regularmente é outro item por eles apontado como um dos causadores dos problemas existentes.

Nesta pesquisa pude verificar que muitos dos alunos, mesmo reclamando do déficit existente em sua educação, verdadeiras lacunas oriundas dos níveis de ensino fundamental e médio, ainda assim não freqüentavam as oficinas complementares. E isso, muitas vezes, mesmo com tempo disponível. Observei, todavia, que, a maior procura pelas monitorias se dá justamente por parte daqueles alunos com menor tempo disponível para isso. Por isso, é sugestão de que os horários disponibilizados para tais encontros observem essa questão e contemplem essa categoria de acadêmicos: que trabalham e estudam concomitantemente.

Sobre as oficinas, que tive a oportunidade de acompanhar, algumas, acredito que sejam uma boa iniciativa para tratar das dificuldades que os educandos trazem ao ingressar na universidade. No entanto, o que observei foram aulas expositivas, muito parecidas (e porque não dizer iguais) com aquelas que devem ter sido enfrentadas por boa parte dos alunos no ensino fundamental e médio. Será que repetir a mesma metodologia com esse tipo de educando seria o ideal? Penso que não. Além disso, os estagiários que ministraram tais encontros tiveram que enfrentar os mesmos problemas que um professor da disciplina (alunos com dificuldades, salas superlotadas, etc), sem contar com a mesma experiência docente.

Portanto, com relação à forma de trabalho das oficinas, sugiro metodologias que possibilitem uma participação diferente por parte do educando, que ele passe de uma atitude passiva para uma postura ativa na construção do conhecimento. Que exista diálogo, que os alunos sejam motivados a fazer perguntas, participar. Que os grupos em atendimento sejam menores, possibilitando que os estagiários dêem conta de atender e acompanhar os alunos de uma forma mais próxima. A própria análise de erros seria uma ótima alternativa metodológica, pois possibilita essa aproximação e interação entre educador e educando. Além disso,

> Quando um erro é usado como fonte de novas descobertas, está sendo considerada a possibilidade de que este erro se transforme em um problema para que os alunos (e o professor) se debrucem sobre ele e tentem inventar soluções que promovam o aprendizado. [...] Não se trata, de forma alguma [...] de fazê-lo repetir, tediosamente, exercícios semelhantes. (CURY, 2007, p.80).

Com relação à análise de erros, verifiquei ser possível usar a técnica aqui aplicada para refletir e buscar a compreensão das dificuldades que os alunos trazem junto ao ingressar em uma universidade. Analisar a produção escrita dos alunos permite localizar as deficiências existentes e que provocam as dificuldades constatadas, e isso de acordo com o nível de ensino. Aprofundando este estudo seria possível detalhar ainda mais essa questão, apontando conteúdos específicos.

Sobre as dificuldades, inicialmente suspeitei serem basicamente de ensino médio, particularmente no que diz respeito às funções. Entretanto, constatei que muitos dos erros analisados tinham suas origens no ensino fundamental. Com relação a estes conteúdos, a preocupação não é recente, pois Cury (2007) comenta outros trabalhos em análise de erros que externam esta mesma preocupação, mormente sobre álgebra, especialmente em fatoração, simplificação, produtos notáveis e equações, tal como nas análises aqui apresentadas. Outro tipo de dificuldade verificado está relacionado aos gráficos de funções também citados por Cury (2007).

Embora em uma parcela menor, foram igualmente constatadas, no curso desta pesquisa, dificuldades de interpretação de enunciados bem como de expressão, no momento em que isso era solicitado em justificativas para as respostas apresentadas. Com relação à linguagem, a preocupação é compartilhada há muito por professores da área. Malta (2004, p.43) aponta a necessidade *"de os alunos serem conduzidos a desenvolver suas capacidades de leitura em Matemática e de expressão do próprio raciocínio que os levam à compreensão e utilização dos resultados matemáticos".* Constata-se que essa deficiência é geradora de erros. Se os alunos não compreendem o que é pedido, aumentam as dificuldades em processar as respostas. Sem saber o que é pedido, fica a questão: como produzir uma resposta satisfatória.

Acredito que também os problemas na confecção do material de consulta para as provas estejam ligados à linguagem. Pois muitos deles são confusos, desorganizados, visualmente poluídos, evidenciando indícios de má organização textual. Tal como as justificativas em muitos exercícios analisados.

Outra ocorrência, presente nas três avaliações estudadas, que provocou inquietações e reflexões, foram às questões deixadas em branco. O que teria desmotivado ao menos uma tentativa de solução ou mesmo um "chute"? Penso que o medo de errar, de "passar vergonha" por proceder de forma equivocada no desenvolvimento. Afinal, durante toda vida estudantil "aprendemos" que é feio errar, que os erros devem ser apagados com a borracha. Essa é outra questão que poderia ser investigada em estudos futuros.

Finalizando, gostaria de mencionar que foram muitos os ensinamentos que este trabalho me proporcionou. Mergulhar no universo da análise dos erros cometidos pelos alunos nas avaliações proporcionou inúmeras reflexões sendo muitas vezes foi difícil manter o foco. Ocorreram mudanças, inclusive, na minha postura enquanto professor (hoje sou “inimigo” da borracha). Sei também que o término desse trabalho não significa uma despedida dos erros (e suas análises), pois ainda os encontrarei muitas vezes (alguns reencontrarei, é verdade) na vida docente. Espero, com este estudo, ter contribuído de alguma forma para futuras reflexões e discussões a respeito das dificuldades na aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Porto Alegre: Autêntica, 2007.

CURY, H. N.; CASSOL, M. **Análise de erros em Cálculo:** uma pesquisa para embasar mudanças. Acta Scientiae, v.6, n.1, p. 27-36, jan./jun. 2004

DEMO, P. **Educar pela pesquisa**. Campinas: Autores Associados, 2005.

DOERING, C.I.; NÁCUL, L.B.C.; DOERING, L.R. Programa pró-cálculo da UFRGS in CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores:** reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p.201-223.

FREIRE, P.; SCHOR, I. **Medo e ousadia:** o cotidiano do professor. São Paulo: Paz e Terra, 2003.

MALTA, I. Linguagem, leitura e matemática in CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores:** reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p.41-62.

SILVA, B. A. Contrato didático in MACHADO, S. A. D. (org). **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p.43-64.

VASCONCELLOS, C. dos S. **Construção do conhecimento em sala de aula**. São Paulo: Libertad, 2004.

ANEXO A - material de consulta para as provas

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
Faculdade de Matemática - Departamento de Matemática

FAMAT

Material de Consulta para Provas

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integrado I Turma: 450
Professor(a):... Data: 14/09/07
Nome do aluno:...... Curso: Eng. Mecânica

- Vetor Unitário

$\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ $\left|\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right|$

Produto escalar:

$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 . u_1 + v_2 . u_2$

tendo o ângulo:

$|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \theta$

* Cada elemento da função tem que ter um único correspondente.

* $|x| \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

Quando for:

Ex: $\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-1}}$ $\quad 2x-3 \geq 0$, $x-1 > 0$ ou $2x-3 < 0$, $x-1 < 0$

~~Coe~~ficiente angular $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

sendo positivo: reta crescente
" negativo: " decrescente

*Raiz: cresce desaceleradamente

* Expoente: cresce aceleradamente

Vértice da parábola

$X_V = \dfrac{-b}{2a}$ $\quad Y_V = \dfrac{-\Delta}{4a}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

~~*...~~

* $a \geq 0$

$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \iff x \leq -a$ ou $x \geq a$

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
Faculdade de Matemática - Departamento de Matemática

FAMAT
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Material de Consulta para Provas

Disciplina: Cálculo diferencial e integral I Turma: 450
Professor(a): Data: 14/09/07
Nome do aluno:. Curso: Eng. Civil

Vetores:
$(0,0) \Rightarrow$ vetor posição.
B e $-B \Rightarrow$ vetor oposto.
Soma de vetores: $\vec{v} = -2i + j$

$(-2,0) + (0,1) = (-2,1)$

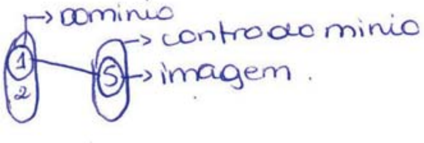
módulo $= \sqrt{i^2 + j^2}$
↳ tamanho.
vetor unitário: módulo $= 1$. $\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)$

OBS: $x^2 = 9 \leftrightarrow x = \pm 3$
$x^2 < 9 \leftrightarrow |\vec{x}| < 3$

Plano trigonométrico: (sen e cos) $C = 2\pi R$. $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$
$|\vec{v}| \times \cos i = x$ $|\vec{v}| \times \operatorname{sen} j = y$. $(\cos\pi, \operatorname{sen}\pi) = (1,0)$ $(\cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}) = (0,1)$
Produto Escalar: $|\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\alpha$ ou $\vec{F} \cdot \vec{D} = (F_1 \cdot D_1 + F_2 \cdot D_2)$.

Funções: $f(x)$ dependente (x) independente.
domínio = todo x com correspondência em y.
Imagem = todo y com correspondência em x.
OBS: $\frac{2}{\sqrt{x}}$ $x \neq 0$, $2\sqrt{x}$ $x \geq 0$.

Relação
cada: conj. partida
único: conj. chegada.



F.P 1º grau: $y = ax + b$, $(a \neq 0)$.
Função constante: $F(x) = b$ $D = \mathbb{R}$ $Im f = b$.
F.P. 2º grau: $y = ax^2 + bx - c$. concavidade p cima $a > 0$.
$b > 0$ é raízes.
V_y = ponto máximo em y.
V_x = ponto máximo em x

Função não polinomial: $f(x) = \sqrt{x}$.
Função exponencial: $f(x) = 2^x$
laboratório inf.
F: = x -> (lei).
gráfico.
Plot (F(x), x = a ... b, y = c ... d)

OBS: $\operatorname{sen} = \frac{op}{hip}$
$\cos = \frac{ad}{hip}$.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
Faculdade de Matemática - Departamento de Matemática

FAMAT
FACULDADE DE MATEMÁTICA

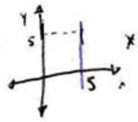
Material de Consulta para Provas

Disciplina: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I Turma: 450
Professor(a):.... Data: 14/09/2007
Nome do aluno: Curso: ENG. MECÂNICA

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/3$	$1/2$	0

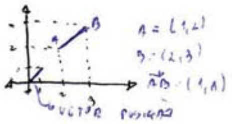
VETORES: $\vec{v}$ $\overrightarrow{AB}$ OPOSTOS

REPRESENTAÇÃO CARTESIANA: NA RETA 0 5 NO PLANO



$x = 5$

VETORES NO PLANO:



$A = (1,2)$
$B = (2,3)$
$\overrightarrow{AB} = (1,1)$

$\vec{i} = (1,0)$ DESLOCAMENTO NO X
$\vec{j} = (0,1)$ DESLOCAMENTO NO Y

VALOR - VELOCIDADE ESCALAR

VETOR VELOCIDADE: $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

$|\vec{v}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ MÓDULO: $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\sqrt{9+16} = 5$

$\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$

$(3/5, 4/5)$
cos sen

VALOR UNITÁRIO - MÓDULO = 1

TRABALHO $\vec{F}$ θ $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta$ → PRODUTO ESCALAR

PRODUTO ESCALAR É NÚMERO → número × vetor V
número + vetor X
P. escalar nº c/ vetor X

PRODUTO ESCALAR ENTRE VETORES

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 v_2 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$

$\vec{F} = 3\vec{i} + 8\vec{j}$

$A = (1,3)$ ao ponto $B(0,8)$ $\begin{cases} \vec{F} = (3,8) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,5) \end{cases}$

$\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot (-1) \cdot 8 \cdot 5$
$\vec{F}\overrightarrow{AB} = -3 + 40$
$\vec{F}\overrightarrow{AB} = 37$

DOMÍNIO - EIXO X
IMAGEM - EIXO Y

$y = ax + b$
- coef. linear
- coef. angular - taxa de variação - declividade

PARA SER POLINÔMIO ÍNDICE TEM QUE SER NATURAL

$x^2 = 9 \leftrightarrow x = \pm 3$
$x^2 < 9 \leftrightarrow |x| < 3$

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
Engenharia Cálculo I

FAMAT

Disciplina: CALCULO DIFERENCIAL I. Turma: 450
Professor(a): Data: 14/09/07
Nome do aluno: Curso: E. mecânica

Produto escalar

$\vec{V}\cdot\vec{W} = |\vec{V}|.|\vec{W}|.\cos\alpha$

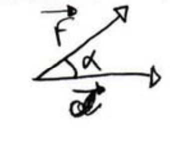
ou

$\vec{V}\cdot\vec{W} = V_1 \cdot W_1 + V_2 \cdot W_2$

$\dfrac{\vec{V}\cdot\vec{W}}{|\vec{V}|\,|\vec{W}|} = \cos\alpha$

TRABALHO

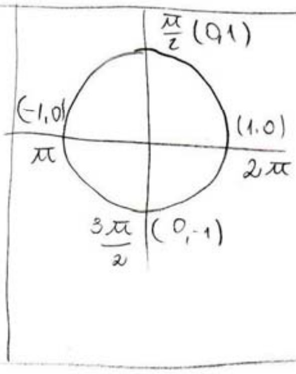
$W = \underbrace{|\vec{F}|.|\vec{d}|.\cos\alpha}_{\text{P. escalar}}$



	30	45°	60
seno	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$\frac{\pi}{2} = 0$

coseno 120
$-0{,}5$



funções $f(x) \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-5x+6} \rightarrow x^2+4 \geq 0$

$\rightarrow x^2-5x+6 \neq 0$

$x^2-5x+6=0$

$x' = 2$

$x'' = 3$

$Df = \mathbb{R} - \{2, 3\}$ porque 2 e 3 anulam o denominador

$f(x) = \dfrac{x^2-10x}{\sqrt{1-x}} \rightarrow 1-x>0$

$Df = \mathbb{R}\,(-\infty, 1)$ $\boxed{1>x}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} \rightarrow 2x-3 \geq 0$

$\rightarrow x-1 \neq 0$

$x-1=0$

$\boxed{x=1}$

$Df\ \mathbb{R} - \{1\}$

Coeficiente linear

$y = 3t + 6$

→ TAXA DE VARIAÇÃO, INDICA QUANTO O (X) VARIA, NESTE CASO, EM 3 em 3

→ COEFICIENTE ANGULAR

→ DECLIVIDADE

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
Faculdade de Matemática - Departamento de Matemática

FAMAT
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Material de Consulta para Provas

Disciplina: CALCULO I Turma:
Professor(a):
Data: 14/09/2007
Nome do aluno:
Curso: ENG MECÂNICA

VETORES

$x^2 < 9$
$|x| < 3$
$-3 \quad 0 \quad 3$

VETOR UNITÁRIO
* QUANDO O MÓDULO DO VETOR É IGUAL A 1
* PARA TRANSFORMAR UM VETOR EM VETOR UNITÁRIO DEVE-SE DIVIDIR O VETOR PELO SEU MÓDULO

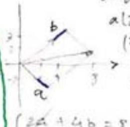
EX: $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ $\quad |\vec{v}| = 5$ $\quad \left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \sqrt{(3/5)^2 + (4/5)^2} = 1$ //

PRODUTO ESCALAR ENTRE DOIS VETORES

$\vec{v} \cdot \vec{u} = (v_1 \cdot u_1, v_2 \cdot u_2) = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\theta$

$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta$

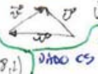
$\vec{v} = (2,-2)$, $\vec{u} = (4,3)$ e $\vec{w} = (8,2)$ MOSTRE QUE EXISTE A e B $\vec{w} = a\vec{v} + b\vec{u}$



$a\vec{v} + b\vec{u} = (8,2)$
$a(2,-2) + b(4,3) = (8,2)$
$(2a,-2a) + (4b,3b) = (8,2)$
$(2a+4b, -2a+3b) = (8,2)$

$\begin{cases} 2a + 4b = 8 \\ -2a + 3b = 2 \end{cases}$ $\quad 7b = 10 \quad b = 10/7$

EXPRESSE O VETOR w EM TERMOS DE $\vec{v}$ e $\vec{u}$



$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

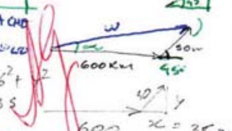
DADO OS VETORES $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ $\quad B = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ $\cos\theta$ sendo θ FORM. P A e B
$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta$ / $\sqrt{13} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos\theta = 24$
$\cos\theta = 1$

$\vec{A} = t\vec{i} - 3\vec{j}$ $\vec{B} = 5\vec{i} + 7\vec{j}$ ACHE t DE MODO QUE A e B ORTOGONAIS
$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos 90° = 0$ $\quad (t,3)(5,7)$ $\quad 5t + 21 = 0$ / $t = 21/5$

UMA BOLA ESBARRA COM $\vec{v}$ VOLTA 20% REDUZIDA $= -0{,}8\vec{v}$

$\cos 45 = \frac{x}{50} = 35{,}36$

AVIÃO P/ LESTE COM 600km/h, VENTO 50km/h NORDESTE ACHE A DIREÇÃO DO AVIÃO E A VELOCIDADE EM RELAÇÃO AO SOLO



$|\vec{w}| = \sqrt{635{,}35^2 + 35{,}36^2} = 636{,}3$ Km/h w

35,36
635,36
$tg\theta = \frac{35{,}36}{635{,}36} = 3{,}18°$

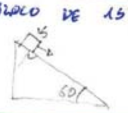
$50^2 = 35{,}36^2 + y^2$
$y = 35{,}35$
$x = 35{,}36$

CAMINHÃO AO NORTE 30km/h CARRO LESTE 40km/h ACHE O VETOR QUE REPRESENTE O DESLOCAMENTO DO CAMINHÃO EM RELAÇÃO AO CARRO: $\vec{d} = 40\vec{i} + 30\vec{j}$ $\quad |\vec{d}| = 50$

UMA PESSOA EMPURRA UM CORTADOR DE GRAMA COM UMA FORÇA DE 35 NEWTONS DESLOCA 100m

a) ENCONTRE O TRABALHO
$\cos 30 = \frac{x}{35} = 30{,}31$
$W = 30{,}31 \times 100 = 3031$ J
QUANTO MAIOR O ÂNGULO - TRABALHO

UM BLOCO DE 15kg ESCORREGA 6m EM UM 60° QUAL É O TRAB.



$W = 15 \times \underset{10}{g} \times 6 \cdot \text{sen}\,60 = 130$ J

ÀS 9:20 A SONDA ESTÁ A 1000 PÉS ATINGE SOLO ÀS 10:13
ACHE A FUNÇÃO D(t)
9:20 — 1000
10:13 — 0
$D(t) = 1000 - \frac{1000}{53}x$

t 0 — 1000
53 — 0
$53x - 1000 = 0$
$x = 53/1000$

$S = 300t - 2t^2$ (S metros, t segundos) PROJÉTIL FOI LANÇADO

A) ALTURA MÁXIMA
$300t - 2t^2 = 0$ $\quad t(300 - 2t)$ $\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 150 \end{cases}$

b)

EM 75 segundos uma ALTURA DE $300 \cdot 75 - 2 \cdot 75^2 = 11250$

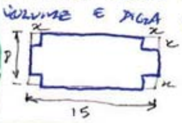
C) EM QUE INSTANTE 10000
$300t - 2t^2 = 10000$
$-2t^2 + 300t - 10000$ $\begin{cases} x' = 50 \\ x'' = 100 \end{cases}$

PLANO A ⇒ 500 INSCRIÇÃO + 30 P/ CONSULTA
PLANO B ⇒ 300 INSCRIÇÃO + 40 P/ CONSULTA
$30x + 500 = 40x + 300$
$x = \frac{200}{10} = 20$

* ATÉ 20 CONSULTAS O PLANO "A" É MAIS BARATO ACIMA DISTO O PLANO B //

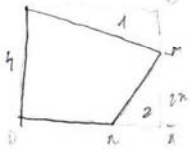
DISTÂNCIA DE UM PONTO ATÉ A ORIGEM $C = \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|$

UMA CAIXA ABERTA DE 15x8 CORTA OS QUADRADOS COM COMP. x DOBRA, EXPRESSE O VOLUME E DIGA QUAIS OS VALORES QUE PODEM SER ASSUMIDOS POR x.



$V(x) = (15 - 2x) \times (8 - 2x) \times x$
$(15 - 2x) \times (8x - 2x^2)$
$120x - 30x^2 - 16x^2 + 4x^3$
$V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$

$\boxed{x \text{ PODE SER } 0 < x < 4}$



AN = x
AM = 2x
ÁREA T = 4x4 = 16
$A_1 = \frac{4 \times (4 - 2x)}{2} = 8 - 4x$
$A_2 = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$

$16 - (8 - 4x) - x^2$
$8 + 4x - x^2$

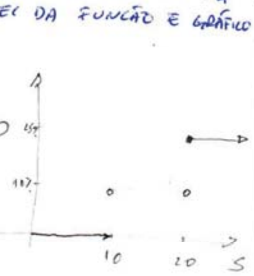
a) ÁREA $\boxed{S(x)}$ EM FUNÇÃO x
$S(x) = -x^2 + 4x + 8$

b) O VALOR DE x P/ A MÁX
$-x^2 + 4x + 8 = 16$
$-x^2 + 4x - 8$ $\begin{cases} x' = \frac{4 + \sqrt{48}}{2} \\ x'' = \frac{4 - \sqrt{48}}{2} \end{cases}$

c) O VALOR MÁXIMO
$-\left(\frac{4+\sqrt{48}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4+\sqrt{48}}{2} =$
24,38

IMPOSTO É COBRADO SOB RENDA DA SEGUINTE FORMA
• ATÉ 10 ISENTO,
• ENTRE 10 e 20 PAGA 10%
• 20 SALÁRIO OU MAIS 25%
— LEI DA FUNÇÃO E GRÁFICO

$I(S) = \begin{cases} 0, & \text{se } S \le 10 \\ S \cdot 0{,}1, & \text{se } 10 < x < 20 \\ S \cdot 0{,}25, & \text{se } S \ge 20 \end{cases}$



ACHE A LEI DA FUNÇÃO

ANO	1900	1904	1908	1912
ALTURA	3,33	3,53	3,73	3,93

VARIAÇÃO DE 0,20 A CADA 4 ANOS

VARIA 0,5 P/ ANO

SALTO EM FUNÇÃO DO TEMPO

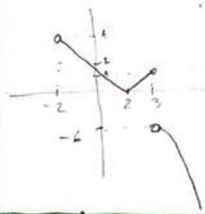
$S(t) = 0{,}5x + 3{,}33$

GRÁFICAMENTE DETERMINE O DOM. E IMAG.

$$f(x)\begin{cases} |2-x|, \text{ se } -2 < x < 3 \\ -x^2+3 \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$$

x	y
-2	$\|4\|$
0	$\|2\|$
3	$\|-1\| - 1$

x	y
3	-6
4	-13
5	-22



$Dom f: (-2,3) \cup (3,+\infty)$

$Img f: (4,2] \cup (-6,-\infty)$

$f(x)$ - NUMERO

f - NOME DA FUNÇÃO

$f(x) = y$ - V. DEP - FUNÇÃO DE 1 VARIÁVEL

DEP

VARIÁVEL INDEP.

CONTRA-DOMÍNIO É O CONJ. DE CHEGADA.

$x \quad f \quad \sqrt{4-x^2}$

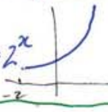
DOM CONTRA DOM

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

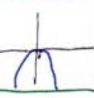
$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

$f(x) = x^2$

$f(x) = 2^x$



$f(x) = -x^2$



$f(x) (1/2)^x$

$f(x) = x^2+b$

* FUNÇÃO É UMA RELAÇÃO QUE RELACIONA VARIÁVEIS

$f(x) = x^3$

ABCISSA - COS - x
ORDENADA - SEN - Y

F. POLINOMIAL DE 1º GRAU É UMA RETA

$f(x) = ax+b \;,\; a \neq 0$

$f(x) = \sqrt{x}$

F. POLINOMIAL DE 2º GRAU

$f(x) = ax^2+bx+C \;,\; a \neq 0$

F. POLINOMIAL DE 3º GRAU

$f(x) = ax^3+bx^2+C \; (a \neq 0)$

$f(x) = -\sqrt{x}$

FUNÇÃO DE GRAU 0 $\Rightarrow f(x) = C$

$\vec{i}$ - VETOR UNITÁRIO

$f(x) = \sqrt{-x}$

SABENDO QUE $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ SÃO VETORES UNITÁRIOS, PEDE-SE

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60$

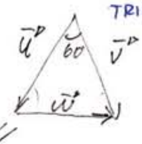
$1 \cdot 1 \cdot \cos 60 = 0{,}5$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$

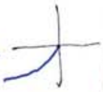
$|\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos 120$

$1 \cdot 1 \cdot \cos 120 = -0{,}5$

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

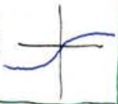


$f(x) = -\sqrt{-x}$

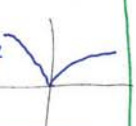


$tg\,\theta = \frac{CAT.OP.}{CAT.ADJ}$ / $sen\,\theta = \frac{CAT.OP}{HIP}$ / $cos\,\theta = \frac{CAT.ADJ.}{HIP.}$

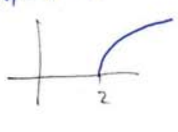
$f(x) = \sqrt[3]{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$



$f(x) = \sqrt{x-2}$



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
Faculdade de Matemática - Departamento de Matemática

FAMAT
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Material de Consulta para Provas

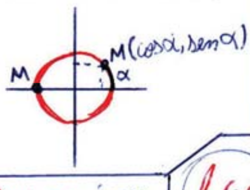
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I .... Turma: 450
Professor(a): .... Data: 14/09/07
Nome do aluno: .... Curso: Mecatrônica

Vetor posição:
$A=(1,2)$ $B=(2,3)$
$\vec{AB}=B-A$
$\vec{AB}=(1,1)$ vetor posição
VP é aquele que parte da origem

Módulo
$|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}$
x e y de $\vec{v}$

Vetor unitário
Vetor de modulo 1
$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ Ex: $\frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{5} \to \frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{5}$

$x^2<9$
$\sqrt{x^2}<\sqrt{9}$
$|x|<3$



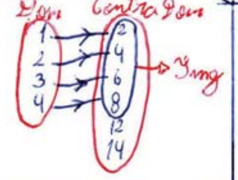
Produto escalar: (interno)
$\vec{v}\circ\vec{u}=v_1.u_1+v_2.u_2$
$\vec{v}\circ\vec{u}=|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$
θ = angulo entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$

Encontre um vetor unitário com a mesma direção e sentido que $\vec{AB}$: $A(1,3)$ e $B(2,7)$
Vetor origem: $B-A=(1,4)$ vetor unitário: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{1\vec{i}+4\vec{j}}{\sqrt{17}}=$
módulo: $|\vec{v}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$
$\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{17}}\vec{j}\right)$

$f(m) \to$ número
$f \to$ nome

$f(x)=x^2$
$\to$ Independente
$\to$ dependente

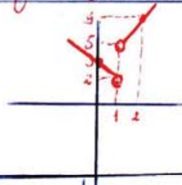
Dom
$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-5x+6}$
$x^2+4\geq 0$ e $x^2-5x+6\neq 0$
$x^2\geq -4$ $x^2-5x+6=0$
x^2 sempre é maior que -4
$x'=2$
$x''=3$
$D_f=\mathbb{R}-\{2,3\}$



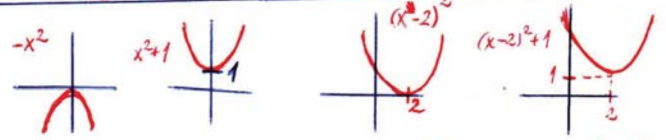
Polinomial
$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$
coeficiente angular, taxa de variação, declividade
coeficiente linear

Constante
$f(x)=a$

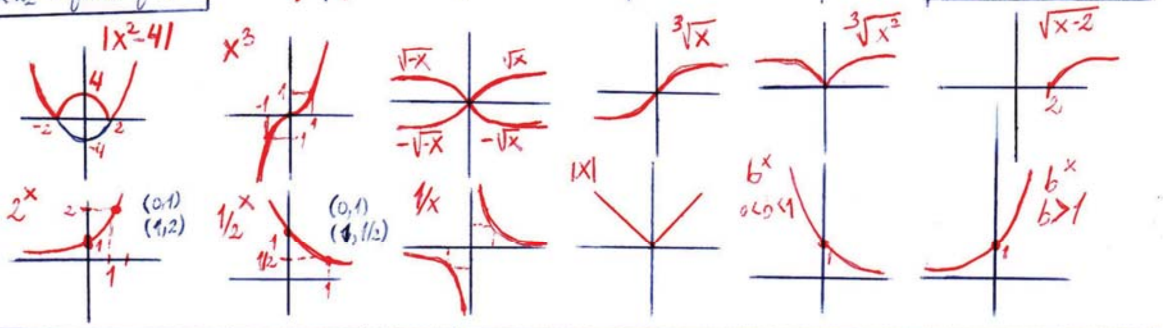
$f(x)=\begin{cases}4x+1 & \text{se } x>1\\ 3-x & \text{se } x<1\end{cases}$



Crescente
$x_1<x_2 \to f(x_1)<f(x_2)$
Decrescente
$x_1<x_2 \to f(x_1)>f(x_2)$



modulo = distância
$|\square|\begin{cases}\square, \text{se } \square\geq 0\\ -\square, \text{se } \square<0\end{cases}$



$f(x)=x$ $g(x)=x^2$
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+x^2$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

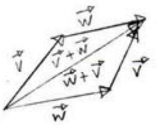
$y=mx+b$
$y-y_1=m(x-x_1)$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

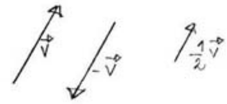
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
Faculdade de Matemática - Departamento de Matemática

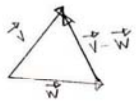
FAMAT
FACULDADE DE MATEMÁTICA

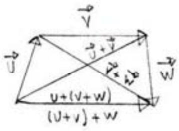
Material de Consulta para Provas

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I Turma: 450
Professor(a): Data: 14/09/07
Nome do aluno: Curso: Eng. Mecânica









- $C = 2\pi R$

$\alpha = \pi$: $M(\cos\pi, \text{sen}\,\pi) = (-1, 0)$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$: $M(\cos\frac{\pi}{2}, \text{sen}\,\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$

- Vetor velocidade:

$\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

valor-vel escalar: $|\vec{v}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

- Vetor unitário: mesma direção e mesmo sentido

$\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ (vetor unitário - módulo 1)

$|\vec{v}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3\vec{i}}{5} + \frac{4\vec{j}}{5}$

$\left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{1} = 1$

$\vec{i}$ é unitário

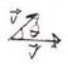
$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ não é unitário

- Produto escalar:

$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2$ ou equivalente $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$

Assim, se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$



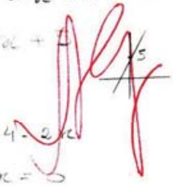
Função Polinomial 1º Grau

$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0) \rightarrow$ se $a = 0, f(x) = b$

Ex: $f(x) = 5$

Função constante

$y = 3x + 5$



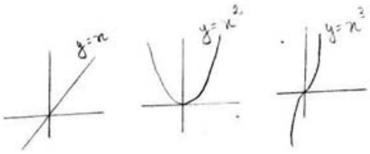
$f(x) = 4 - 2x$

$4 - 2x = 0$

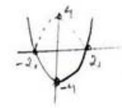
$x = 2$

Grau zero: $f(x) = a$

Grau 2: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$



$x^2 - 4 \rightarrow |x^2 - 4|$



$f(x) = |x|$

$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$y = ax + b \rightarrow$ coef. linear

coef. angular

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

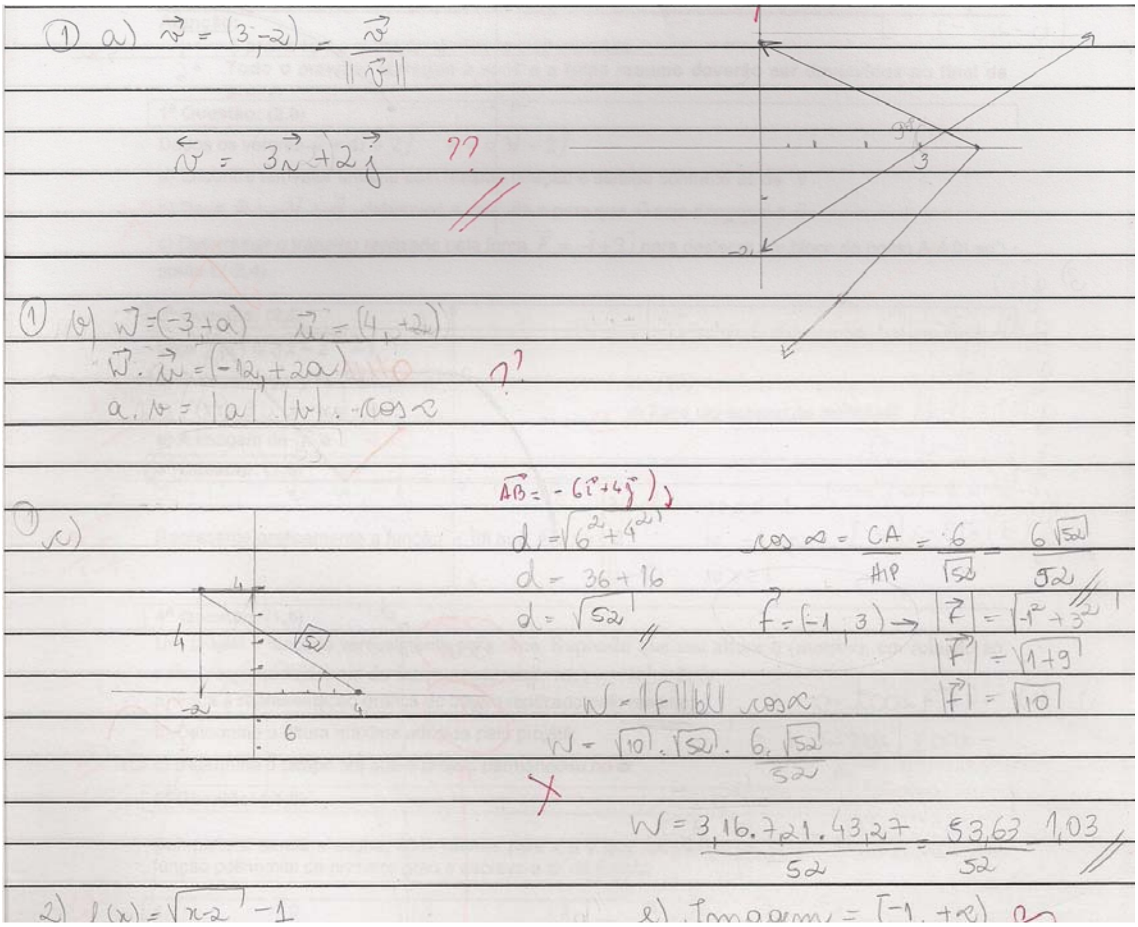
$(x-2)^2 \rightarrow (x-2)^2 + 1$

	30°	45°	60°
sen	1/2	√2/2	√3/2
cos	√3/2	√2/2	1/2
tan	√3/3	1	√3

FECHADO [2, 3) ABERTO

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – Faculdade de Matemática
Av. Ipiranga, nº 6681 – prédio 15 – sala 115 – 90.619-900 – Porto Alegre – RS – Brasil
Telefone: (51) 3320-3531 - Fax: (51) 3320-3631

ANEXO B – Algumas resoluções da primeira avaliação



① a) $\vec{v} = (3,-2) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

$\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$??

① b) $\vec{w} = (-3, +a)$ $\vec{u} = (4, +2a)$

$\vec{w} \cdot \vec{u} = (-12, +2a)$??

$a \cdot v = |a| \cdot |v| \cdot \cos\alpha$

① c) $\vec{AB} = -(6\vec{i} + 4\vec{j})$

$d = \sqrt{6^2 + 4^2}$

$d = 36 + 16$

$d = \sqrt{52}$

$\cos\alpha = \frac{CA}{HIP} = \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{6\sqrt{52}}{52}$

$\vec{F} = (-1, 3) \to |\vec{F}| = \sqrt{-1^2 + 3^2}$

$|\vec{F}| = \sqrt{1+9}$

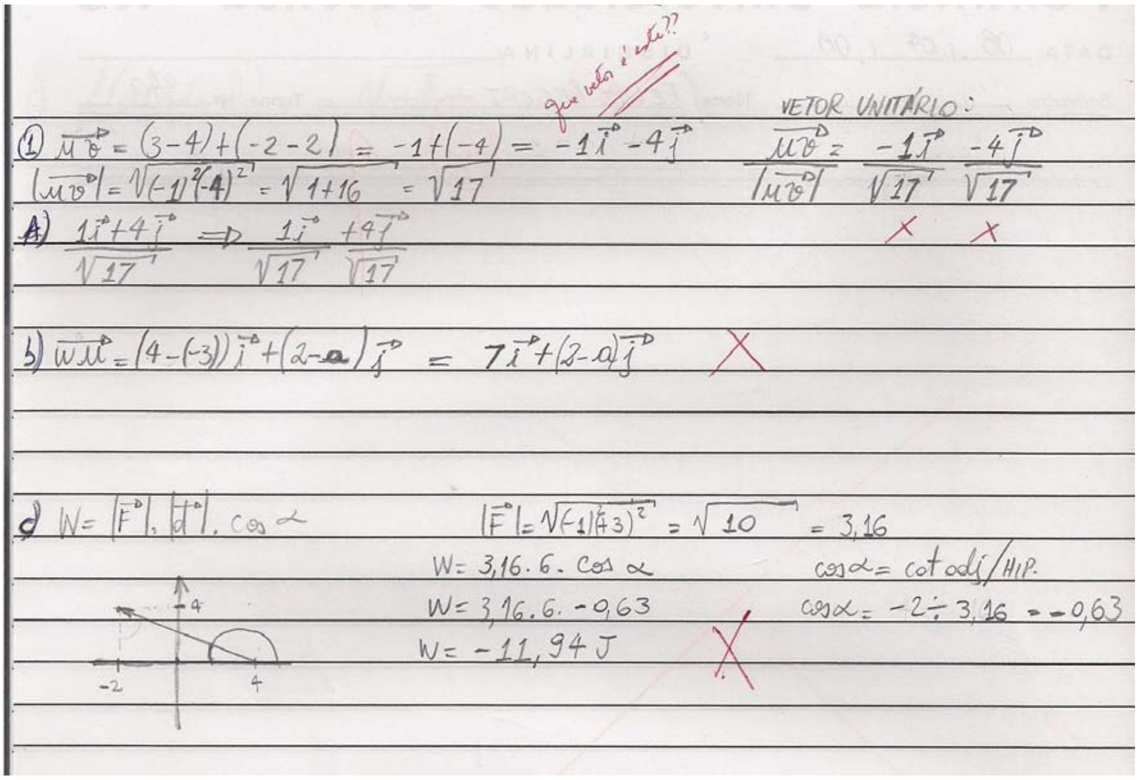
$|\vec{F}| = \sqrt{10}$

$W = |F||d| \cos\alpha$

$W = \sqrt{10} \cdot \sqrt{52} \cdot \frac{6\sqrt{52}}{52}$

$W = \frac{3,16 \cdot 7,21 \cdot 43,27}{52} = \frac{53,63}{52} = 1,03$

2) $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$ e) Imagem $= [-1, +\infty)$



① $\vec{MV} = (3-4) + (-2-2) = -1 + (-4) = -1\vec{i} - 4\vec{j}$

que vetor é este??

$|\vec{MV}| = \sqrt{(-1)^2(-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

VETOR UNITÁRIO: $\frac{\vec{MV}}{|\vec{MV}|} = \frac{-1\vec{i}}{\sqrt{17}} \; \frac{-4\vec{j}}{\sqrt{17}}$

A) $\frac{1\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{1\vec{i}}{\sqrt{17}} \; \frac{+4\vec{j}}{\sqrt{17}}$

b) $\vec{WM} = (4-(-3))\vec{i} + (2-a)\vec{j} = 7\vec{i} + (2-a)\vec{j}$

d) $W = |\vec{F}| . |\vec{d}| . \cos\alpha$

$|\vec{F}| = \sqrt{(-1)^2(3)^2} = \sqrt{10} = 3,16$

$W = 3,16 . 6 . \cos\alpha$

$\cos\alpha =$ cat adj/HIP

$W = 3,16 . 6 . -0,63$

$\cos\alpha = -2 \div 3,16 = -0,63$

$W = -11,94 \; J$

(1) a) $\vec{u} = (\overset{x}{3}, \overset{y}{-2})$

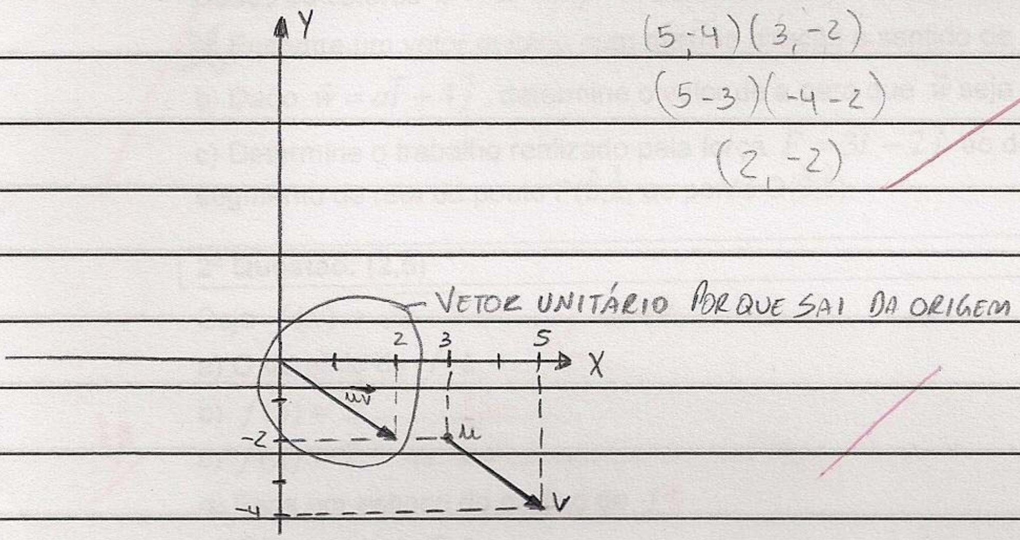
$\vec{v} = (5, -4)$

$\overrightarrow{uv} = v - u$

$(5,-4)(3,-2)$

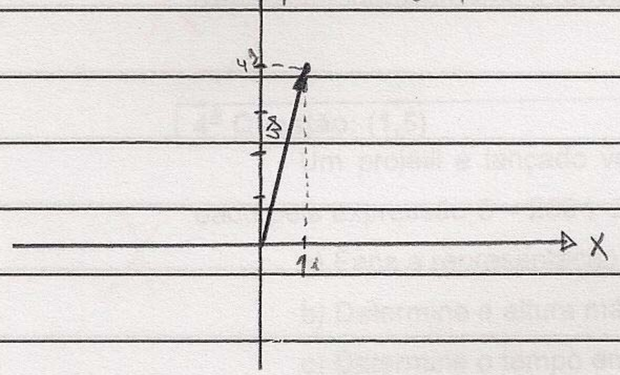
$(5-3)(-4-2)$

$(2,-2)$

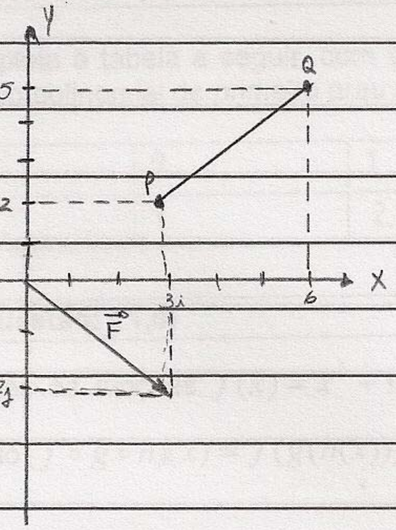


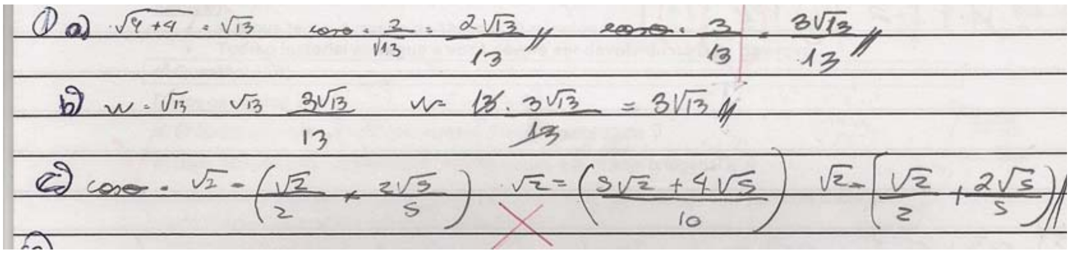
b) $\vec{w} = a\vec{i} + 4\vec{j}$

$a = 1$



c)

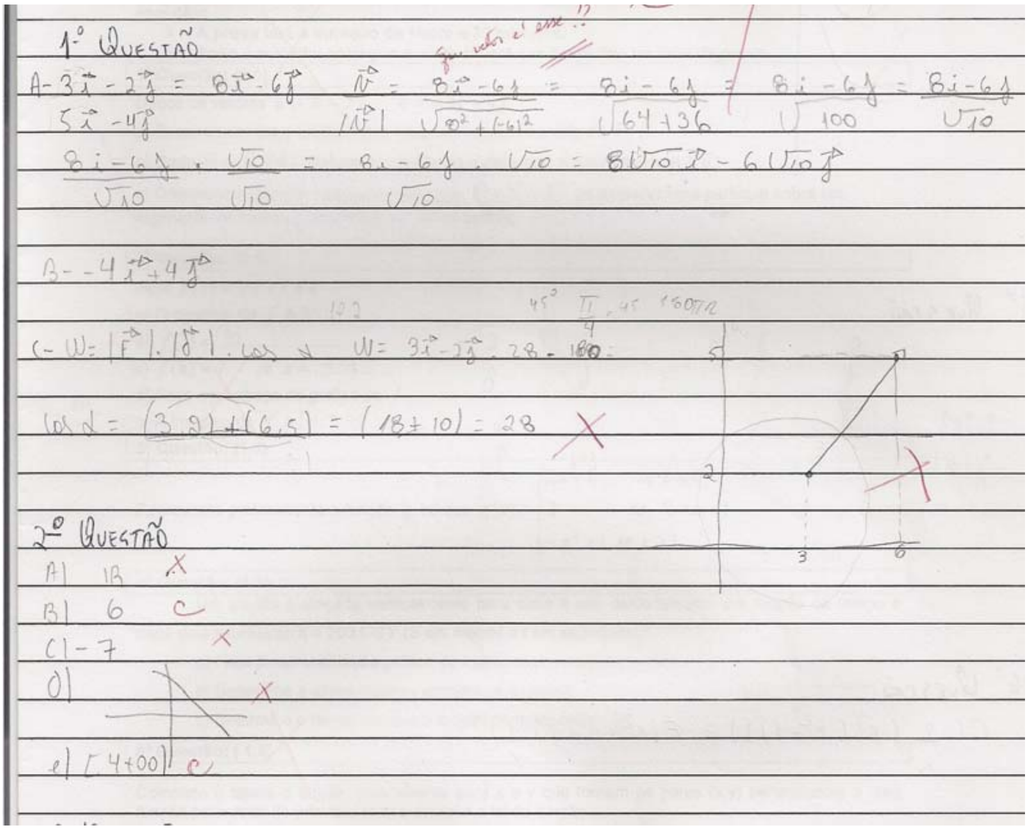




① a) $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $\cancel{\cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ // $\cancel{\cos\theta} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ //

b) $w = \sqrt{13}$ $\sqrt{13}$ $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ $w = \cancel{13} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{\cancel{13}} = 3\sqrt{13}$ //

c) $\cancel{\cos\theta} = \sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ $\sqrt{2} = \left(\frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{10}\right)$ $\sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ //



1º QUESTÃO

Quem você é esse!?

A- $3\vec{i} - 2\vec{j} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$ $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{8\vec{i}-6j}{\sqrt{8^2+(-6)^2}} = \frac{8i-6j}{\sqrt{64+36}} = \frac{8i-6j}{\sqrt{100}} = \frac{8i-6j}{\sqrt{10}}$

$5\vec{i} - 4\vec{j}$

$\frac{8i-6j}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{8i-6j \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 8\sqrt{10}\,\vec{i} - 6\sqrt{10}\,\vec{j}$

B- $-4\vec{i} + 4\vec{j}$

$45°$ $\frac{\pi}{4}$, 45 180π/2

C- $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\alpha$ $W = 3\vec{i} - 2\vec{j} \cdot 28 \cdot 180$

$\cos\alpha = (3.2) + (6.5) = (18 + 10) = 28$

2º QUESTÃO

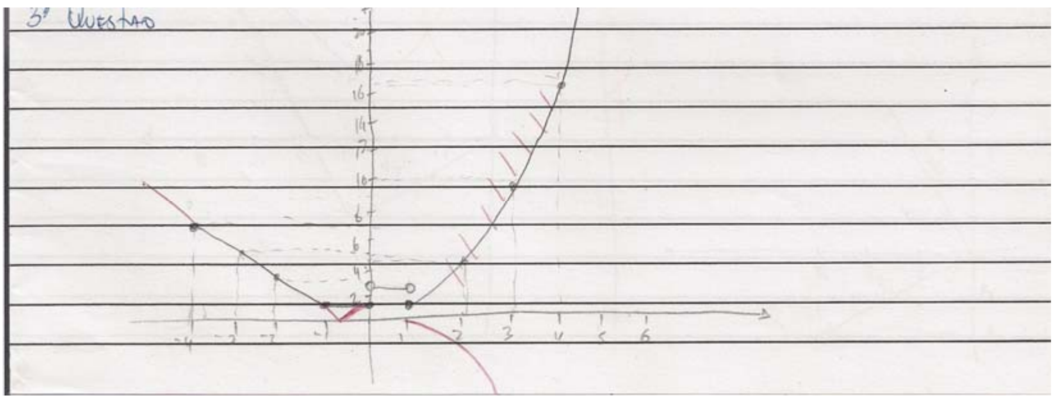
A) 18

B) 6

C) -7

D)

E) [-4, +∞)



3ª Questão

(2) a) $x+5 \geq 0$ de onde isto??

$x \geq -5$

Dom f = $[-5, +\infty)$

b) $\sqrt{3+1+4} = \sqrt{8}$

c) $\sqrt{44+1+4} = \sqrt{49} = 7$

$= \boxed{x = 44}$

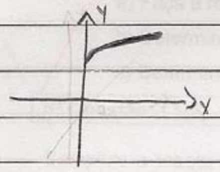
2) Seja $f(x) = \sqrt{x+1} + 4$

a) $[-5; \infty)$

b) $\sqrt{3+1} + 4 = 2+4 = \boxed{6}$

c) $\sqrt{x+1} + 4 \quad 7 = \sqrt{x+1} + 4 = \sqrt{x+1} - 3 = 0 = x+1-3 = \boxed{x=2}$

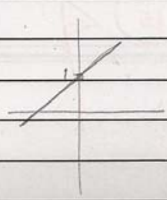
d)



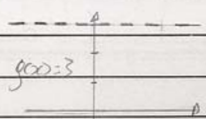
e) $\boxed{\mathbb{R}}$

3)

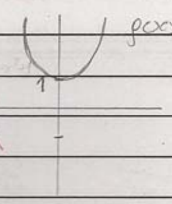
$g(x) = 2x+1$

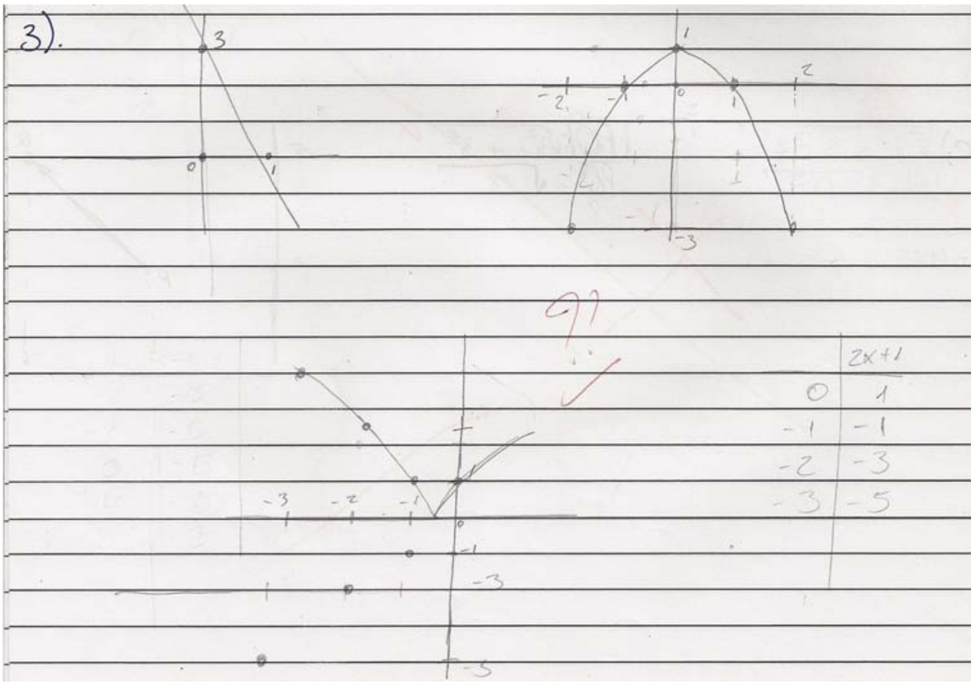


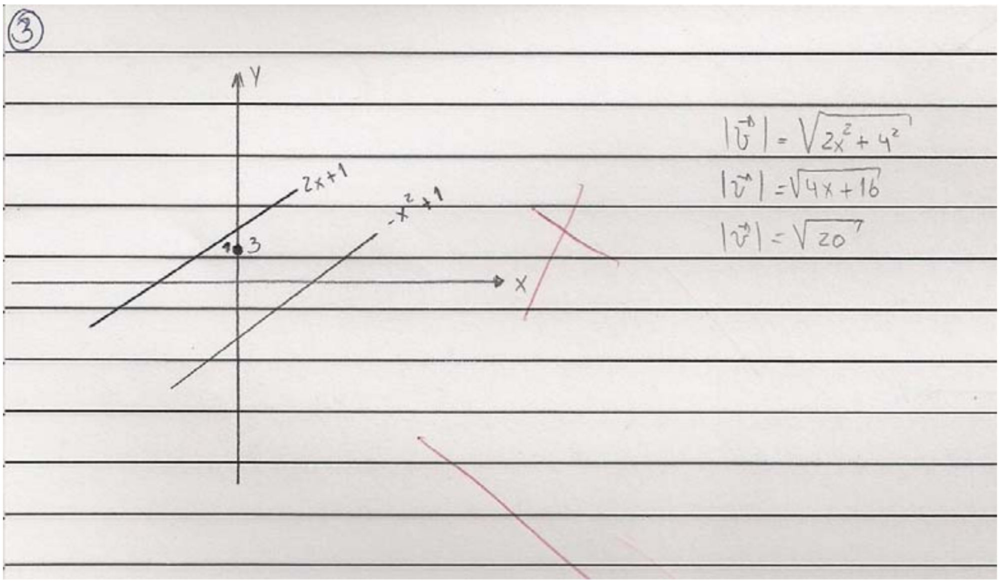
$g(x) = 3$

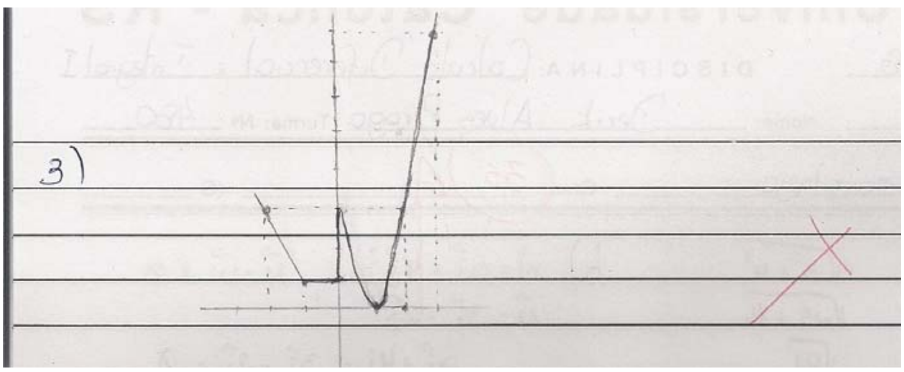


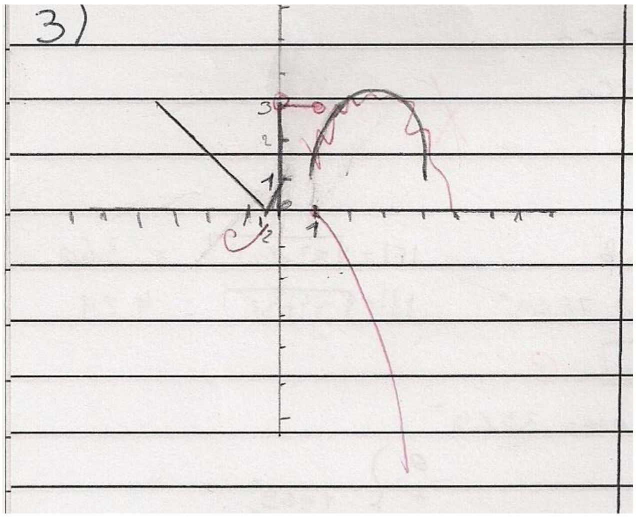
$g(x) = -x^2+1$

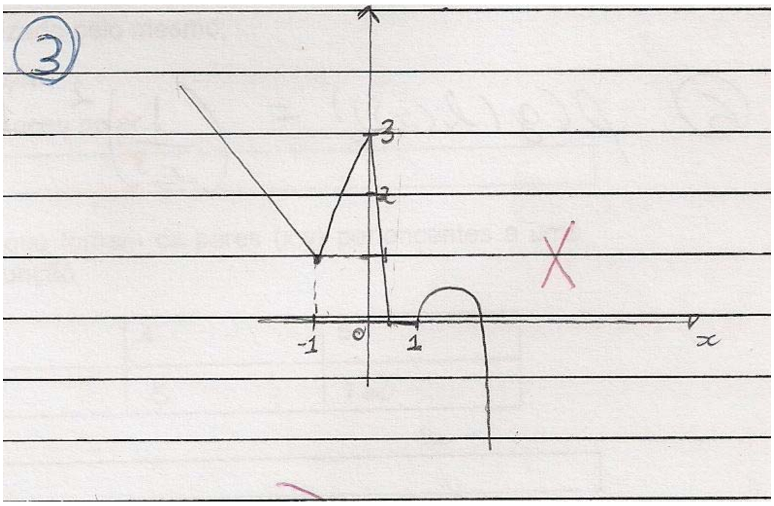


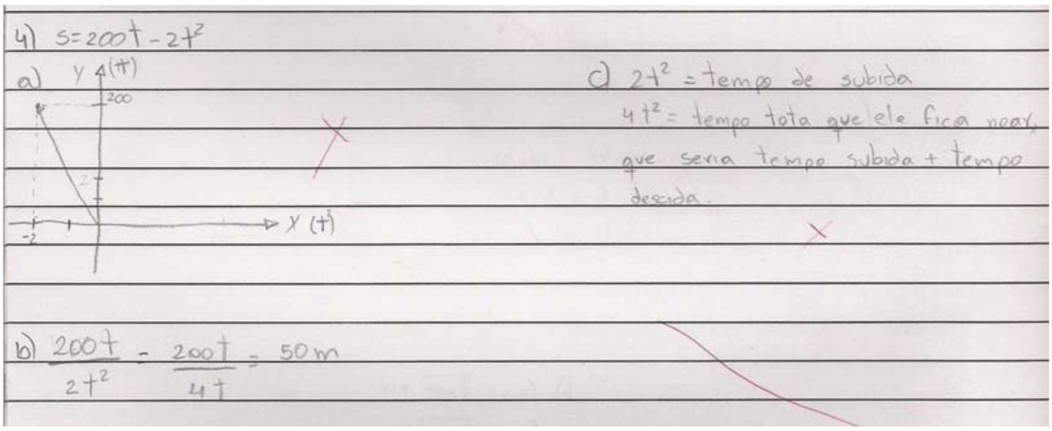

3).
2x+1
0 1
-1 -1
-2 -3
-3 -5


3
y
x
2x+1
$-x^2+1$
$|\vec{v}| = \sqrt{2x^2 + 4^2}$
$|\vec{v}| = \sqrt{4x + 16}$
$|\vec{v}| = \sqrt{20}$

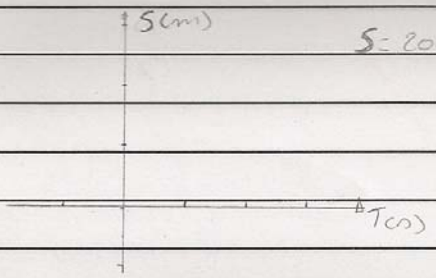

3)


3)
3
2
1
-1/2
1


3
3
2
1
-1
0
1
x
X


4) s=200t-2t²
a) y (t)
200
x (t)
-2
c) 2t² = tempo de subida
4t² = tempo tota que ele fica near, que seria tempo subida + tempo descida.
b) 200t / 2t² = 200t / 4t = 50m

4) =



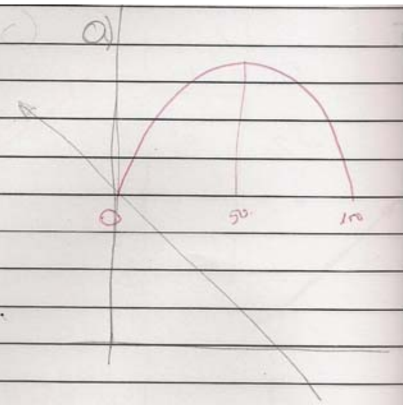
$S = 200t \cdot 2t^2$

4. b) $\dfrac{-200 \pm \sqrt{200^2 \cdot 4.0.(-2)}}{2(-2)}$

$t = \dfrac{-200 \pm 200}{-4}$

$t = \dfrac{-200 + 200}{-4} = 0$

$t = \dfrac{-200 - 200}{-4} = 100s$



c) = $S = 200.(100) + 2.(100^2)$

$S = 20.000 + 20\,000$

$S = 40.000\ m$

① D(t)

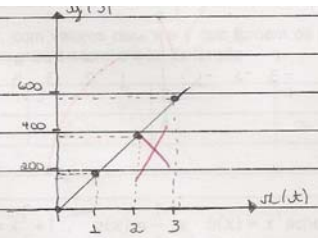
Ⓐ $S = 200t - 2t^2$

$S(0) = 0$

$S(1) = 200 - 2 = 198$

$S(2) = 400 - 8 = 392$

$S(3) = 600 - 18 = 582$



$\dfrac{200 \pm \sqrt{200^2 - 4.2.0}}{4}$

$\dfrac{200 \pm 200}{4} = \begin{cases} 100 \\ 0 \end{cases}$

$200.100 - 2(100)^2$

$20000 - 20000 = 0$

Ⓑ $\boxed{20000\ m}$

Ⓒ $\boxed{100s}$

5) $0 = x + 1$

$1 = 1 + 1$

$4 = 2 + 2$

⑥ $x^2 + 1 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x^3 = x^2 + 1 \cdot x^2 = x^4 + 1$

6) $f(x) = x^3+1$ $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$

$g(x) = 1/x$

$h(x) = x^3$ $f(g(x^3))$

$f(1 \cdot x^3)$

$f \circ g \circ h = f\left(\frac{x_3^{\ 1}}{x}\right)$

$f \circ g \circ h = x^2+1(x^2)$

$\boxed{f \circ g \circ h = x^4+1x^2}$

6ª questão

$f(x) = x^2+1$ $f = \left(\frac{1}{x}(x^3)\right)$ $f = \frac{1}{x}(x^3)$ $f = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)^3$ $f = \frac{1}{x^2+1}(x+1)$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$h(x) = x^3$

$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x)))$

6. $f(g(h(x)))$ $g(x^3) = \frac{1}{x^3}$

$f(g(x^3))$ $g(x^3 = \frac{1}{x^3}$

$f\left(\frac{1}{x^3}\right) = x^2+1$

$f\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x^6}+1$

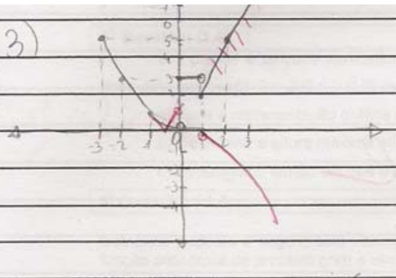
$f \circ g \circ h = \frac{1}{x^9}+1$

$\frac{1}{x^6}+1$

propriedade das potências

$(x^3)^2 = x^6$

3)



6): $F(x) = x^2+1$ $g(x)\ 1/x$, $h = x^3$

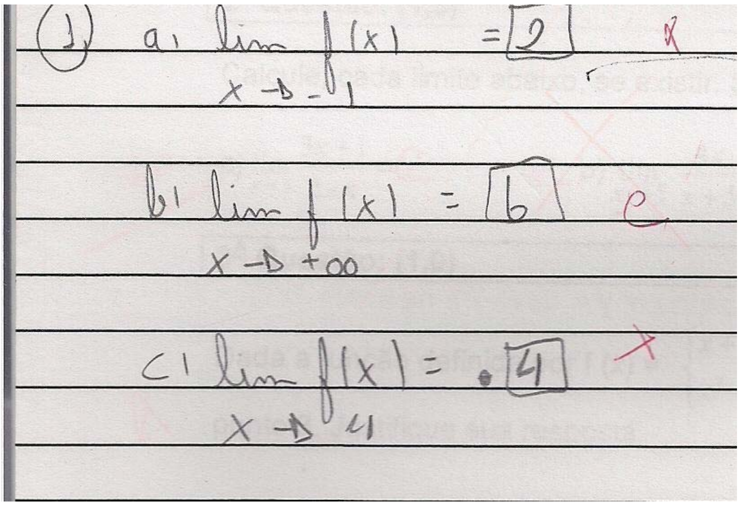
$F(g(h(x)))$

$F \circ g \circ h = F(g(x^3)) = F(1/x^3)$ $F \circ g \circ h = \left(\frac{1}{x^3}\right)^2+1$ $= \boxed{F \circ g \circ h = \frac{1}{x^9}+1}$

propriedade das potências

$(x^3)^2 = x^6$

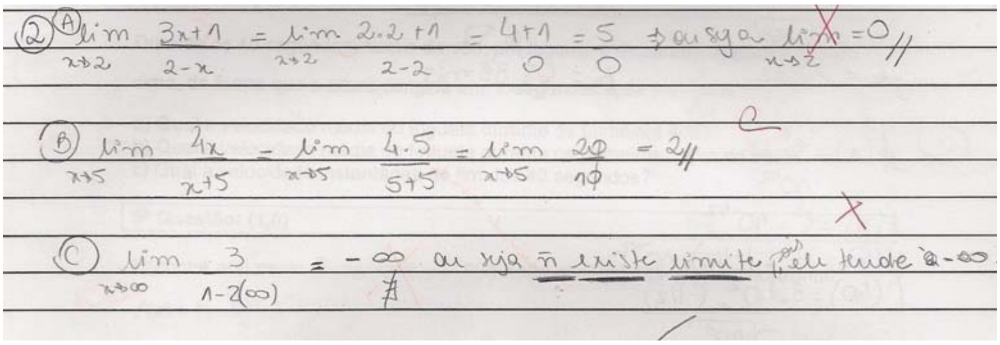
ANEXO C – Algumas resoluções da segunda avaliação



(1) a) $\lim_{x \to -1} f(x) = \boxed{2}$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{6}$

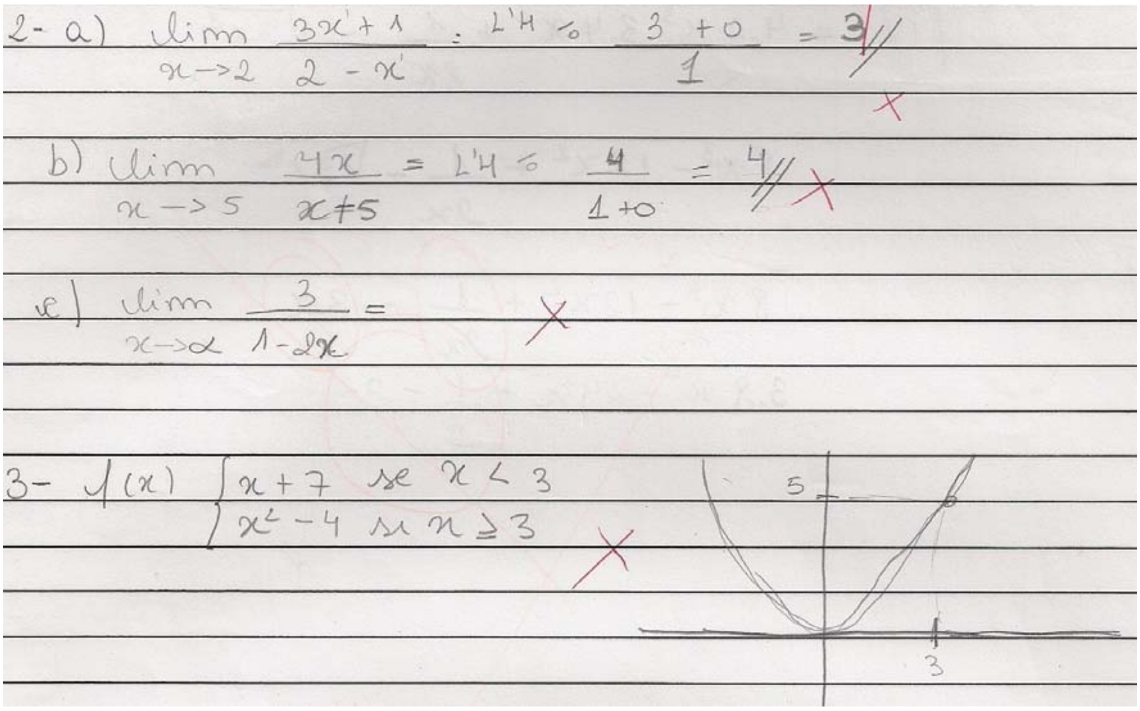
c) $\lim_{x \to 4} f(x) = \boxed{4}$



(2) (A) $\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2-x} = \lim_{x \to 2} \frac{2.2+1}{2-2} = \frac{4+1}{0} = \frac{5}{0}$ $\nexists$ ou seja $\lim_{x \to 2} = 0$ //

(B) $\lim_{x \to 5} \frac{4x}{x+5} = \lim_{x \to 5} \frac{4.5}{5+5} = \lim_{x \to 5} \frac{2\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 2$ //

(C) $\lim_{x \to \infty} \frac{3}{1-2(\infty)} = -\infty$ $\nexists$ ou seja ñ existe limite pois ele tende à $-\infty$



2- a) $\lim_{x \to 2} \frac{3x'+1}{2-x'}$: L'H ⇒ $\frac{3+0}{1} = 3$ //

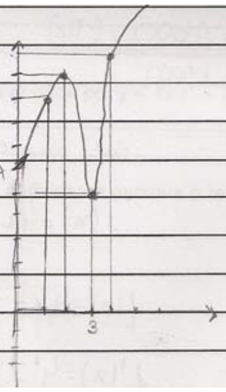
b) $\lim_{x \to 5} \frac{4x}{x+5}$ = L'H ⇒ $\frac{4}{1+0} = 4$ //

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{3}{1-2x} =$

3- $f(x) \begin{cases} x+7 & \text{se } x < 3 \\ x^2-4 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

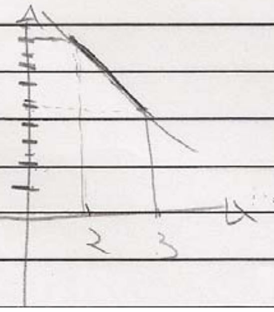
③ $f(x) = \begin{cases} x+7 & \text{se } x<3 \\ x^2-4 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

Sim é uma função contínua pois a sua lei permite isso, ou seja, não existe intervalo em aberto nesta função



③ $f(x) = \begin{cases} x+7 & \text{se } x<3 \\ x^2-4 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ $x=2$ $2+7=9$

$(3)^2-4$ $9-4=5$



A FUNÇÃO NO PONTO 3 É CONTÍNUA

⑤ $f(x) = 4x - \frac{x^2}{5} = f'(x) = 4 - \frac{2x}{5} = 0$ $\frac{2x}{5} = 4 = -20 = 2x$ $\boxed{x=+10}$

sinal!

Cuidado com o sinal!!

$f'(-10) = 4 + \frac{20}{5} = \frac{40}{5} = 8 \neq 0$

NO PONTO $\boxed{x=+10}$ A RETA TANGENTE É HORIZONTAL

⑥ a) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x^3} = 2x^4 - 4x^3 + x^{-2} - x^{3/2}$

$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x^{-3} - \frac{3}{2}x^{1/2}$ $\sqrt{x}$

$\boxed{= f'(x) = 8x^3 - 12x^2 - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{4\sqrt{x^{-1}}}}$ $\sqrt{x}$

Cuidado com o sinal.

$\frac{-\frac{3}{2}}{2\sqrt{x^{-1}}}$

$-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^{-1}}} = \frac{-3}{4\sqrt{x^{-1}}}$

b) $f(t) = \frac{t^2+1}{t+4} = \frac{(t+4)\cdot 2t - (t^2+1)\cdot 1}{(t+4)\cdot(t+4)} = \boxed{\frac{t^2+8t+1}{t^2+8t+16}} = f'(x)$

4) $S = \frac{t^3}{\sqrt{10}}\,m \rightarrow S = \frac{3t^2}{\sqrt{10}}$??

a) $S = \frac{3 \cdot 40^2}{\sqrt{10}} = \frac{3 \cdot 1600}{\sqrt{10}} = \frac{4800}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{4800\sqrt{10}}{10} = 480\sqrt{10}\,m \rightarrow \boxed{V_m = 102\sqrt{10}\ m/s}$ //

??

b) $\boxed{\frac{9\sqrt{2}}{2} = V}$ //

c) $102\sqrt{10}\ m/s$??

5)

$F(x) = 4x - \frac{x^2}{5}$ $\quad F(x) = -\frac{x^2}{5} + \frac{20x}{5}$ | $a = -\frac{1}{5}$

$y = 0 \quad 0 = 4x - \frac{x^2}{5}$

$-4x = -\frac{x^2}{5} \rightarrow x^2 - 20x = 0$

$x(x-20) = 0$

$20x = x^2$

$x' = 0$

$x'' = 20$

$\boxed{\text{Pontos } (0,0) \ (20,0)}$

$y - 0 = -\frac{1}{5}(x - 0)$

$y = -\frac{1}{5}x$ //

$y - 0 = -\frac{1}{5}(x - 20)$

$y = -\frac{1}{5}x + 4$

6) $y = 4xe^x + 7$

$(\overset{x}{0}, \overset{y}{7})$

$y - y_1 = a(x - x_1)$

$y - 7 = a(x - 0)$

$y - 7 = 4x - 0$

$\boxed{y = 4x + 7}$ //

COEFICIENTE ANGULAR "a" EU ACHO PELA DERIVADA DE $f(x)$.

Qual é a derivada!!

$y = 4xe^x + 7$

$y = 4e^x$?? $\quad y = 4e^0$

$y = 4$

isto é a derivada??

Errado!!

7) - a) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x^3}$

$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + x^{-2} - x^{3/2}$

$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x^{-3} - \frac{x^{-1/3}}{3}$

$f(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x - \frac{1}{3\sqrt{x^3}}$

b) $f(t) = \frac{t^2+1}{t+4}$

$f'(t) = \frac{(t+4).(t^2+1)' - (t^2+1).(t+4)'}{[t+4]^2}$

$f'(t) = (t+4).2t - (t^2+1).1 \,/\, (t+4)^2$

$f'(t) = 2t^2 + 8t - t^2 - 1 \,/\, (t+4)^2$

$f'(t)\ \frac{t^2 + 8t - 1}{(t+4)^2}$

não podes desprezar o denominador!!

Cuidado com o sinal!!

$-(t^2+1) = -t^2 - 1$

mais = +

5ª) $f'(x) = 4 - \frac{2x}{5}$ $\quad 4 - \frac{2x}{5} = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{5} = -4 \Rightarrow -2x = -20$

$x = \frac{-20}{-2}$

$f(-10) = 4\cdot(-10) - \frac{(-10)^2}{5}$ $\quad \boxed{P = (+10; -60)}$ $\quad \boxed{x = +10}$

$\boxed{f(-10) = -60}$

no ponto $x = -10$ a tg não é horizontal

6ª) $P = (0, 7)$ $\quad y = 4x \cdot e^x + 7$ $\quad f'(0) = 4 \cdot e^1$

$y' = 4 \cdot e^x$ $\quad f'(0) = 4$ derivada errada!

$y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$

$y - 7 = 4(x - 0)$

$\Downarrow$

$\boxed{y = 4x + 7}$

→ ESTIVE PARA PERGUNTAR ISSO EM AULA 2 VEZES E AGORA ESTÁ ME CUSTANDO 1,0 PONTOS

5) $y = f(x)$ $\quad$ tg HORIZONTAL $\Rightarrow \boxed{a = 0}$

$\boxed{a = -1/5}$ $\quad \boxed{b = 4}$ $\quad \boxed{c = 0}$

$f(x) = 4x - \frac{x^2}{5}$ $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$

$-\frac{x^2}{5} + 4x = 0$ $\quad f'(x) = -\frac{2}{5}x + 4 = 0$

$x\left(\frac{x}{5} + 4\right) = 0$ $\quad -\frac{2}{5}x = -4$

$\frac{x}{5} = -4$ $\quad x = \frac{-4}{-\frac{2}{5}} = +10$

$\boxed{x = -4/5}$

xv

yv

a<0

Cuidado com o sinais!!

6) $y = 4xe^x + 7$

$P = (\overset{x_0}{0}, \overset{y_0}{7})$

$\boxed{y - y_0 = f'(x)(x - x_0)}$ $\quad \begin{cases} y_0 = 7 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

$y - 7 = 4e^x(x - 0)$

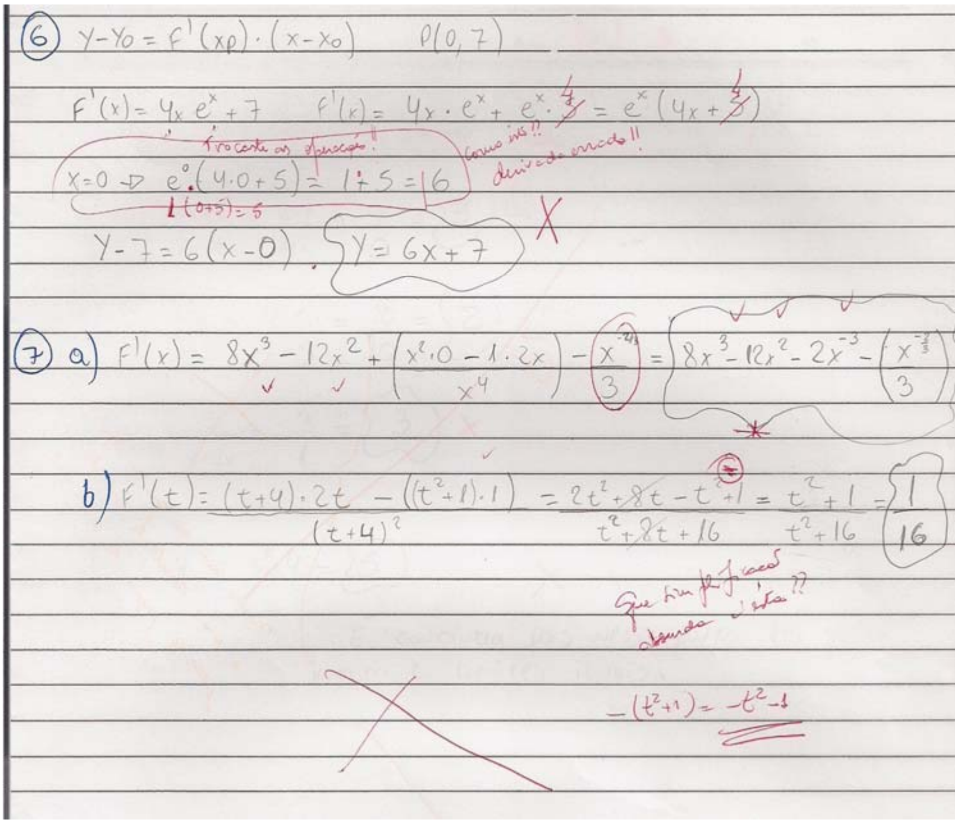
$-7 + y = 4xe^x$

$\boxed{y = 4xe^x + 7}$ $\quad$?? não é eq. de reta.

7) DERIVADAS:

1º $\quad$ 2º

a) $f(x) = \boxed{2x^4 - 4x^3} + \boxed{\frac{1}{x^2} - \sqrt{x^3}} \Rightarrow f(x) = 8x^3 - 12x^2 - \frac{1}{2x} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$



6) $y - y_0 = f'(x_p)\cdot(x - x_0)$ $\quad P(0,7)$

$f'(x) = 4x\,e^x + 7 \quad f'(x) = 4x\cdot e^x + e^x\cdot\frac{4}{3} = e^x\left(4x + \frac{4}{3}\right)$

Trocaste as funções!! Como isso?? derivada errada!!

$x = 0 \Rightarrow e^0\cdot(4\cdot 0 + 5) = 1 + 5 = 16$

$1(0+5) = 5$

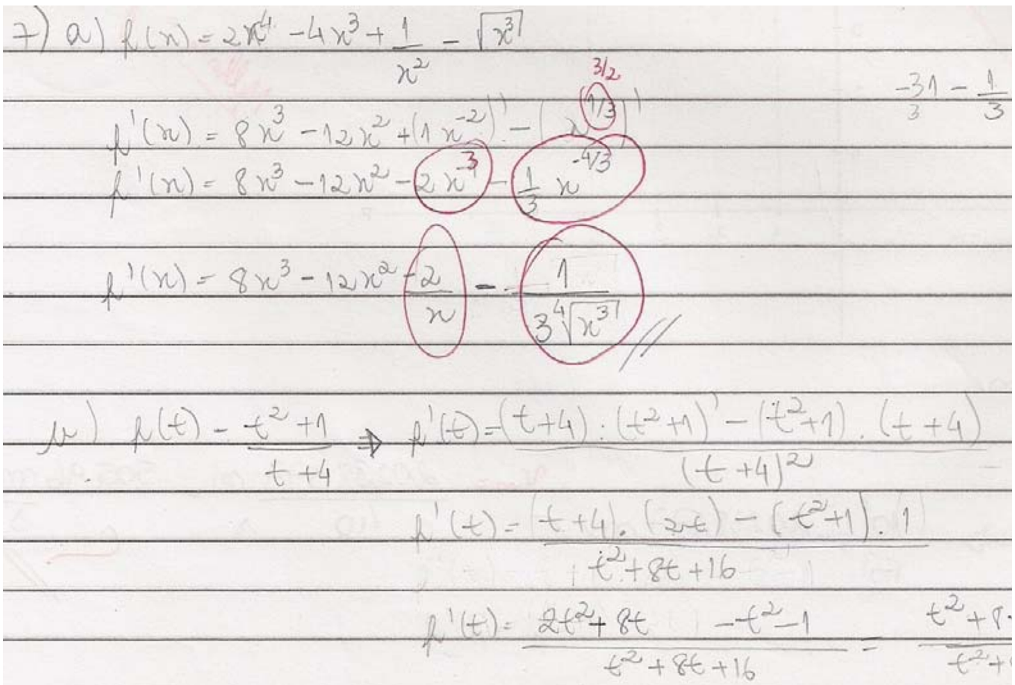
$y - 7 = 6(x - 0) \quad y = 6x + 7$

7) a) $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + \left(\frac{x^2\cdot 0 - 1\cdot 2x}{x^4}\right) - \frac{x^{-4/3}}{3} = 8x^3 - 12x^2 - 2x^{-3} - \left(\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{3}\right)$

b) $f'(t) = \frac{(t+4)\cdot 2t - ((t^2+1)\cdot 1)}{(t+4)^2} = \frac{2t^2 + 8t - t^2 + 1}{t^2 + 8t + 16} = \frac{t^2 + 1}{t^2 + 16} = \frac{1}{16}$

Que tipo de fracção é esta??

$-(t^2+1) = -t^2 - 1$



7) a) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x^3}$

$3/2 \qquad -\frac{3}{3}1 - \frac{1}{3}$

$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + (1x^{-2})' - (x^{1/3})'$

$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x^{-3} - \frac{1}{3}x^{-4/3}$

$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{3\sqrt[4]{x^3}}$

b) $f(t) = \frac{t^2+1}{t+4} \Rightarrow f'(t) = \frac{(t+4)\cdot(t^2+1)' - (t^2+1)\cdot(t+4)'}{(t+4)^2}$

$f'(t) = \frac{(t+4)\cdot(2t) - (t^2+1)\cdot 1}{t^2 + 8t + 16}$

$f'(t) = \frac{2t^2 + 8t - t^2 - 1}{t^2 + 8t + 16} = \frac{t^2 + 8\ldots}{t^2 + \ldots}$

⑥ $y = 4xe^x + 7$

$f'(x) = 4e^x$ X

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 7 = 4e^x(x - 0)$

$y - 7 = 4e^x x$

$\boxed{y = 4xe^x + 7}$ X

isto é eq. de reta ??

⑦ a) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x^3}$

$f'(x) = 8x^3 ✓ - 12x^2 ✓ + \frac{1^{-2}}{2x} - x^{\frac{2}{3}}$

$\boxed{f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 2x^{-1} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}$

b) $f(t) = \frac{t^2 + 1}{t + 4} =$

$f'(t) = \boxed{\frac{2t}{5}}$ // X

⑦

Ⓐ $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x^3}$

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^{-2} - x^{3/2}$

$f'(x) = 8x^3 ✓ - 12x^2 ✓ - 2x^{-3} ✓ - 3/2\, x^{-5/2}$

$f'(x) = 8\cancel{x^3} - 12x^2 - \frac{2}{\cancel{x^3}} - \frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

ABSURDO!!

$f'(x) = -12x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x^5}} + 6$ //

Ⓑ $f(t) = \frac{t^2 + 1}{t + 4}$

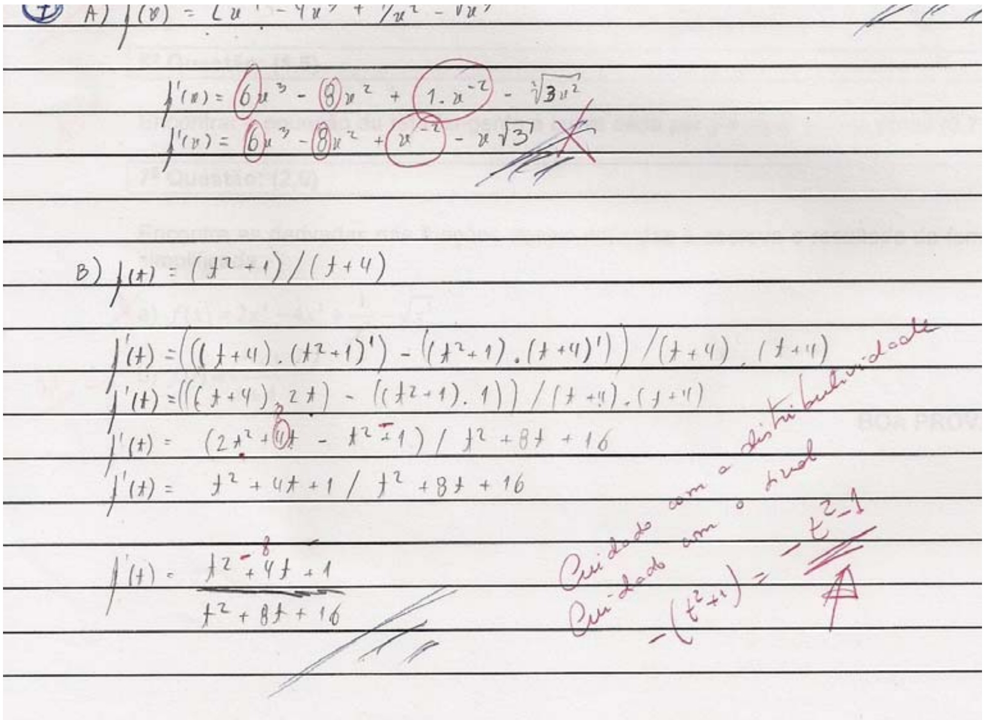
$f'(t) = \frac{(t+4)(t^2+1)' - (t^2+1)(t+4)'}{(t+4)^2}$

$f'(t) = \frac{(t+4)(2t) - (t^2+1)(1)}{(t+4)(t+4)}$

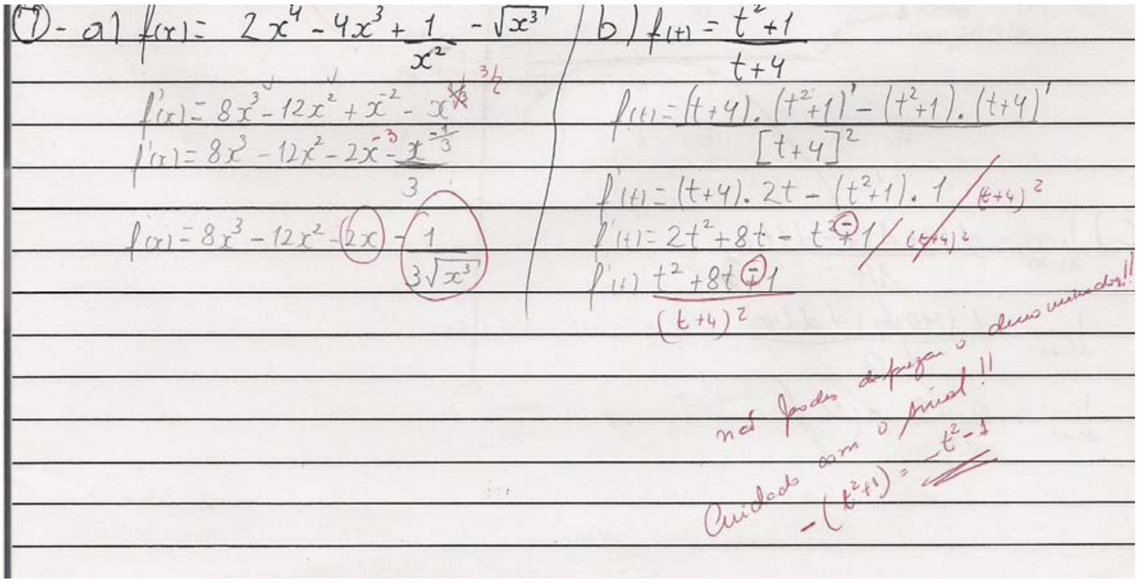
$f'(t) = \frac{2t^2 + 8t - (t^2+1)}{t^2 + 4t + 4t + 16}$

o sinal - na frente do parêntese troca o sinal de tudo o que está dentro do parêntese!!

$f'(t) = \frac{t^2 + 8t \mp 1}{t^2 + 8t + 16}$ //



① A) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 1/x^2 - \sqrt{x^3}$
$f'(x) = 6x^3 - 8x^2 + 1.x^{-2} - \sqrt[3]{3x^2}$
$f'(x) = 6x^3 - 8x^2 + x^{-2} - x\sqrt{3}$
B) $f(t) = (t^2+1)/(t+4)$
$f'(t) = (((t+4).(t^2+1)') - ((t^2+1).(t+4)'))/(t+4).(t+4)$
$f'(t) = (((t+4).2t) - ((t^2+1).1))/(t+4).(t+4)$
$f'(t) = (2t^2+4t - t^2 + 1) / t^2 + 8t + 16$
$f'(t) = t^2 + 4t + 1 / t^2 + 8t + 16$
$f'(t) = \frac{t^2 + 4t + 1}{t^2 + 8t + 16}$
Cuidado com a distributividade
Cuidado com o sinal
$-(t^2+1) = -t^2-1$



⑦ - a) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x^3}$
$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + x^{-2} - x^{3/2}$
$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x^{-3} - \frac{x^{-1/3}}{3}$
$f(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x - \frac{1}{3\sqrt{x^3}}$
b) $f(t) = \frac{t^2+1}{t+4}$
$f(t) = \frac{(t+4).(t^2+1)' - (t^2+1).(t+4)'}{[t+4]^2}$
$f'(t) = (t+4).2t - (t^2+1).1 / (t+4)^2$
$f'(t) = 2t^2 + 8t - t^2 + 1 / (t+4)^2$
$f'(t) \frac{t^2+8t+1}{(t+4)^2}$
não podes desprezar o denominador!!
Cuidado com o sinal!!
$-(t^2+1) = -t^2-1$

a) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x^3}$

$f'(x) = 4.2x^3 \; 3.4x^2 + \frac{1}{2x} - \sqrt{3x^2}$

$8x^3 - 12x^2 + \frac{1}{2x} - \sqrt{3x^8}$

$8x^3 - 12x^2 + \frac{1}{2x} - 3x$

$3.8x^2 - 24x + \frac{1}{2} - 3$

$-(t^2+1) = -t^2-1$

$f(t) = \frac{t^2+1}{t+4} = f'(t) = (t+4).2t - (t^2+1).1 / (t+4)^2$

$2t^2+8t-t^2+1$

$2t^2-t^2+8t+1$

$f'(t) = \frac{t^2+8t+1}{(t+4)(t+4)}$

$t^2+4t+4t+16$

$t^2+8t+16$

$\frac{\cancel{t^2}+\cancel{8t}+1}{\cancel{t^2}+\cancel{8t}+16} = \frac{1}{16}$

Organizar melhor o raciocínio!!

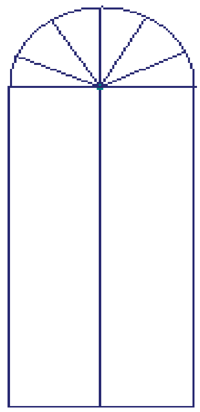
Que simplificação absurda é esta!!

ANEXO D – Avaliações analisadas

Questões da sondagem

Questão 1: Se $x \neq 2$ e $x \neq 0$, simplifique a expressão $\dfrac{x^3 + x^2 - 6x}{8x^2 - 16x}$.

Questão 2: A figura a seguir mostra uma janela em que a parte superior é formada por um semi-círculo e a parte inferior por um retângulo, cuja altura *h* possui o dobro da medida da base *b*. Qual a medida da altura total da janela?



Questão 3: O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$41000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo é R$28000,00. Encontre o valor do carro e da moto em reais.

Questão 4: Simplifique a expressão: $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{ab^3}}{b - 1 + \frac{1}{b}}$

Questão 5: Simplifique e expressão: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, onde $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Questão 6: Encontre a soma das raízes da equação $(2^x)^{x+4} = 32, x \in R$

Questão 7: Determine o conjunto de todos os valores reais de x para os quais a expressão que segue está definida em R. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 + 6x}$

Questão 8: Resolva em R as seguintes equações:

Item a: $(x+1)(x+2)=(x+5)^2$

Item b: $\dfrac{2(x+3)}{3}-\dfrac{x-4}{2}=2-\dfrac{x+1}{4}$

Questão 9: A partir de um ponto, observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30º. Caminhando 23m em direção ao prédio, atingimos um outro ponto, onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60º. Desprezando a altura do observador, calcule em metros a altura do prédio.

Questão 10: Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) as seguintes afirmações, explicando seu raciocínio:

Item a: ( ) $8^{\frac{2}{3}}=2^2$

Item b: ( ) $\sqrt{x^2}=x$, para $x\in R$

Item c: ( ) $sen(3\theta)=3sen(\theta)$, para $\theta\in R$

Item d: ( ) $\ln(a^2b^3)=(\ln a)^2+(\ln b)^3$

Item e: ( ) $(x+y)^2=x^2+y^2$

Item f: ( ) $(xy)^2=x^2y^2$

Item g: ( ) $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$

Item h: ( ) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+y}{y+x}$

Prova realizada em 7 de abril de 2008. Turma A.

1ª questão: dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ e $\vec{v} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$

a) encontre um vetor unitário com a mesma direção e sentido de $\vec{v}$

b) Dado $\vec{w} = a\vec{i} + 4\vec{j}$, determine o valor de ***a*** para que $\vec{w}$ seja ortogonal a $\vec{u}$

c) Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ao deslocar uma partícula sobre um segmento de reta do ponto P(3,2) ao ponto Q(6,5).

2ª questão: Seja $f(x) = \sqrt{x+1} + 4$

a) O domínio da *f* é______________

b) *f*(3) = ______________________

c) *f*(x) = 7 se x = ________________

d) Faça um esboço do gráfico de *f*

3ª questão: represente graficamente a função *g* tal que $g(x) = \begin{cases} |2x+1| & ,se\ x \le 0 \\ 3 & ,se\ 0 < x < 1 \\ -x^2+1 & ,se\ x \ge 1 \end{cases}$

4ª questão: Um projétil é lançado verticalmente para cima e seu deslocamento em função do tempo é dado pela expressão $S = 200 - 2t^2$ (*S* em metros e *t* em segundos).

a) Faça a representação gráfica do trajeto realizado pelo mesmo.

b) Determine a altura máxima atingida pelo projétil.

c) Determine o tempo em que o projétil permaneceu no ar.

5ª questão: complete a tabela a seguir com valores para *x* e *y* que tornem os pares (*x*,*y*) pertencentes a uma função polinomial de primeiro grau e descreva a lei da função.

X	0	1	2	4	6
Y	1		4		

6ª questão: Dadas as funções $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$ e $h(x) = x^3$ ache a lei da composta $f \circ g \circ h$, sendo $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$.

Prova realizada em 8 de abril de 2008. Turma B.

1ª questão: dados os vetores $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

a) encontre um vetor unitário com a mesma direção e sentido de $\vec{v}$

b) Dado $\vec{w} = -3\vec{i} + a\vec{j}$, determine o valor de ***a*** para que $\vec{w}$ seja ortogonal a $\vec{u}$

c) Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ ao deslocar uma partícula sobre um segmento de reta do ponto A(4,0) ao ponto B(-2,4).

2ª questão: Seja $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$

a) O domínio da *f* é______________

b) *f*(3) = ______________________

c) *f*(x) = 7 se x = ________________

d) Faça um esboço do gráfico de *f*

e) A imagem de *f* é ______________

3ª questão: represente graficamente a função *g* tal que $g(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & , se\ x \leq -1 \\ 2 & , se\ -1 < x < 1 \\ |x-2| & , se\ x \geq 1 \end{cases}$

4ª questão: Um projétil é lançado verticalmente para cima. Supondo que sua altura h (metros), em relação ao solo, t segundos depois do lançamento, seja $h(t) = -4t^2 + 200t$.

a) Faça a representação gráfica do trajeto realizado pelo mesmo.

b) Determine a altura máxima atingida pelo projétil.

c) Determine o tempo em que o projétil permaneceu no ar.

5ª questão: complete a tabela a seguir com valores para *x* e *y* que tornem os pares (*x*,*y*) pertencentes a uma função polinomial de primeiro grau e descreva a lei da função.

X	0	1	2	3	4
Y	4			2	

6ª questão: Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $h(x) = x^2$ ache a lei da composta $f \circ g \circ h$, sendo $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$.

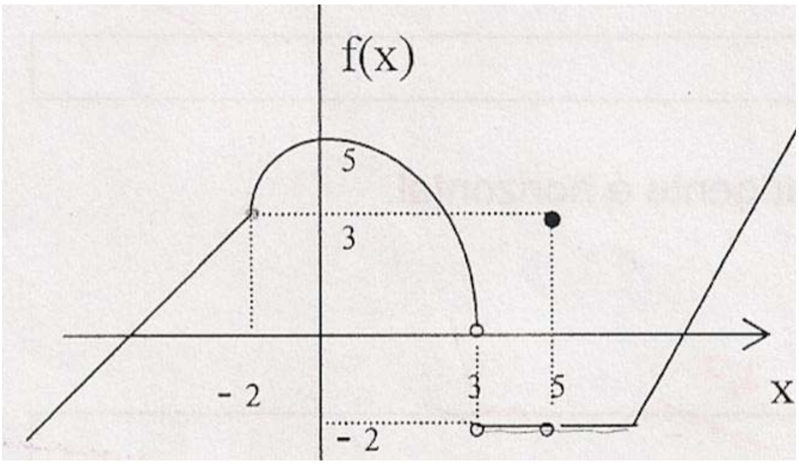
Prova realizada em 26 de maio de 2008. Turma A.

1ª questão: considerando o gráfico abaixo, responda:

a) $\lim_{x \to -2} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 5} f(x) =$



2ª questão: Calcule cada limite abaixo, se existir. Se não existir, justifique a sua resposta.

a) $\lim_{x \to -2} \frac{3x+1}{2-x} =$

b) $\lim_{x \to 5} \frac{4}{x-5} =$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{1-x} =$

3ª questão: Dada a função definida por $f(x) = \begin{cases} 3x-2, \text{se } 1 < x \\ 2, \text{se x} = 1 \\ 4\text{x}+1, \text{se x} < 1 \end{cases}$, determine se a função é contínua no ponto x = 1. Justifique sua resposta.

4ª questão: Um objeto é solto em queda livre de uma altura de 100 pés e se a resistência do ar pode ser desprezada, a altura *h* (em pés) do objeto no instante *t* (em segundos) é dada por $h(t) = -16t^2 + 100$.

a) Ache a velocidade média do objeto no intervalo [1 ; 1,5]

b) Ache a velocidade instantânea quando $t = 1$.

5ª questão: Encontre o(s) ponto(s) da curva $y = f(x)$ no(s) qual(is) a tangente é horizontal. $f(x) = x - \frac{x^2}{10}$

6ª questão: Encontrar a equação da reta tangente à curva dada por $y = e^x \cos x$ no ponto onde x = 1.

7ª questão: encontre as derivadas das funções abaixo definidas e escreva o resultado de forma simplificada:

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + \dfrac{1}{x^3} - \sqrt{x^3}$

b) $f(s) = \dfrac{s+1}{s^2 - s}$

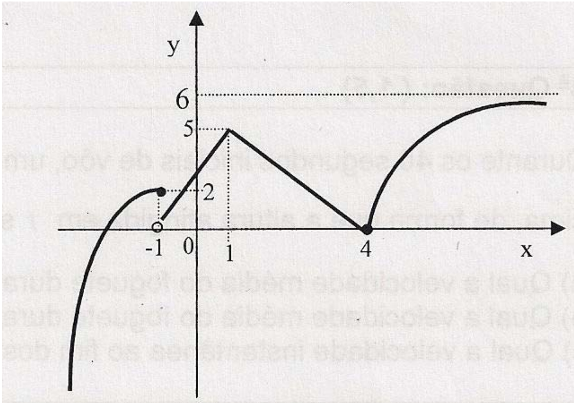
Prova realizada em 27 de maio de 2008. Turma B.

1ª questão: considerando o gráfico abaixo, responda:

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$



2ª questão: Calcule cada limite abaixo, se existir. Se não existir, justifique a sua resposta.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x+1}{2-x} =$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{4x}{x+5} =$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{1-2x} =$

3ª questão: Dada a função definida por $f(x) = \begin{cases} x+7, \text{se x} < 3 \\ \text{x}^2 \text{ - } 4, \text{se x} \geq 3 \end{cases}$, determine se a função é contínua no ponto 3. Justifique sua resposta.

4ª questão: Durante os 40 segundos iniciais de vôo, um foguete é disparado diretamente para cima, de forma que a altura atingida em t segundos é de $s = \dfrac{t^3}{\sqrt{10}} m$.

a) Qual a velocidade média do foguete durante os primeiros 40 segundos?

b) Qual a velocidade média do foguete durante os primeiros 135m de vôo?

c) Qual a velocidade instantânea ao fim dos 40 segundos?

5ª questão: Encontre o(s) ponto(s) da curva $y = f(x)$ no(s) qual(is) a tangente é horizontal. $f(x) = 4x - \dfrac{x^2}{5}$

6ª questão: Encontrar a equação da reta tangente à curva dada por $y = 4e^{x} + 7$ no ponto (0,7).

7ª questão: encontre as derivadas das funções abaixo definidas e escreva o resultado de forma simplificada:

a) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \sqrt{x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{t^2 + 1}{t + 4}$

ANEXO E – Questionários aplicados

Questionário respondido pelos alunos:

1) As oficinas ajudaram a solucionar suas dúvidas?

( ) Sim ( ) Não ( ) Em parte

2) Durante as aulas das oficinas você se sentia à vontade para fazer perguntas? ( ) Sim ( ) Não Se não Por quê?

3) Gostaria que fossem proporcionados momentos para discutir e analisar questões de provas e trabalhos fora do horário de aula? ( ) Sim ( )Não

4) Sugestões para futuros encontros:
Conteúdos/assuntos a serem trabalhados:

Forma de trabalho:

Horários:

5) Você estudou principalmente em:
- ( ) Escola Pública
- ( ) Escola Particular
- ( ) Parte pública/particular

5.1) Tipo de curso:
- ( ) Ensino Médio tradicional
- ( ) Técnico
- ( ) EJA

5.2) Turno principal:
- ( ) Manhã
- ( ) Tarde
- ( ) Noite

6) Idade:
( ) até 20 anos
( ) 21 a 30 anos
( ) 31 a 40 anos
( ) acima de 40 anos

7) Sexo:
( ) Masculino
( ) Feminino

8) Atualmente está trabalhando/estagiando?
( ) Sim, até 20 horas semanais
( ) Sim, entre 20 e 40 horas semanais
( ) Sim, acima de 40 horas semanais
( ) Não

9) Tem o hábito de estudar, fora do horário de aula:
( ) Sim, regularmente.
( ) Somente na véspera de avaliações
( ) Não

10) Quando tem dúvidas, o que faz:
( ) Procura solucionar com colegas
( ) Pede ajuda ao professor
( ) Consulta livros
( ) Busca apoio na monitoria
( ) Outras soluções

Questionário respondido pelos monitores:

1) Em média, quantos alunos consultam a monitoria a diariamente?
( ) até 5 alunos
( ) entre 6 e 10 alunos
( ) entre 11 e 15 alunos
( ) entre 16 e 20 alunos
( ) acima de 21 alunos
(...) Obs.:

2) Consegue perceber se são sempre os mesmos alunos que freqüentam a monitoria durante o semestre? ( ) Sim ( ) Não

3) As consultas são regulares ao longo do semestre ou mais freqüentes em véspera de avaliações?

4) Que tipo de questionamento os alunos fazem?
( ) Solucionar exercícios de livro
( ) Solucionar exercícios do professor
( ) Resolver questões de trabalhos/provas
( ) Dúvidas com relação ao conteúdo
( ) Outro tipo de consulta

5) As dúvidas apresentadas pelos alunos estão relacionadas principalmente com o ensino fundamental, médio ou superior?

6) Você destacaria algum(s) assunto(s) específico ou recorrente dentre as dúvidas apresentadas pelos alunos?

Questionário respondido pelos professores:

1) Em média qual o tamanho das turmas?

2) Em média, quantos alunos reprovam na disciplina a cada semestre?
(   ) até 5 alunos
(   ) entre 6 e 10 alunos
(   ) entre 11 e 15 alunos
(   ) entre 16 e 20 alunos
(   ) acima de 21 alunos

3) Dentre as alternativas abaixo, assinale a(s) que acredita ser a(s) principal(s) causa(s) dessa(s) reprovações:

( ) Falta de conhecimentos preliminares;
(   ) Dificuldades em assuntos específicos do Cálculo;
( ) Excesso de faltas;
( ) Falta do hábito de estudar;
( ) Outros

4) Que tipo de questionamento os alunos fazem durante as aulas?
(   ) Não fazem questionamentos
(   ) Solucionar exercícios de livro
(   ) Solucionar exercícios do professor
(   ) Resolver questões de trabalhos/provas
(   ) Dúvidas com relação ao conteúdo
(   ) Outro tipo de pergunta

5) As dúvidas apresentadas pelos alunos estão relacionadas principalmente com o ensino fundamental, médio ou superior?

6) Você destacaria algum(s) assunto(s) específico ou recorrente dentre as dúvidas apresentadas pelos alunos?

7) Você acredita que o apoio oferecido pelos monitores é suficiente?
(   ) Sim (   ) Não (   ) Em parte

8) Com relação as alunos que frequentaram as oficinas, percebe alguma melhora:
( ) Sim ( ) Não ( ) Em parte

9) Sugestões para os serviços de apoio ao ensino de Cálculo?