SILVANA LUMERTZ MODEL

DIFICULDADES DE ALUNOS COM A SIMBOLOGIA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Profª Dra. Helena Noronha Cury

Porto Alegre, agosto de 2005.

SILVANA LUMERTZ MODEL

DIFICULDADES DE ALUNOS COM A SIMBOLOGIA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Aprovada em 12 de agosto de 2005, pela Banca Examinadora.

BANCA EXAMINADORA:

Profª. Drª. Helena Noronha Cury – PUCRS

Profª. Drª. Ruth Portanova – PUCRS

Profª. Drª. Virgínia Maria Rodrigues – PUCRS

Ao meu marido pelo apoio, incentivo e paciência. E, de modo especial, ao meu filho Guilherme pelos momentos em que o privei da minha presença, do meu afago e do meu colo de mãe, para poder realizar este sonho.

AGRADECIMENTOS

O agradecimento, além de mostrar gratidão, revela também que reconhecemos o quanto somos insignificantes sozinhos. Agradecer alguém é ter a humildade de dizer que aquela pessoa foi importante num determinado momento e que de alguma forma ela ajudou a conquistar os objetivos traçados, indicando caminhos ou auxiliando na superação de algum obstáculo.

No caminho que percorri, muitas foram as pessoas que me auxiliaram. Algumas por meio de seu intelecto, outras com gestos de carinho, apoio e incentivo. Cada uma delas, à sua maneira, contribuiu para a concretização deste sonho. Foram momentos de muitas descobertas, persistência, expectativas e amizades. Por isso, tenho muito a agradecer. Em primeiro lugar, agradeço à Deus pela oportunidade da vida. Aos meus pais pelo incentivo à cultura. Agradeço aos mestres que sabiamente indicaram o caminho a seguir, especialmente, à Helena Noronha Cury, professora, orientadora e amiga. Aos colegas do Mestrado, agradeço pelas críticas, pelas trocas de experiência, pelo apoio e incentivo nas horas difíceis, e, principalmente, pelo carinho. Agradeço a todos os participantes dessa pesquisa, que sem eles não existiria. Quero agradecer meus amigos que souberam compreender meus momentos de desabafo ou de afastamento. Ao meu marido, agradeço pela paciência de saber ouvir e compreender o choro de desabafo ou alegria, por compartilhar cada conquista e amparar-me em cada desilusão. E, ao meu pequeno Guilherme, que foi um capítulo à parte nesse trabalho, quero agradecer pela espera paciente das horas em que fiquei envolvida na pesquisa, privando-o da minha presença e carinho, e também pelos chutes que ele me dava, ainda no ventre materno, avisando que muitas horas haviam passado e eu continuava na mesma posição em frente ao computador. Enfim, agradeço a todos que de uma forma ou outra colaboraram para a realização de mais esta etapa em minha caminhada.

RESUMO

Para a evolução do pensamento matemático foi necessário o desenvolvimento de sistemas de representação e, da compreensão dos símbolos utilizados, depende, muitas vezes, o estabelecimento da comunicação entre professor e aluno. As dificuldades no uso da simbologia matemática e na manipulação de registros de representação têm causado problemas na aprendizagem de vários conteúdos. Em alguns deles, como Teoria dos Conjuntos, Intervalos e Funções, são muitos os símbolos utilizados. Os registros de representação, assim como a simbologia envolvida nesses conteúdos, foram apresentados e trabalhados desde o Ensino Fundamental, contudo ainda mostram-se como fonte de incertezas. Assim, por meio desta pesquisa, pretende-se compreender as razões das dificuldades encontradas por alunos do Ensino Médio no entendimento e na utilização da simbologia matemática, com vistas a auxiliar alunos e professores na comunicação em sala de aula. Também é necessário salientar que a compreensão dessa simbologia e o trânsito entre os diferentes registros de representação podem melhorar o desempenho estudantil em Matemática como conseqüência da facilidade na comunicação escrita. A pesquisa foi realizada por meio de observações em sala de aula, da aplicação de um teste e de entrevistas com alunos do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual de Porto Alegre. Como resultados, são apontadas as dificuldades evidenciadas pelos alunos no uso da simbologia e no trânsito entre os registros de representação, discutindo-se possíveis causas para os problemas.

Palavras-chave: Simbologia matemática. Linguagem matemática. Registros de representação. Ensino Médio de Matemática.

ABSTRACT

The development of representation systems was necessary to the evolution of the mathematical thinking and the communication between the teacher and the student depends very frequently on the understanding of the symbols used. The difficulties in the use of the mathematical symbols and also in the manipulation of the representation registers have been causing problems in the learning of several contents. In some of them, as Group Theory, Intervals and Functions many symbols are used. The representation registers, as well as the simbology involved in those contents were presented and had been worked since Elementary School but they are still a source of uncertainties. This research had the purpose of understanding the reasons of the difficulties the high school students have in learning and also in using the Mathematical simbology in order to help the communication between the students and the teachers. It is also necessary to point out that the understanding of that simbology and the traffic among the different representation registers can improve the student acting in Mathematics as a consequence of the easiness of the written communication he can reach. This research was performed through observations inside the classroom, through the application of a test and also through interviews with high school students who go to a public school. As the result, the difficulties the students had in the use of the simbology and in the traffic among the representation registers are pointed, and possible causes for the problems are discussed.

Key-words: Mathematical symbology - Mathematical language - Representation registers - Mathematical high school

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para que o leitor compreenda a trajetória percorrida na elaboração deste trabalho de pesquisa, achei interessante fazer algumas considerações iniciais apresentando, contextualizando e justificando o tema em questão, para, em seguida, apresentar o problema que desencadeou tal pesquisa. O início se dá com a abordagem da linguagem de modo geral, adentrando um pouco no campo da semiótica e percebendo a influência da teoria sociocultural. Em seguida, observando as nuances da linguagem matemática, partimos em direção da simbologia, mais especificamente, no que tange a manipulação de representações de conjuntos, intervalos e das funções linear e constante.

A idéia que possuímos hoje a respeito da linguagem é, de uma maneira geral, um conjunto de sinais falados, escritos ou gesticulados, de que se serve o homem para exprimir suas idéias e sentimentos (DICIONÁRIO MICHAELIS, 2002).

Ao adentrarmos o ambiente escolar, a linguagem assume um papel de destaque, sendo ela a mediadora entre o aluno e o conhecimento, aparecendo como facilitador a figura do mestre. Dependendo da interpretação feita pelo aluno, a linguagem utilizada pelo professor pode parecer enfática ou agressiva, estabelecendo laços afetivos que aproximam ou repelem mestre e aprendiz. A partir dos laços estabelecidos, o aluno irá “mergulhar em águas profundas” em sua aprendizagem, ou “fechar-se numa ostra”. Pois, a linguagem utilizada interfere diretamente na relação entre professor e aluno, de modo que, através da fala, o mestre revela ao aprendiz suas estratégias, firmando limites e deixando transparecer sua autoridade.

Também, é a fala do professor que permite ao aluno compreender ou não o que está sendo ensinado, levando o educando a sentir-se à vontade nos domínios da disciplina ou repudiá-la. Nesse aspecto, o professor pode assumir o papel de facilitador ou de “traumatizador” do conhecimento.

Por conseguinte, percebo que a linguagem é um ponto fundamental na sala de aula, tanto por estabelecer a comunicação entre os indivíduos, como por criar elos entre eles. Além disso, na vida de profissionais da educação, a comunicação é uma ferramenta de trabalho imprescindível.

Nesse sentido, Zuffi (1999) considera que podemos acompanhar a preocupação eminente do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) em estimular a preparação dos professores de Matemática no que se refere ao uso da linguagem de forma clara e significativa.

De uma forma geral, linguagem é um modo de expressão que pode ser verbal, corporal, musical, gráfico, etc, sendo impregnada das crenças, valores e significados do indivíduo, que faz uso dela para estabelecer comunicação.

Com isso, pode-se perceber que a linguagem é uma estrutura de significação tão complexa que todos os recursos utilizados para se comunicar fazem parte dela. A linguagem está num gesto diferente, que tem um grau de significação que as palavras não expressam. Está presente numa melodia de música ou na entonação da voz, quando se quer transmitir algo para outra pessoa. A linguagem está no silêncio das ações e pensamentos que permeiam os atos. Ela está presente nas frases e em todos os artifícios que se utiliza para alcançar a comunicação.

Portanto, o que é significativo na linguagem, presente em qualquer ato, ação, pensamento, fala, voz, é que cada tipo de linguagem tenta passar seu significado conforme o que o indivíduo quer transmitir. E o receptor capta essas informações conforme o entendimento que possui do mundo ao seu redor.

Existem diferentes tipos de linguagem: as mais complexas, próprias de determinadas áreas do conhecimento; a linguagem coloquial, por meio da qual surgem as mais diversas gírias e expressões; a linguagem corporal, que auxilia na compreensão de outras linguagens; ou as linguagens escrita e simbólica, consideradas demasiadamente formais. Conseqüentemente, numa sala de aula, o professor precisa fazer uso de várias delas para se fazer compreender pelos alunos, pois, de acordo com Santaella (2003), existe uma linguagem verbal que foi traduzida visualmente na linguagem escrita, mas, simultaneamente, existem muitas outras linguagens que também se constituem em sistemas sociais e históricos de representação do mundo. O professor pode e deve fazer a intermediação entre a linguagem formal e a coloquial, dando significado às palavras, ao mesmo tempo em que força a capacidade de formalização de seus alunos.

Neste sentido, pode-se considerar que o indivíduo é o que ele comunica, expressa e sente. É através desse ato de comunicação que ele interage com o meio onde está inserido. Com essa interação, ele compreende e expressa aos demais sua verdadeira essência, suas idéias, raciocínio e emoções.

Desse modo, a linguagem não é simplesmente uma maneira pela qual os indivíduos podem expressar suas idéias e necessidades básicas. Além de um meio de comunicação, ela também exerce papel preponderante na representação, organização e interação com o meio ambiente, tornando os indivíduos capazes de dominar sua linguagem em seu benefício e de seu meio.

Neste trabalho, considerei a existência de uma linguagem matemática, historicamente construída, e que é bastante peculiar.

Boyer (1974, p.3) afirma que “O homem difere de outros animais de modo mais acentuado pela sua linguagem, cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato”. A partir dessa idéia, é perceptível a relevância da linguagem na Matemática para o surgimento de inúmeras abstrações do pensamento humano.

A linguagem matemática levou muito tempo até chegar ao que hoje conhecemos e somente nos últimos seis milênios o homem mostrou-se capaz de escrever seus pensamentos e registros (BOYER,1974). Dos primórdios até a atualidade, uma parte importante dessa linguagem, conhecida como simbologia matemática, sofreu transformações em sua notação. A tendência é ela se desenvolva do concreto para o abstrato e se molde à modernidade. E é nessa transição que encontramos, hoje, as grandes dificuldades de compreensão por parte dos alunos, que assimilam facilmente o concreto, mas tendem a ter dificuldades em abstrair. Com isso, é possível supor que existem problemas de compreensão da linguagem para que o pensamento matemático abstrato seja fluente entre os estudantes de Ensino Médio.

O fato de a linguagem simbólica matemática ser universal fortalece o formalismo empregado, não permitindo alterações ou simplificações. Esse formalismo, aliado à dificuldade de abstração, distancia o aluno de uma coesão de idéias que lhe permitam compreender de imediato, ou mesmo, após algumas tentativas, os conceitos apresentados. Sendo assim, o formalismo encontrado na linguagem matemática, muitas vezes, dificulta o entendimento do aluno, originando o repúdio pela Matemática.

Entretanto, o formalismo não pode ser considerado o grande e único culpado pela dificuldade do aluno de compreender a linguagem matemática. Outras circunstâncias, como problemas sociais, culturais e, até mesmo, alguns professores são responsáveis por problemas de aprendizagem de jovens que, devidamente motivados, poderiam alinhar-se entre os que se sentem à vontade nos domínios da Matemática. Afinal, ninguém deve desanimar ou sentir-se frustrado se não compreender algum conteúdo matemático na primeira tentativa, pois demoramos muitos milênios para chegar aos conhecimentos que temos hoje nessa área (GARBI, 1997).

A linguagem simbólica matemática é considerada, pelos alunos do Ensino Médio, como demasiadamente formal. No entanto, dela dependemos para a expressão de qualquer sentença matemática, para a solução de problemas, para a comunicação dos resultados. Não compreender o simbolismo matemático causa problemas no entendimento de todos os conteúdos estudados, especialmente aqueles que envolvem os símbolos da Teoria dos Conjuntos e funções, tópicos apresentados, em geral, no 1º ano do Ensino Médio.

Com base nesses fatos busco, por meio desta pesquisa, compreender as razões das dificuldades discentes com a simbologia matemática, procurando perceber quais são essas dificuldades e em que momento da aprendizagem elas surgem.

Para tal, julgo fundamental retroceder no tempo para melhor contextualizar o surgimento das minhas inquietações.

Há algum tempo tenho trabalhado com estudantes do Ensino Médio em uma escola pública e, neste período, tenho observado que a simbologia matemática parece não ajudá-los muito; pelo contrário, parece atrapalhá-los. Sempre acreditei que o formalismo e abstração que impregnam a linguagem matemática simplificassem a vida dos estudantes. Contudo, esse tipo de linguagem provoca um repúdio ainda maior pela Matemática. Esse fato tem chamado minha atenção para o assunto.

A compreensão da linguagem matemática é primordial para que se estabeleça comunicação entre o professor de Matemática e o aluno. A simbologia é apenas parte do universo comunicativo dessa Ciência, porém uma parcela significativa para estabelecer pontes entre o visível e o invisível, ou entre o concreto e o abstrato. Todavia, percebo que os alunos, em sua maioria, não possuem uma compreensão razoável da linguagem simbólica matemática, talvez porque seu domínio esteja muito além das suas necessidades ou habilidades.

Nesse sentido o Ministério da Educação – MEC – através das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)[1] destaca que a representação e a comunicação são uma das principais competências das Ciências da Natureza e Matemática. Isso incide numa preocupação eminente por parte dos professores em relação à comunicação: fazer-se entender por seus alunos. Esta inquietação docente também se reflete na clareza de expressão ao comunicar-se, bem como na coerência discursiva.

A linguagem simbólica, presente em todos os conteúdos de Matemática do Ensino Médio, conduz à interpretação e resolução de problemas. Por meio do uso

---

[1] Segundo o Ministério da Educação do Brasil (MEC) o PCN+ é um documento complementar aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN), subdividido em três áreas: Linguagens Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias.

da simbologia é possível particularizar, supor, produzir ou generalizar resultados de situações-problema equacionáveis. Para isso, é primordial que os alunos a compreendam para utilizar-se dela, pois o entendimento dessa linguagem é essencial para que haja comunicação entre o professor de Matemática e o aluno. (BAYER, 1997).

O conteúdo de Teoria dos Conjuntos, em especial, carrega uma quantidade significativa dessa simbologia. Tal conteúdo, tradicionalmente ensinado no primeiro ano do Ensino Médio, dá suporte aos novos tópicos que serão trabalhados posteriormente. Isso explica o fato de muitos autores apontarem o início do Ensino Médio como momento mais apropriado para introduzir a Teoria dos Conjuntos e, dessa forma, a simbologia aparece, através da álgebra, com maior ênfase nessa série.

De acordo com o MEC, no documento PCN+ (Brasil, 2004),

> [...] Álgebra, na vivência cotidiana se apresenta com enorme importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral. No ensino médio, esse tema trata de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos. (p.120)

E complementa:

> Os procedimentos básicos desse tema se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações e acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico. Esse tema possui fortemente o caráter de linguagem com seus códigos (números e letras) e regras (as propriedades das operações), formando os termos dessa linguagem que são as expressões que, por sua vez, compõem as igualdades e desigualdades. (p.121)

Ainda na perspectiva do MEC, no mesmo documento, o estudo das funções, que possui embasamento na Teoria dos Conjuntos, proporciona a aquisição da linguagem algébrica como a linguagem das Ciências, que se faz necessária para a expressão da relação entre grandezas e para modelar situações-problema na construção de modelos descritivos de fenômenos, permitindo, com isso, o estabelecimento de conexões em diversas áreas do conhecimento.

Assim, percebe-se que a utilização clara da linguagem matemática é uma das prioridades atuais dos educadores matemáticos, mostrando a relevância desta pesquisa tanto no sentido de identificar as dificuldades de compreensão, quanto no entendimento da visão discente sobre a sua própria aprendizagem.

Julgo necessário delimitar aqui o que se compreende por “linguagem matemática”. Para Anghileri (apud Zuffi, 1999, p. 34) “A linguagem matemática consiste de palavras e símbolos que têm significados relacionados a contextos particulares e a procedimentos para resolver problemas”.

Neste trabalho, estou utilizando essa expressão para indicar: imagens (gráficos, tabelas, desenhos geométricos, etc.), vocabulário (adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, tal que, relação, função, pertinência, dependência, dividendo, etc), símbolos (%, +, $\Rightarrow$, β, ϕ, $\forall$, $\exists$, $\cong$, $\neq$, $\geq$, [], π, $\cap$, etc.), sempre relacionados à Matemática. Pela amplitude de enfoques dados à linguagem matemática, irei me deter à simbologia e aos registros de representação semiótica emergentes das representações de conjuntos, intervalos e funções linear e constante.

De acordo com Duval (2003), os *registros de representação semiótica*, possuem uma importância primordial, visto que seu desenvolvimento foi uma condição histórica essencial para a evolução do pensamento matemático. Além disso, existe uma grande variedade de representações semióticas utilizadas em Matemática, o que exige uma mobilidade simultânea de, pelo menos, dois registros de representação, ou a possibilidade de trocá-los a todo momento.

Na análise de uma atividade matemática, sob uma perspectiva de ensino e aprendizagem, há diferenças na transformação de uma representação semiótica em outra. Essa transformação pode permanecer no mesmo sistema – sendo chamada de *tratamento* – ou mudar de sistema, conservando a referência aos mesmos objetos – denominado-se *conversão*. O tratamento pode ser exemplificado pela resolução de uma equação ou de um sistema de equações e a conversão pode ser ilustrada na passagem da escrita algébrica de uma equação para sua representação gráfica. (DUVAL, 2003).

Com isso, ainda sob a perspectiva da Teoria de Duval, a condição fundamental para que um aluno possa transferir ou modificar formulações ou representações de informações na resolução de um problema, está no reconhecimento de um objeto matemático por meio de múltiplas representações, que podem ser feitas em diferentes registros.

Tendo em vista o panorama geral do trabalho aqui apresentado, a seguir exponho o percurso metodológico no capítulo 2, trazendo as questões de pesquisa, os objetivos e a metodologia adotada.

O terceiro capítulo apresenta a fundamentação teórica relacionada ao objeto de estudo do presente trabalho. O estudo desse capítulo inicia com a definição e os tipos de linguagem, trazendo, ainda, elementos para a compreensão das idéias de Peirce e Saussure. Em seguida, é analisada a linguagem sob a ótica da teoria sociocultural, percebendo a influência da cultura sobre a linguagem, seus processos de aquisição e as implicações dessa teoria na educação. Afunilando o tema, passamos para a linguagem matemática, especificamente. Nesta etapa, são abordados o universalismo, o formalismo e abstração do pensamento, aspectos característicos deste tipo de linguagem. Após, é analisada a evolução histórica da simbologia matemática envolvida na Teoria dos Conjuntos e nas funções, buscando, num breve retrospecto, suporte para justificar e compreender melhor as dificuldades enfrentadas atualmente pelos alunos. O fechamento do capítulo ocorre com a explanação de aspectos relevantes sobre os registros de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática.

Para dar continuidade ao trabalho, o quarto capítulo conduz à apresentação e análise dos dados obtidos.

Em seguida, são feitas considerações sobre a análise dos instrumentos no quinto capítulo.

E, por fim, no sexto capítulo, trago a conclusão do trabalho como um todo, mostrando uma visão global da pesquisa realizada.

2 PERCURSO METODOLÓGICO

O percurso metodológico tem início com a minha inquietação diante das questões que deram origem a esta pesquisa. O foco central gira em torno do problema que impulsionou minha curiosidade como pesquisadora, de encontrar meios que auxiliem alunos e professores na comunicação em linguagem matemática e, conseqüentemente, no ensino e na aprendizagem da Matemática. Tal problema é expresso através da pergunta:

- *Quais são as dificuldades discentes no uso e na compreensão da simbologia matemática?*

E, a partir deste problema, emergem as seguintes questões de pesquisa:

- *Quais as maiores dificuldades perceptíveis no uso da simbologia matemática em relação aos conteúdos de Teoria dos Conjuntos, Intervalos e Funções?*
- *Em que circunstâncias surgem as dificuldades discentes com a simbologia matemática relativa à Teoria dos Conjuntos, Intervalos e Funções?*

Tendo em vista o problema central e as questões que surgiram a partir deste, foram delineados os objetivos do presente trabalho de pesquisa, apresentados a seguir:

Objetivo Geral

Esta pesquisa visa compreender as razões das dificuldades encontradas pelos alunos no entendimento e utilização da simbologia matemática.

Objetivos Específicos

a) Identificar as principais dificuldades de compreensão no uso da simbologia em relação aos conteúdos de Teoria dos Conjuntos, Intervalos e Funções;
b) Identificar quais significados perduram quando a simbologia referente a um determinado tópico é utilizada no ensino de outro conteúdo matemático.

Com os objetivos da pesquisa traçados, finalizo o percurso metodológico apresentando os métodos utilizados para a realização do trabalho, desde a coleta até a análise dos dados.

Os métodos de pesquisa são os diversos modos de abordar a realidade. Desta forma, o pesquisador busca escolher o método mais apropriado à realidade da sua pesquisa, tendo em vista os pressupostos previamente assumidos.A realização deste trabalho de pesquisa foi iniciada com o estudo de um problema que despertou meu interesse como pesquisadora, focalizando meu olhar nas dificuldades relacionadas com a simbologia e com alguns tipos de registros de representação em Matemática ocorridas no início do Ensino Médio. Com isso, busquei promover o confronto entre os dados coletados sobre essas dificuldades e o conhecimento teórico acerca do tema em questão (LÜDKE E ANDRÉ, 1986).

Para coletar informações numa realidade que é socialmente construída por meio de definições individuais ou coletivas e em que os participantes são sujeitos do processo, considerei adequado utilizar uma abordagem metodológica de caráter predominantemente qualitativo. Na pesquisa qualitativa o investigador não pode se colocar fora da história nem da vida social, pois este também é sujeito do processo, influenciando e sendo influenciado pela realidade em que se insere a pesquisa.

Nesse caso, devo enfatizar que a neutralidade é uma ficção que deve ser abandonada, assumindo-se a consideração dos valores da pesquisa como um fator positivo. Os fatos se apresentam em uma teia complexa de variáveis, uma ação múltipla de inúmeras variáveis agindo e interagindo ao mesmo tempo. Por isso não é possível o conceito de causalidade que aponta para a busca de um fluxo linear entre as variáveis dependentes e independentes.

Assim, podemos pensar na metodologia de pesquisa qualitativa como ramos de uma árvore frondosa, cujas raízes são a vida cotidiana, o experimentar, o vivenciar, o perguntar e o examinar.

Com base nisso, a pesquisa foi delineada a partir de três instrumentos de coleta de dados:

a) observações na sala de aula, com o intuito de analisar a linguagem matemática simbólica percebida pelos alunos, bem como a utilização dos registros de representação em Matemática;

b) teste, enfocando a utilização de registros de representação, os quais envolvem o uso de símbolos matemáticos, com o intuito de identificar as dificuldades eminentes encontradas pelos alunos;
c) entrevistas, que buscam compreender a visão discente no que diz respeito ao uso da linguagem matemática simbólica, bem como complementar e aprofundar aspectos observados no teste.

Como esta é uma pesquisa qualitativa, é proposital a escolha do campo onde serão colhidos os dados, bem como de seus participantes (ALVES-MAZZOTTI, 1998). Deste modo, escolhi a escola onde trabalho para realizar minha pesquisa, tendo como participantes uma turma do 1º ano do Ensino Médio. Esta turma é formada por trinta e sete alunos que moram nas proximidades da escola, oriundos do Ensino Fundamental da mesma. A referida escola é pública, situada em um bairro da periferia de Porto Alegre.

A respeito da utilização de observações como instrumento de pesquisa Lincoln e Guba (1985, p.273) salientam que “A maior vantagem da observação direta, [...] é que esta proporciona, no presente, uma experiência em profundidade.”[2]

Muito do que se vê nas observações depende do nível de conhecimento e da bagagem cultural que o investigador possui e do uso que ele faz destes para enxergar por meio da observação (PATTON, 1980).

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) as observações podem contar com a participação do observador, sendo que esta varia ao longo do estudo. Inicialmente, o investigador mantém-se um pouco de fora, aguardando que os sujeitos observados o observem também, acostumem-se com sua presença e o aceitem, de forma que a participação aumente à medida que as relações se desenvolvam. Contudo, é

[2] Todos os textos em língua estrangeira, citados neste trabalho, foram traduzidas por mim.

importante calcular o quanto se participa, bem como o modo de participação, tendo em mente os objetivos traçados.

A duração das observações e a forma de participação variam de acordo com o objetivo a ser alcançado, já que, na visão de Bogdan e Biklen (1994, p.128)

> Ser-se investigador significa interiorizar-se o objetivo da investigação, à medida que se recolhem os dados do contexto. Conforme se vai investigando, participa-se com os sujeitos de diversas formas. [...] Estas coisas são feitas sempre com o intuito de promover os objetivos da investigação.

Com base nessas idéias, realizei observações seguindo um roteiro, que apontava para pontos específicos a serem observados, contudo sem que este estabelecesse uma ordem rígida aos acontecimentos. Além dos aspectos previamente apontados, também foram registrados fatos relevantes que surgiam no decorrer das observações.

Estas ocorreram num período de dois meses, em seis encontros de aproximadamente uma hora e meia. Nas observações iniciais, a pretensão era mapear a realidade estudada e perceber aspectos relevantes à investigação, além de permitir aos sujeitos uma aclimatação à minha presença. Nas observações subseqüentes, direcionei o foco para o estudo das dificuldades com os registros de representação que apareciam nas aulas. Todas as observações foram descritas separadamente.

Outro procedimento bastante utilizado em pesquisas qualitativas é a análise de documentos. Segundo Alves-Mazotti (1998, p.169), "considera-se como documento qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação". Tendo em vista o ambiente escolar, livros didáticos, registros escolares, planos de aula, trabalhos de alunos são documentos bastante utilizados.

A análise de documentos pode ser combinada com outras técnicas de coleta, permitindo que os instrumentos sejam complementares e forneçam uma quantidade rica de dados para pesquisa. A respeito disso, Alves-Mazzotti comenta:

> Nesses casos, ela pode ser usada, tanto como uma técnica exploratória (indicando aspectos a serem focalizados por outras técnicas), como para "checagem" ou complementação dos dados obtidos por meio de outras técnicas (Alves-Mazzotti, 1998, p.169).

Tendo isso em vista, elaborei um teste para os alunos, com onze questões que abordavam o conteúdo trabalhado em sala de aula, atentando para os diferentes tipos de registros de representação utilizados e a transição entre eles. Esse teste permitia a consulta ao material de aula (caderno) e tinha como finalidade indicar aspectos das dificuldades encontradas com a linguagem matemática, os quais deveriam ser explorados com maior profundidade numa posterior entrevista.

A partir do resultado obtido no teste, selecionei nove alunos para entrevistar, atentando para os tipos de erros ou particularidades que apareceram nos seus testes.

As entrevistas são naturalmente mais interativas e permitem a exploração e o aprofundamento de temas complexos. Assim como as técnicas já mencionadas, a entrevista pode ser parte integrante da observação. Geralmente, em pesquisas qualitativas, as entrevistas são pouco estruturadas e não seguem uma ordem rígida, ocorrem em caráter informal, como uma conversa (ALVES-MAZZOTTI, 1998).

Assim sendo, realizei entrevistas com os alunos, explorando, com maior profundidade, aspectos que fugiram do meu alcance durante a observação ou peculiaridades individuais emergentes dos testes. As entrevistas foram gravadas e transcritas, e tiveram duração aproximada de quinze minutos com cada estudante.

Para a realização das entrevistas elaborei um roteiro de perguntas para cada aluno, sendo que este continha perguntas gerais – para todos os alunos – e perguntas específicas – para cada aluno, de acordo com suas respostas no teste. Porém, não existia uma ordem rígida para as perguntas, de modo que outros questionamentos emergiram durante os encontros, porque, como investigadora, devo tentar compreender o significado atribuído pelos alunos à situações ou processos de sua realidade (ALVES-MAZZOTTI, 1998).

Segundo a mesma autora, as pesquisas qualitativas usam uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de coletas de dados, sendo que essa multiplicidade de instrumentos permite uma triangulação, garantindo maior fidedignidade ao processo no cruzamento de dados, e, aumenta, assim, a validade dos resultados.

Para trabalhar com os dados obtidos a partir dos instrumentos de pesquisa, foram elaboradas:

- descrições das observações;
- descrições das respostas do teste, com comentários sobre os tipos de erros encontrados;
- construção de quadros para contagem de erros e acertos e para nivelamento e classificação dos alunos de acordo com o resultado do teste;
- descrição das respostas dos alunos nas entrevistas.

A partir desses elementos, foi realizada uma análise interpretativa, com aporte dos teóricos que subsidiaram a pesquisa.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente capítulo inicia com uma visão geral sobre a linguagem e suas formas de concepção, observando os tipos e formas de uso na sociedade. Em seguida, adentramos nas teorias de Peirce e Saussure, com o intuito de compreender com mais exatidão suas idéias e o universo em que o trabalho está inserido.

Tendo em mente uma visão geral acerca do assunto, as relações entre pensamento e linguagem são abordadas sob uma perspectiva sociocultural, assim como as funções da educação formal em relação ao uso e domínio da linguagem em atividades distintas, com o objetivo de compreender a relevância da linguagem para o ser humano, como uma das principais ferramentas do seu desenvolvimento intelectual e social.

O estudo começa com uma visão mais ampla da linguagem, iniciado com a explanação das concepções acerca da linguagem, salientando a diferença entre *língua* e *linguagem*, visto que existe uma tendência para a confusão de seus significados. Esclarecidas tais diferenças, considero a influência cultural sobre a linguagem, em que esta é o elemento essencial no domínio e na apropriação de discursos, constituindo, ao mesmo tempo, modo de comunicar o que já se sabe e de apropriar-se de novos conhecimentos.

O passo seguinte conduz a um estudo mais específico sobre a linguagem matemática. Essa, como linguagem universal, provoca algumas vezes repúdio, outras, fascinação naqueles que a aprendem. A fascinação diz respeito ao seu potencial para criação humana e à sua universalidade. O repúdio está intimamente ligado à falta de compreensão, causada, algumas vezes, pelo formalismo e abstração impregnados nesse tipo de linguagem.

Observando essas dificuldades com a linguagem matemática, é fundamental considerarmos a necessidade da mediação da língua materna no ensino de Matemática. Além disso, objetivando compreender melhor o simbolismo e a abstração que impregnam a linguagem matemática, proponho uma breve recapitulação histórica, analisando a evolução da simbologia que hoje conhecemos e da qual fazemos uso. Neste breve histórico, me detive aos conteúdos abordados no decorrer da pesquisa: Teoria dos Conjuntos e funções.

Finalmente, o capítulo é concluído com um percurso através dos registros de representação em Matemática e da transição entre eles, necessária para que se concretize a aprendizagem de um conceito matemático.

3.1 DEFININDO LINGUAGEM

De acordo com Koch (2003), ao longo da história, a linguagem humana tem sido concebida de diversas maneiras. Dentre estas, podemos sintetizar em três as principais formas de concepção da linguagem:

- como representação do mundo e do pensamento. Através desta concepção o homem representa para si o mundo através da linguagem, a qual possui a função de representação do seu pensamento e do seu conhecimento de mundo;

- como ferramenta de comunicação, considerando a língua como um código pó meio do qual um emissor comunica a um receptor determinadas mensagens. Neste caso, a principal função da linguagem é a transmissão de informações;
- como forma de ação ou interação. Nesta concepção a linguagem é encarada como “atividade” , como forma de ação, como lugar de interação que possibilita aos membros de uma sociedade a prática dos mais diversos tipos de atos, que vão exigir dos semelhantes reações ou comportamentos, levando ao estabelecimento de vínculos e compromissos anteriormente inexistentes.

As palavras possuem “corpo e alma” porque são utilizadas por um grupo de pessoas ou por uma única pessoa. Porém, sua alma está contida na significação que este grupo ou pessoa nela deposita para conseguir se expressar e se fazer entender. As palavras assumem, segundo uma perspectiva conjunta, na sociedade, num grupo de pessoas, uma significação que, para esta sociedade ou grupo, designa coisas e objetos que em outro grupo podem ter significado muito distinto.

Com isso, é imprescindível esclarecer a diferença entre *língua* e *linguagem*. De acordo com Santaella (2003), o uso da *língua* que falamos e da qual fazemos uso para ler e escrever é tão profundamente integrado ao nosso próprio ser que tendemos a nos desaperceber de que esta é apenas uma forma de linguagem. A língua, no nosso caso, portuguesa, é chamada de língua materna, corrente, nativa ou pátria. A aparente dominância provocada pela língua materna nos faz perder a consciência de que nos comunicamos e nos orientamos, também, por imagens, sons, gestos, cheiro, tato, pelo sentir, olhar e apalpar. Portanto, somos uma espécie tão complicada quanto são complexas e múltiplas as linguagens que nos constituem como seres simbólicos.

Nesse sentido, Poetzscher (1994), argumenta que a linguagem é de tal modo onipresente que a aceitamos e sabemos que, sem ela, a sociedade, tal como a conhecemos, seria impossível. É, com efeito, na língua e pela língua que o indivíduo e sociedade se determinam mutuamente. Sendo assim, a linguagem, através de sua língua, faz com que o indivíduo possa agir sobre o mundo e sobre ele mesmo.

Desta forma, Santaella (2003, p. 10) complementa essas idéias, ao afirmar que:

> [...] o nosso estar-no-mundo, como indivíduos sociais que somos, é mediado por uma rede intrincada e plural de linguagem, isto é, que nos comunicamos também através da leitura e/ou produção de formas, volumes, massas, interações de forças, movimentos; que somos também leitores e/ou produtores de dimensões e direções de linhas, traços, cores... Enfim, também nos comunicamos e nos orientamos através de imagens, gráficos, sinais, setas, números, luzes [...]

E a autora acrescenta que a falsa exclusividade da língua como meio de comunicação e forma de linguagem é devida a um condicionamento histórico que nos conduziu a acreditar que as únicas formas de conhecimento, de saber e de interpretação do mundo são aquelas difundidas pela língua, na sua manifestação como linguagem oral ou escrita. Todavia, é preciso lembrar que existe uma linguagem verbal que foi traduzida visualmente na linguagem escrita, mas, simultaneamente, existe uma grande variedade de outras linguagens que também se constituem em sistemas sociais e históricos de representação do mundo. E, portanto, quando nos referimos à *linguagem*, estamos nos referindo a uma enorme quantidade de formas sociais de comunicação e de significação, intrincadas, que inclui a linguagem verbal articulada, mas também, a linguagem dos surdos-mudos, o sistema codificado da moda e todos os sistemas de produção de sentido aos quais o desenvolvimento dos meios de reprodução de linguagem propiciam hoje uma enorme difusão.

O homem, na sua inquieta investigação para a compreensão dos fenômenos, revela significações. É no homem e pelo homem que se opera o processo de alteração dos estímulos emitidos pelos objetos do mundo em signos ou linguagens – produtos da nossa consciência. Nesse sentido, a linguagem engloba sistemas aparentemente desumanos, como a linguagem binária utilizadas pelas máquinas na comunicação entre estas e o homem, como é o caso do computador, até a linguagem da natureza, dos sinais de energia vital do corpo, ou mesmo a linguagem do silêncio.

Assim, a partir do que foi supramencionado, percebemos que, quando nos referimos à linguagem, além da língua que usamos para falar ou escrever, estamos mencionado uma rede complexa e plural de expressão, representação, comunicação e interação.

3.1.1 ENTENDENDO AS IDÉIAS DE PEIRCE E SAUSSURE SOBRE A LINGUAGEM

Atualmente pode-se perceber o crescimento de duas ciências da linguagem: a Lingüística, ciência da linguagem verbal, e a Semiótica, ciência de toda e qualquer linguagem.

A lingüística moderna, fiel a seus princípios básicos de que a língua é uma estrutura, uma rede de relações, e cuja paternidade se atribui a Ferdinand Saussure, apresentou-se inicialmente como uma “lingüística do sistema”. Em outras palavras, a descrição sincrônica das unidades pertencentes aos diversos níveis da língua (fonemas, morfemas, etc), sua posição no sistema e suas regras combinatórias (KOCH, 2003).

Por outro lado a semiótica de Charles Sanders Peirce, nas palavras de Santaella (2003), é definida como:

> [...] a ciência que tem por objetivo de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido. (p. 13)

A semiótica peirciana não se confunde com uma ciência aplicada. O empenho de Peirce era formar conceitos sígnicos tão gerais que pudessem servir de alicerce a qualquer ciência aplicada. Assim, a função primordial da semiótica se refere à classificação e descrição de todos os tipos de signos logicamente possíveis (SANTAELLA, 2003).

Segundo Peirce (apud Santaella, 2003):

> Um signo intenta, pelo menos em parte, representar um objeto que é, num certo sentido, a causa ou determinante do signo, mesmo se o signo representar seu objeto falsamente. Mas dizer que ele representa seu objeto implica que ele afete uma mente, de tal modo que, de certa maneira, determine naquela mente algo que é mediatamente devido ao objeto. Essa determinação da qual a causa imediata ou determinante é o signo, e da qual a causa mediata é o objeto, pode ser chamada o interpretante. (p.58)

Em outras palavras, signo é a representação de outra coisa, o seu objeto. Ele tem função de signo somente se pode representar uma outra coisa diferente dele. Assim, fica evidente que o signo não é o objeto, apenas está em seu lugar. Desta forma, o signo só pode representar esse objeto de um certo modo e numa certa capacidade. Por exemplo: a palavra mesa, o desenho de uma mesa, uma fotografia de uma mesa, uma miniatura de uma mesa, ou o seu olhar para uma mesa, são todos signos do objeto mesa. Não são a mesa, nem a idéia geral que temos de uma mesa, apenas substituem a mesa de um certo modo que depende da natureza do signo. A natureza de uma miniatura, por exemplo, não é a mesma de uma fotografia.

É importante ressaltar que as definições e classificações de signo formuladas por Peirce são logicamente gerais, consideradas quase matemáticas, e o nível de abstração exigido para compreendê-las é, sem dúvida, elevado. Contudo, depois de assimilado esse campo de relações formais, essa assimilação passa a funcionar como uma espécie de lente de aumento que nos permite perceber uma multiplicidade de pontos e distinguir sutis diferenciações nas linguagens concretas com as quais convivemos (SANTAELLA,2003).

Seguindo a linha de raciocínio apresentada pela mesma autora, percebemos que:

> A partir da relação de representação que o signo matém com o seu objeto, produz-se na mente interpretadora um outro signo que traduz o significado do primeiro (é o interpretante do primeiro). Portanto, o significado de um signo é outro signo – seja este uma imagem mental ou palpável, uma ação ou mera reação gestual, uma palavra ou um mero sentimento de alegria, raiva ... uma idéia ou seja lá o que for – porque esse seja lá o que for, que é criado na mente pelo signo, é um outro signo (tradução do primeiro) (p. 58-59).

Com base em Coelho Netto (2001), para compreender melhor a relação entre signo, objeto e interpretante, observemos essa relação triádica representada graficamente, na figura 1, abaixo:

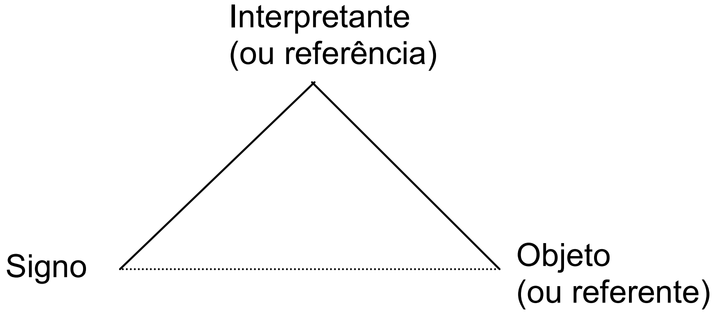


Figura 1 - Relação entre signo, objeto e interpretante

Através da figura 1, percebe-se que as linhas unindo signo e interpretante ou objeto e interpretante diferem daquela que unem o signo e o objeto. Isto porque, entre interpretante e signo, há relações causais. O signo utilizado é causado, em parte, pela referência feita e em parte por fatores sociais e psicológicos, constatáveis através dos efeitos causados pelo signo sobre a atitude do receptor e de terceiros.

Também há uma relação mais ou menos direta entre o interpretante e o objeto, quando, por exemplo, se presta atenção em uma árvore dentro do campo de visão, ou indireta, como quando se pensa sobre uma figura histórica qualquer, cujos atos são relatados com a interferência de pessoas, como de um historiador ou de uma testemunha da época. Entretanto, entre o signo e o objeto não existem relações pertinentes. Por exemplo: entre uma mesa qualquer vista com meus olhos e o signo que utilizo para designar a mesa, não há nenhuma relação causal ou de obrigatoriedade, nada que ligue uma coisa à outra (COELHO NETTO, 2001).

Contudo, o referido autor alerta que para certos tipos de signo, como o ícone e o índice, haverá uma relação direta entre signo e objeto, tornando, então, a linha que os une contínua como as outras. Isto ocorre devido ao fato de que dificilmente um tipo de signo deixa de estar marcado pela presença de outro ou outros, circunstância em que passa a existir alguma relação direta entre signo e objeto.

As relações entre o signo e seu objeto propõem uma divisão dos signos em ícone, índice e símbolo. De acordo com Coelho Netto (2001, p. 58), "Ícone é um signo que tem alguma semelhança com o objeto representado", como por exemplo, a escultura de uma mulher, uma fotografia de uma casa, ou mais genericamente, um diagrama, um esquema. Para o autor, "Índice é um signo que se refere ao objeto denotado em virtude de ser diretamente afetado por esse objeto" Para exemplificar, pode-se dizer que a fumaça é um signo que indica fogo. Ainda nas palavras do mesmo autor, “Símbolo é um signo que se refere ao objeto denotado em virtude de uma associação de idéias produzida por uma convenção. O signo é marcado pela arbitrariedade”. Exemplificando, a cor verde usada como símbolo da esperança.

Nesse sentido, Peirce (apud Santaella, 2003) afirma que:

> Um símbolo não pode indicar uma coisa particular; ele denota uma espécie (um tipo de coisa). E não apenas isso. Ele mesmo é uma espécie e não uma coisa única. Você pode escrever a palavra estrela, mas isto não faz de você o criador da palavra – e mesmo que você a apague, ela não foi destruída. (p.68)

Portanto, os símbolos são signos triádicos genuínos, visto que produzirão como interpretante um outro tipo geral que, para ser interpretado, exigirá um outro signo, e assim por diante (SANTAELLA, 2003).

Assim, na visão da autora, a semiótica de Peirce criou conceitos e dispositivos de indagação que nos permitem descrever, analisar e interpretar linguagens. Esses conceitos são instrumentos para o pensamento e não podem, por si mesmos, substituir a leitura e o desvendamento da realidade.

Na visão de Saussure, signos são figuras, diagramas, gráficos, mapas, gestos, sinalizações de trânsito, palavras, etc. As palavras, de modo especial, foram chamadas de “signos lingüísticos”, contudo é habitual chamá-las somente de “signos”. A definição de signo lingüístico de Saussure inclui somente dois componentes: significado e significante (GORDON; LUBELL, 2000).

De acordo com Gordon e Lubell (2000), Saussure propunha, a seus alunos, deixar de lado o estudo da linguagem por meio de sua história (filologia) e analisá-la como uma estrutura (lingüística). Para Saussure, todas as palavras têm um componente material, um som, uma marca sobre uma página – o significante – e um outro componente mental, que é o conceito ou a idéia representada pelo significante – o significado.

Assim sendo, significado é sinônimo de conceito, enquanto significante representa o aspecto fonológico da seqüência de sons que constituem o aspecto material do signo. Em outras palavras, pode-se dizer que o significado é aquilo que a palavra quer dizer. O significante é relativo a classificação gramatical da palavra em questão, os fonemas que a formam. Por exemplo, na palavra "cachorro", o animal em si é o significado, já o significante se refere às coisas relativas à palavra cachorro: classe gramatical (substantivo comum masculino) e os fonemas que a formam. O significante é totalmente aleatório: aquele ser que late e tem quatro patas ora chama-se cachorro, ora *perro* ou *dog*, palavras que não apresentam nenhuma semelhança em termos de significante, pois possuem outros fonemas, entretanto têm o mesmo significado.

Com isso, partindo do princípio de que o signo é formado pelo significante e pelo significado, a lingüística saussureana se converteu no modelo-chave para toda investigação da comunicação humana (GORDON; LUBELL, 2000).

Com base no que foi mencionado acima, podemos estabelecer alguns elos entre as idéias preconizadas por Peirce e Saussure. Embora Saussure tenha adentrado muito mais pelo campo da lingüística e Peirce tenha analisado a linguagem na perspectiva da semiótica, podemos perceber similaridades entre o que Peirce chamou de *objeto* (ou referente) e Saussure denominou de *significado*. Para entender melhor, vamos analisar o exemplo a seguir: uma determinada caneta é o que Peirce intitula como *objeto* ou *referente* de um signo. O *significado* da palavra "caneta", na concepção de Saussure, é a própria caneta. Logo, a semelhança encontra-se na relação entre os dois conceitos, que, embora não representem a mesma coisa, referem-se a esta mesma coisa de formas diferentes: o primeiro é a própria coisa (caneta), o outro se refere a ela através da palavra “caneta”.

Todavia, neste trabalho, a apresentação de similaridades é reduzida ao exemplo acima, pois há uma relação mais estreita com a semiótica de Peirce, tendo em vista que pretendo analisar a linguagem de forma ampla, sem me restringir ao campo da lingüística.

3.2 ANALISANDO A LINGUAGEM NA PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL

A linguagem, sob a perspectiva sociocultural, além de um modo de comunicação, é uma forma de interagir socialmente, expressando idéias ou influindo nos pensamentos dos outros das mais diversas formas e com diferentes resultados.

Para tal, é imprescindível analisar a influência cultural exercida sobre a linguagem. Ou seja, a linguagem de um indivíduo é caracterizada pelo grupo cultural ao qual este indivíduo pertence. Mas, até que ponto a cultura determina a linguagem de um grupo?

A partir disso, proponho investigar como ocorre a aquisição da linguagem e a formação do símbolo, pois a compreensão da linguagem envolve o entendimento de sua relação com o pensamento.

Em seguida, voltando-se para a questão educacional, são analisadas as implicações da teoria sociocultural no ambiente escolar, atentando para o fato de a aprendizagem não ser caracterizada como um processo linear de etapas a serem cumpridas, mas como um procedimento complexo, no qual é considerado o modo de desenvolvimento humano, implicando numa visão global deste fenômeno.

3.2.1 A INFLUÊNCIA DA CULTURA SOBRE A LINGUAGEM

Hoje, a teoria sociocultural constitui uma área de investigação interdisciplinar nas Ciências Humanas e se compõe, tanto no plano conceitual como metodológico, de contribuições emergentes para estudar as relações entre cultura, contexto e cognição, assim como para revelar as funções de instrumentos culturais nos processos educativos. O maior expoente da teoria sociocultural é Vygotski e, entre os temas gerais identificados por ele, está a noção de mediação cognitiva e o papel dos instrumentos mediadores na construção do pensamento através de suas propriedades simbólicas. Essas contribuições são de suma importância no estudo das funções e usos da linguagem na educação (CATALÁN, 2001).

De acordo com essa autora, é possível observar que, nas sociedades atuais, os processos sociais e culturais se produzem principalmente como eventos mediados, influindo não somente nas formas de organização social, mas também na forma de construção da identidade cultural dos cidadãos. Isto delineia uma busca importante no campo das Ciências Humanas para fundamentar e desenvolver avanços e novos pontos de vista no discurso público sobre estes temas. Neste sentido, a investigação sociocultural pode contribuir em aspectos como: as diferenças culturais em relação ao processo de construção da identidade, com as mudanças históricas na compreensão dos direitos humanos, e as diferenças institucionais, que implicam nas práticas em contextos como a escola, o trabalho e a família.

Atualmente, a teoria sociocultural está tendo grande impacto e um desenvolvimento empírico constatável na realização de diversos trabalhos em muitas linhas, que supõe avanços no estudo dos processos educativos e na construção da identidade cultural pessoal. De acordo com Rockwell (apud Catalán, 2001), cultura é um espaço para construção de novos significados e práticas, sendo que os significados não são construídos e interiorizados de uma vez por todas na infância, mas sim apropriados ou construídos em contextos cotidianos variáveis ao longo da vida. Estas considerações outorgam um papel fundamental ao contexto em que os sujeitos viveram e aos significados que construíram vinculados a eles como representações culturais.

Assim, com base nas idéias de Catalán (2001), pode-se dizer que cultura é estável e emergente. Estável no que se refere àquilo que um grupo reconhece como significados dominantes, o conhecimento compartilhado pelos grupos sociais, as estruturas de participação social, as finalidades que presidem as situações sociais particulares, as normas e padrões de conduta que regulamentam a convivência nas instituições e contextos sociais. Por outro lado, a cultura é definida e reconstruída pelos indivíduos durante suas interações, no que se vincula a responsabilidade individual e a participação ativa das pessoas na criação de significados, o que a caracteriza como emergente. Os conhecimentos provenientes da bagagem histórico-cultural da humanidade preexistem aos atos, ainda que, ao utilizar essas normas e padrões em instâncias concretas de atividade, os indivíduos as constroem, reinventam e mudam. Ao utilizar esses significados compartilhados como eixos organizadores do discurso, os indivíduos expõem publicamente seu conhecimento dos contextos e a intencionalidade individual, já que a seleção de determinadas formas culturais e sua manipulação implica numa intenção particular.

Outras formulações sobre cultura, coerentes com esta perspectiva, colocam em primeiro plano os instrumentos que mediam a relação entre contexto e indivíduo. Segundo De Pablos (apud Catalán, 2001):

> [...] a cultura se comunica, se representa e forma parte do patrimônio dos grupos humanos, através dos ganhos tecnológicos como a televisão, o rádio, a informática, a imprensa, os quais supõem uma corrente de "culturização" sobre os grupos sociais. Nesta ótica, o desenvolvimento humano se aperfeiçoa como um processo permanente de "culturização", no qual o sujeito se apropria progressivamente de um conjunto de instrumentos que lhe permitem ajustar o mundo exterior e seu próprio pensamento (p.52).

Nesta linha, Soriano (apud Catalán, 2001) afirma que a cultura se define como um processo contínuo e acumulativo de construção de conhecimentos que se aprende e se compartilha com um grupo humano. Assim, nas idéias dessa autora, a cultura se representa simbolicamente através da língua e das interações que ocorrem entre os indivíduos de um grupo e possui a peculiaridade de orientar os pensamentos, sentimentos e ações das pessoas.

Os discursos configuram a cultura, de modo que expressam uma definição particular dos contextos sociais, da mesma forma como os tipos de linguagens e formas de uso privilegiadas em cada contexto. Assim, o discurso projeta os vínculos entre contexto e instrumento cultural realizados pela pessoa. As diferentes formas de uso da linguagem nos diversos contextos sociais gera modos de discursos muito heterogêneos, os quais são característicos de uma sociedade, de um grupo, de uma pessoa. As pessoas desempenham um papel ativo no desenvolvimento da cultura através da modificação, expansão e revisão feita dos significados, valores, emoções, em instâncias concretas de comunicação. Criam significados baseados na definição particular que fazem do contexto e em suas experiências prévias em diferentes ambientes sócio-culturais (CATALÁN, 2001).

Nesse sentido, Santaella (2003) afirma que:

> Considerando-se que todo fenômeno de cultura só funciona culturalmente porque é também um fenômeno de comunicação, e considerando-se que esses fenômenos só comunicam porque se estruturam como linguagem,

> pode-se concluir que todo e qualquer fato cultural, toda e qualquer atividade ou prática social constituem-se como práticas significantes, isto é, práticas de produção de linguagem e de sentido (p.12).

Essas idéias são complementadas por Moraes e Galiazzi (2003), ao mencionarem que a compreensão do que as pessoas entendem de suas realidades cotidianas é delimitada pela linguagem que dominam, pelas palavras que conseguem falar.

Com isso, a teoria sociocultural aponta para o fato de a linguagem ter uma origem social, constituindo uma ferramenta para o pensamento e possuindo uma função reguladora da ação. Deste modo, a linguagem pode cumprir uma diversidade de funções (CATALÁN, 2001).

Assim, nos pressupostos desta teoria, a primeira função desempenhada pela linguagem no desenvolvimento humano é a comunicação. A ação da fala vem, em primeiro lugar, impulsionada pela comunicação, influir nos pensamentos dos outros e expressar estados emocionais com relação ao mundo social. Num plano mais geral, indica que se busca, inclusive, a obtenção da coesão social, integração e aceitação na vida coletiva.

Nesse sentido, La Rosa (2001) afirma que Vygotski entendia que é o grupo cultural no qual o indivíduo cresce que vai lhe oportunizar o universo de significados que organiza o real em categorias, indicadas por palavras da língua desse grupo. O que entendemos por realidade é construído por meio da linguagem, em outras palavras, o acesso ao real nos é dado pela linguagem.

Portanto, podemos dizer que é no significado da palavra que se encontram as funções básicas da linguagem: o pensamento e o intercâmbio social. São os significados que propiciam a mediação simbólica entre indivíduo e o mundo real, constituindo-se no filtro através do qual o indivíduo é capaz de compreender o mundo e agir sobre ele.

3.2.2 A AQUISIÇÃO DA LINGUAGEM E A FORMAÇÃO DO SÍMBOLO

Com base no que foi mencionado anteriormente, pode-se dizer que a linguagem constitui uma ferramenta cultural por excelência. Na teoria proposta por Vygotski, a linguagem ocupa um lugar primordial e sua compreensão envolve o entendimento de sua relação com o pensamento. De acordo com Vygotski (1995, p. 63) "o pensamento é o fundamento real do desenvolvimento da linguagem". Para ele a linguagem é uma ferramenta semiótica essencial na construção do pensamento, pois a mesma sofre muitas mudanças até transformar-se em linguagem, e das relações sociais, marcando a fusão entre as funções comunicativas e representativas (LA ROSA, 2001).

Assim é possível entender que a aquisição da linguagem se dá por processos complementares e contínuos, nos quais a criança observa os outros e a si mesma, emite sons tentando reproduzir os ruídos que ouve, gesticula procurando externar seus pensamentos, balbucia palavras associando significado a elas, cria e verbaliza suas próprias palavras, até formalizar o conhecimento e comunicar-se por meio de palavras.

Para Vygotski, a aquisição da linguagem inicia na interação com os outros, no desenvolvimento da linguagem socializada, e, quando é interiorizada, a fim de resolver problemas próprios, buscando por si mesmo a solução, a linguagem adquire uma função intrapessoal. Sendo assim, a linguagem é uma ferramenta fundamental na construção do pensamento e das relações sociais, consolidando a união entre a comunicação e a representação.

Vygotski acredita que a criança começa a controlar seu ambiente com a ajuda da fala antes mesmo de controlar seu comportamento. Isso causa uma produção de novas relações com o ambiente por parte da criança, organizando seu pensamento. Segundo La Rosa (2001), a teoria sociocultural sustenta a idéia de que as palavras e signos são um meio de comunicação entre a criança e outras pessoas. Entretanto, quando elas internalizam a linguagem socializada, usando a linguagem como ferramenta para solução de seus problemas, ocorre a maior mudança em sua capacidade, visto que a linguagem passa a adquirir uma função intrapessoal, além de interpessoal. Assim a fala é avaliada como um dos elementos de origem sociocultural, atuando na formação dos processos mentais da criança.

De acordo com Pascual-Leone (1997), Vygotski entende que, na formação dos processos mentais, o pensamento humano pode seguir duas vias e formas processuais por meio de múltiplos caminhos intermediários: os processos cognitivos altos e baixos. Tais processos são explicados pelo autor a seguir:

> Os processos cognitivos altos e baixos são o resultado da invenção e transmissão cultural de instrumentos de pensamento diversos, como a linguagem, o uso de ferramentas, o uso de símbolos / sinais, etc. Tais instrumentos mentais e ferramentas culturais permitem que os processos cognitivos baixos – atenção, memória, aprendizagem, percepção, etc. – aumentem o seu rendimento, mudando qualitativamente, por meio de reorganizações estruturais dinâmicas que originam os processos mentais altos (PASCUAL-LEONE, 1997, p.61).

Esses processos cognitivos possuem mecanismos comuns, mas diferem por aparecerem, inicialmente como estruturas de ação, na práxis coletiva externa do grupo humano, passando, posteriormente, a ser estruturas mentais do indivíduo, interiorizadas. Desta forma, a capacidade humana de gerar símbolos externos e inventar ferramentas de todo tipo condiciona o desenvolvimento mental. O ser humano possui a capacidade de criar símbolos e ferramentas capazes de sínteses dinâmicas e originais, nas quais a linguagem simbólica aparece dentro de um contexto histórico-cultural, primeiro, como instrumento coletivo e, mais tarde, individual, de comunicação.

Símbolos e sinais são signos, desmembrados em três estruturas: o próprio signo concreto, o objeto que este representa, e a significação. O uso do conceito de símbolo é delimitado por três notas: convencional, geral e, funcionalmente desvinculado de seu referente. Essa desvinculação funcional que o pensamento conceitual gera, explica que a representação simbólica permite mobilidade e generalidade das operações mentais. O símbolo ou processo simbólico, na nota convencional, significa conexão com seu referente por meio de uma regra arbitrária, adotada por convenção. Por exemplo: “Pi” como símbolo da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro (PASCUAL-LEONE, 1997).

Ao estabelecer uma relação entre uma representação formada por imagens mentais, diagramas, esquemas, descrições verbais, gestos, simulações, etc., e uma situação dada, o raciocínio contextualizado favorece a articulação das variáveis envolvidas contribuindo para o sucesso do processo de resolução do problema (MOYSÉS, 2000).

De acordo com La Rosa (2001), na concepção de Vygotski, os signos e demais instrumentos de mediação são produzidos pela cultura, pelo meio social. Todavia a aquisição de signos não significa somente absorvê-los do mundo social externo, mas é necessário internalizá-los, o que exige uma série de transformações e de processos psicológicos. Essas transformações e processos psicológicos referem-se, por exemplo, ao pensamento, à linguagem, à vontade, etc. Mais especificamente, na sala de aula, pode-se perceber processos psicológicos tais como: a auto-observação, o planejamento, a capacidade de planejamento abstrato, a metacognição, a inferência, a indução, o pensamento lógico e a solução de problemas.

3.2.3 Implicações Educacionais da Teoria Sociocultural

A produção intelectual de Vygotski explicita sua preocupação com a educação, em que os conceitos são compreendidos como um sistema de relações e generalizações, incluído nas palavras e definido por um processo histórico-cultural.

No que se refere à aprendizagem, ele faz uma distinção entre os conhecimentos adquiridos na experiência concreta e cotidiana das crianças, chamando-os de conceitos cotidianos ou espontâneos, e aqueles construídos na sala de aula, os quais chamou de conceitos científicos. E salienta que, embora distintos ambos estão intimamente ligados e influenciam-se reciprocamente, pertencendo com igual importância ao processo do desenvolvimento da formação de conceitos (LA ROSA, 2001).

As interações educativas devem propiciar o uso e o domínio de uma ampla variedade de ferramentas, assim como o conhecimento sobre quando é mais apropriado o uso de cada uma. Nesse sentido, a educação formal cumpre duas funções: por um lado facilita o uso e domínio dos instrumentos culturais como a linguagem e, por outro, possibilita novas formas de uso e pensamento (CATALÁN, 2001).

Nesse sentido, Moraes e Galiazzi (2003) comentam que:

> [...] relacionar o trabalho de aula com a realidade e o cotidiano é estabelecer pontes com a linguagem dos alunos, com aquilo que expressam. Significa fazer com que se

> manifestem, especialmente pela fala e pela escrita, envolvendo nisto não só os alunos, como também a comunidade mais ampla. Isso é, ao mesmo tempo, o que considera-se partir do conhecimento dos alunos. (p. 1)

A alfabetização escolar supõe a construção e reapropriação da linguagem através de um segundo sistema simbólico: a escrita. A escrita implica na reestruturação das formas de pensamento para se representar de maneira qualitativamente distinta nas sociedades. Tanto a escrita como qualquer outro sistema de códigos não surge de maneira espontânea, mas implica na criação de sistemas psicológicos novos que devem ser ensinados de maneira sistemática (CATALÁN, 2001).

Ainda sob o ponto de vista da mesma autora, a contribuição mais importante dos sistemas simbólicos implícitos na escrita, na aritmética ou em outro sistema de códigos é seu potencial para a criação humana. A descontextualização destes complexos sistemas de signos possibilita não somente a adaptação e o controle do mundo exterior, mas também o ajuste da nossa própria conduta para metas e planos imaginados.

Para La Rosa (2001), é importante, ainda, destacar que o desenvolvimento psicológico deve ser visto na atual situação, mas referindo-se ao que vai acontecer na trajetória do indivíduo, ressaltando-se o que o indivíduo tem de novo. Outro aspecto, relevante dentro da teoria sociocultural, é a zona de desenvolvimento proximal, entendida por Vygotski (1989) em termos de um domínio psicológico em constante transformação, ou seja, como a distância entre o nível real de desenvolvimento e o nível de desenvolvimento potencial. O primeiro é determinado pela habilidade de resolver, independentemente, um problema, o segundo, pela resolução sob orientação ou com a colaboração de um companheiro mais capaz. Assim, o nível de desenvolvimento potencial implica na idéia de que o professor deve provocar avanços que não aconteceriam de forma espontânea no aluno. E, por fim, o fato de que o simples contato com o conhecimento não garante a aprendizagem. Desta forma, a aprendizagem é que possibilita o despertar dos processos internos do desenvolvimento, os quais não teriam lugar se o indivíduo não estivesse em contato com um determinado ambiente cultural.

Com isso, uma das principais contribuições de Vygotski para educação se deve ao fato de ele não considerar o processo de aprendizagem como uma sucessão linear de etapas que o aluno deve passar, mas como um processo que leva em conta o modo como os seres humanos vão desenvolvendo os seus conhecimentos do mundo, implicando uma visão mais ampla do fenômeno no qual o meio cultural tem um papel fundamental (LA ROSA, 2001).

3.3 A LINGUAGEM MATEMÁTICA

De acordo com as idéias de Machado (1998), nos sistemas alfabéticos, os próprios sons passíveis de serem articulados pelo homem são subdivididos e classificados em certos tipos básicos, em número muito pequeno, associados a signos, com os quais passam a constituir as palavras, num processo de natureza abstrata com certa semelhança com o que é utilizado, habitualmente, na representação dos números partindo de um pequeno conjunto de algarismos. Assim, todo sinal incorporado à língua, isto é, todo sinal que se torna elemento de um sistema, seguiu necessariamente a via da abstração, independente de sua origem. Os símbolos numéricos permitem e desenvolvem, na linguagem fônica, a capacidade de contribuir para que a mente atue no plano abstrato.

Ainda sob a visão do mesmo autor, a linguagem, em suas abstrações, tem a função de expressar e comunicar os pensamentos do indivíduo. Portanto, ao adentrarmos na linguagem matemática, mais especificamente, nos deparamos com uma linguagem que necessita de intermediação de outra para ser compreendida. Tanto a língua oral quanto a escrita funcionam como um sistema de representação da realidade. A linguagem matemática não pode ser entendida como a transcrição de códigos. Aprendê-la significa mapear a realidade, desenvolvendo a capacidade de interpretar, analisar, sintetizar, significar, conceber, projetar.

Segundo Latorre (apud Klüsener, 2001, p.180), “valorizando a importância da linguagem na construção dos conceitos matemáticos, passamos a entender a matemática como uma linguagem”.

De acordo com o MEC, tendo base no PCN+ (Brasil, 2004):

> O domínio de linguagens, para a representação e a comunicação científico-tecnológicas, é um campo comum a toda a ciência e a toda a tecnologia, com sua nomenclatura, seus símbolos e códigos, suas designações de grandezas e unidades, boa parte dos quais já incorporada à linguagem cotidiana moderna. A articulação dessa nomenclatura, desses códigos e símbolos em sentenças, diagramas, gráficos, esquemas e equações, a leitura e interpretação destas linguagens, seu uso em análises e sistematizações de sentido prático ou cultural, são construções características dessa área de conhecimento, mas hoje integram um instrumental igualmente necessário para atividades econômicas e para o pensamento social. Por isso, o desenvolvimento de códigos e linguagens em ciência e tecnologia deve ser tomado como um aspecto formativo de interesse amplo, ou seja, no ensino de cada disciplina científica, esse desenvolvimento não está somente a serviço dessa determinada ciência ou das ciências, mas sim promovendo uma competência geral de representação e comunicação (p.24).

Existem meios de comunicação universais como, por exemplo, a música ou a arte. A linguagem matemática evidencia uma certa universalidade. Contudo, esta exige fundamentos rigorosos para essa ciência, dita exata, assumindo um rigor matemático. Além do rigor, o aspecto utilitário e a importância em nossa comunicação são evidenciados pela universalidade da linguagem matemática. (KLÜSENER, 2001).

Nos sistemas escolares, D'Ambrosio (1993) destaca a importância da universalidade em relação à linguagem matemática:

> Embora, a nosso ver, a descontextualização da Matemática seja um dos maiores equívocos da Educação moderna, o que efetivamente se constata é que a mesma Matemática é ensinada em todo o mundo, com algumas variantes que são bem mais estratégias para atingir um conteúdo universalmente acordado como devendo ser a bagagem de toda criança que passa por um sistema escolar (p.7).

Os números, as formas, as propriedades, as relações, não são construídos a partir de objetos homólogos de qualquer outro sistema pré-existente, mas tendo em vista a realidade que se pretende mapear. Logo a matemática é um sistema de representação da realidade, gradativamente construído (MACHADO, 1998).

Klüsener (2001) ressalta que, para que as idéias sejam manifestadas ou aspectos e fenômenos da realidade sejam construídos mentalmente, são usados elementos de comunicação chamados símbolos matemáticos, a fim de abstrair e transformar pensamentos em linguagem. Nesse sentido, aprender Matemática é, em grande parte, aprender e utilizar diferentes linguagens (aritmética, geométrica, algébrica, gráfica, entre outras). Atualmente a linguagem matemática se faz presente em quase todas as áreas do conhecimento, tornando o seu domínio imprescindível. Por conseguinte, somos capazes de nos comunicar num processo histórico-social e universal através da leitura e da escrita, rompendo fronteiras geográficas e temporais.

Além disso, para Danyluk (1991), é preciso compreender todas as formas de interpretação, explicação e analise do mundo, feitas pelo homem. A Matemática corresponde a uma dessas formas, com seus códigos e linguagens, e com seu sistema de comunicação e representação construídos ao longo de sua história.

O PCN+ ressalta a importância da comunicação em Matemática por ser uma competência valiosa como relato, registro e expressão, destacando essa competência como “a representação e a comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento” (BRASIL, 2004, p.113).

O mesmo documento salienta, ainda, o fato de que a linguagem matemática serve, também, como ferramenta para diversas outras áreas do conhecimento.

3.3.1 O ENSINO E A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Machado (1998) lembra que a linguagem matemática é em sua essência muito mais escrita do que falada, principalmente no que se refere à simbologia matemática. É necessário, também, considerar que todo conhecimento da realidade que os alunos trazem ao ingressarem na escola é expresso basicamente pela fala, a qual oferece suporte de significados de onde emergirão os signos para construção da escrita.

Quando a criança entra na escola, embora não saiba escrever, ela fala, e para isso usa um vocabulário próprio. Nesse contexto, pretende-se que a criança utilize a linguagem matemática para escrever, impossibilitando-a de desenvolver expressões e noções matemáticas através de formas descritivas que substituem, a priori, certos termos próprios da linguagem matemática, evidenciada pela complexidade dos símbolos. É relevante ressaltar que o pensamento se dá por meio de palavras e não de símbolos, necessitando passar pela experimentação do material para a posterior verbalização, tanto oral quanto escrita, chegando, finalmente, ao processo da linguagem simbólica (FERNANDEZ, apud KLÜSENER, 2001).

Para Danyluk (1991), é essencial entender o sentido da alfabetização matemática. Para ser alfabetizado em Matemática é preciso entender o que se lê e escreve, o que se compreende das primeiras noções de aritmética, geometria e lógica, não esquecendo a dimensão social e cultural desse processo, a qual busca o significado do ato de ler e de escrever, presentes na prática cotidiana.

Nesse sentido, o PCN+ aponta que a compreensão da linguagem matemática faz parte do aprendizado em Matemática e aprendê-la, contextualizada, exige a apropriação de sua linguagem específica. Além disso, a promoção da interação e da prática dessa linguagem favorece a formação da autonomia comunicativa do aluno.

No que diz respeito ao ensino da Matemática, Machado (1998) afirma que uma das questões mais cadentes é a conveniência da utilização de um sistema de signos de um modo predominantemente técnico, operacional, restrito a regras sintáticas, em contraposição a um uso que privilegie o significado dos elementos envolvidos. A grande maioria das pessoas garante a suficiência da técnica operatória para os indivíduos que não se tornarão especialistas no assunto. Para estes, é natural utilizar o sistema simbólico da Matemática automatizado, sem uma compreensão mais profunda do modo como funciona. Outros ressaltam a importância de um entendimento global do significado dos elementos e processos envolvidos no sistema. Contudo, não se considera que a questão proposta conduza a uma opção dicotômica, trata-se de uma questão de ênfase ou prioridade. Assim, há casos na aprendizagem em que percebemos a necessidade de um período inicial em que haja preponderância da técnica para posteriormente atingir-se uma compreensão mais profunda de significado do que já foi realizado muitas vezes mecanicamente. Com efeito, tal prioridade é plenamente compreensível na aprendizagem de um código, de uma linguagem formal ou de um jogo.

No que se refere às implicações educacionais na área da Matemática, Klüsener (2001) afirma que muitos estudantes não conseguem transpor as dificuldades, fracassam e acabam abandonando a escola. Outros, mesmo continuando, não conseguem superar o analfabetismo matemático, que para Cordobán (apud Klüsener, 2001, p.179) significa “conhecer e distinguir os números e talvez as quatro operações aritméticas, mas ser incapaz de uma análise crítica ou de tirar conclusões a partir de informações numéricas”. E alguns estudantes, apesar de serem incapazes de lidar com as noções elementares da Matemática, chegam a alcançar um alto nível de escolarização.

Além disso, Kline (1976) aponta outros tipos de problemas, referentes a imprecisão da linguagem, e exemplifica por meio do exemplo abaixo:

> O símbolo 7 não é um número, porém o símbolo de um número. Outros símbolos para o mesmo número são 3+4, 5+2, 8-1, e muitos mais. Espera-se que os estudantes aprendam estar lidando com numerais ao invés de com números (p. 83).

Evidentemente, muitos alunos não fazem essa distinção. Para eles, o símbolo 7 é o número sete, e não o numeral que representa tal número. Tampouco percebem que outros símbolos podem indicar este mesmo número. Porém, visto que a ineficácia do ensino ocorre por muito menos que a distinção entre número e numeral, mas por fatores como o analfabetismo matemático, muitos professores já não esperam que a maioria dos estudantes aprenda tais distinções da linguagem.

Kline (1976) ainda menciona outros exemplos, em que a distinção entre número e o símbolo que o representa – numeral – se faz absolutamente necessária, embora na prática, nem sempre ocorra. Ele cita :

> Para indicar a necessidade de distinção, os textos modernos dão o seguinte exemplo. Pode-se dizer que o número 343 contém três dígitos. Mas 343 = 7^3. Por conseguinte, poder-se-ia dizer que 7^3, que é o mesmo número, contém três dígitos. A declaração original devia ter sido o numeral 343 contém três dígitos (p. 83).

Isso apenas colabora para que se perceba o quanto a linguagem utilizada na sala de aula pode apresentar problemas na comunicação e no entendimento entre professor e aluno. Com isso, a situação educacional se agrava ainda mais, pois além de enfrentar os problemas de compreensão da própria Matemática, ainda existem aqueles referentes à linguagem matemática empregada na sala de aula.

De maneira geral, o ensino de Matemática deve ser considerado como de interesse geral, não podendo permanecer restrito ao universo dos especialistas. Além disso, é fundamental considerarmos a absoluta necessidade da mediação da língua no ensino de Matemática, especialmente no que se refere à comunicação oral, que, emprestada da língua materna, funciona como um degrau natural na aprendizagem da escrita. Também, é imprescindível aceitar o fato de que não se deve fugir das abstrações, supervalorizando o concreto, bem como compreender que lidar com abstrações não é característica exclusiva da Matemática. (MACHADO, 1998).

Frente aos aspectos mencionados, transparece a necessidade de resgate da proposta de tarefas que envolvem as diferentes expressões da linguagem no desenvolvimento dos conceitos, noções e do pensamento matemático. Contudo, a compreensão da linguagem matemática será possível à medida que a língua materna for utilizada de maneira adequada, visto que as informações matemáticas, geralmente, chegam através de linguagem oral ou gráfica (KLÜSENER, 2001).

Todavia, não há receitas prontas para promover a capacidade de pensar e aprender. É necessário conscientizar os alunos acerca da importância e da utilidade dos conhecimentos, a fim de que possam se desenvolver gradativamente com base em suas próprias necessidades. Isso porque eles podem repetir fórmulas, símbolos, leis ou conceitos em toda sua exatidão, mas serem incapazes de entender seu significado. Esse tipo de aprendizagem não terá grande utilidade, pois não conseguirão aplicar tais conhecimentos em situações reais dentro ou fora da escola. Por outro lado, quando desenvolverem a capacidade de pensar e encontrar soluções para os problemas, terão aprendido a aprender e poderão buscar seus próprios conhecimentos.

3.4 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA SIMBOLOGIA MATEMÁTICA

Neste subcapítulo, a intenção não é fornecer uma análise minuciosa de todos os aspectos que envolveram o desenvolvimento da simbologia matemática na Teoria dos Conjuntos ou nas funções, mas acredito que uma contextualização histórica pode ajudar na compreensão do surgimento de muitas dificuldades enfrentadas atualmente.

No decorrer da história, a busca de uma linguagem universal ocupou a atenção de muitas mentes brilhantes. Na visão de Silva (2004), discorrer a respeito do desenvolvimento da Lógica Simbólica sem analisar a evolução da Teoria dos Conjuntos seria um pouco artificial, visto que as fronteiras destas áreas se entrelaçam historicamente. Nesse sentido, Moore (apud Silva, 2004) observou que:

> a fronteira entre a Lógica e a Teoria dos Conjuntos é alguma coisa porosa, encorajando o intercâmbio em ambas as direções, já que a noção de classe ou conjunto pertence naturalmente a ambos os lados da fronteira (p.1).

De acordo com alguns historiadores, a criação da Lógica Simbólica foi atribuída à Leibniz, em 1680. Todavia, existe um contra-senso indicando que antes de 1903, nada foi publicado sobre o pensamento de Leibniz a respeito da Lógica Simbólica. Há, também, algumas hipóteses de que Lambert e Boole tenham sofrido influência, direta ou indireta, do trabalho de Leibniz (SILVA, 2004).

Segundo a autora, Leibniz objetivava construir uma linguagem universal, contudo a procura por tal linguagem foi uma tarefa empreendida por muitas pessoas no século XIX, como por Frege, no século XX, repercutindo em certas linguagens de computador. Além de buscar o universalismo, Leibniz propôs um cálculo para raciocinar, que, evidentemente, exigia o estabelecimento de um simbolismo apropriado, denominado por ele de "*Calculus ratiocinator*". O fato de muitos conceitos serem compostos, como coleções ou conjunções de outros conceitos mais simples, motivou o cálculo simbólico de Leibniz, cuja simbologia compreendia letras, linhas e círculos, que representavam conceitos e suas relações. Assim, sua lógica é denominada de "intencional", visto que seus termos denotam propriedades ou conceitos em lugar de objetos que têm estas propriedades. A autora exemplifica suas idéias afirmando que:

> O que Leibniz simbolizava por **A B**, podemos escrever em notação moderna como A = B, isso significava que todos os conceitos compondo o conceito A também estavam no conceito B e vice-versa. Outro exemplo que pode ser citado é a sua notação A B C, para indicar que o conceito em A e aquele em B constituem totalmente o conceito em C. Isto pode ser escrito, com a notação atual, da seguinte forma: A + B = C ou A B = C. E preciso lembrar que **A, B e C** representam os conceitos ou propriedades e não os objetos individuais. Além disso, Leibniz usou também a justaposição dos símbolos

> dos termos da seguinte maneira: AB C, que se pode escrever, modernamente, como A x B = C ou A B = C (SILVA, 2004, p.2).

Ainda na visão de Silva (2004), no século XIX, as grandes contribuições para o desenvolvimento da lógica foram Boole e De Morgan. A respeito dessas contribuições, Silva (2004, p.3) comenta que Boole:

> [...] usou letras maiúsculas para representar as extensões dos termos, e as referia como classes de coisas. A classe universal ou termo, ele chamou de o Universo, representando pelo símbolo “1”, e utilizou o símbolo “O” para a classe vazia. As notações que se seguem são todas devidas a Boole: “AB” para representar a intersecção; “A+B” para representar a união disjunta (elementos que estão em A ou B); “vA” para representar algum elemento de A.

Boole almejava construir uma lógica como uma ciência normativa do raciocínio, assim fez uma apresentação sistemática, mas não axiomática. Já Augustus De Morgan, um pouco à frente, descobriu a lógica das relações, sendo o primeiro a empregar o termo “Lógica Matemática” para diferenciar da lógica filosófica (SILVA, 2004).

Peano esforçou-se muito buscando obter uma linguagem formal para a lógica matemática, da mesma forma, Russell pretendeu alcançar tal linguagem, tempos depois. Em 1889, com seu trabalho intitulado *“Arithmetices principia: nova methodo exposita”*, Peano conseguiu, atingir uma análise completa das operações da lógica, reduzidas a um número muito limitado de símbolos: $\in$, $\supset$, = , $\cap$, $\cup$, - , C (PEANO, apud SILVA, 2004, p.3).

Russell, por ocasião do Congresso Internacional de Matemática em Paris, no ano de 1900, encontrou Peano e, tomando conhecimento de seu trabalho, passou a adotar grande parte de sua notação. Ele intentava alcançar expressões matemáticas mais precisas por meio do uso de símbolos. Além disso, buscava resolver, com a teoria dos tipos, todos os paradoxos da Teoria dos Conjuntos. Ainda que não tenha alcançado seus objetivos, como mostrou Gõdel, a dimensão e a relevância de sua obra mereceram estudos aprofundados como os que realizam atualmente Grattann-Guinness. De modo geral, hoje, o raciocínio matemático está baseado no princípio lógico de que qualquer afirmação matemática tem dois valores lógicos, isto é, ou é verdadeira ou é falsa. Este princípio também foi utilizado por Russell (SILVA, 2004).

Conforme Izar e Tadini (1998), "A *Teoria dos Conjuntos*, introduzida por Georg Cantor, proporcionou à Matemática uma linguagem universal, no sentido de que qualquer teoria matemática poderia ser formalizada usando as notações, a linguagem, os elementos e resultados da Teoria" (p. 1).

De acordo com Silva (2004), para Cantor,

> [...] o conjunto era um agrupamento em um todo de objetos bem distintos de nossa intuição e do nosso pensamento. Foram as necessidades oriundas da Análise, particularmente, da teoria das funções de variável real, que exigiram o surgimento da moderna Teoria dos Conjuntos (p.6).

Cantor não trabalhou explicitamente a partir de axiomas, mas a análise de suas demonstrações indica que quase todos os teoremas por ele demonstrados podem ser derivados de três axiomas:

(i) axioma da extensionalidade para conjuntos;

(ii) axioma da abstração;

(iii) axioma da escolha.

A primeira formulação explícita do axioma da abstração parece ser o axioma de Frege (1893) e que deu origem a um paradoxo conhecido como de Russell (SUPPES, 1968). Várias axiomatizações da Teoria dos Conjuntos surgiram, tentando evitar os paradoxos.

O primeiro sistema axiomático para a Teoria dos Conjuntos foi proposto por Ernest Zermelo, em 1908. Contudo esse sistema sofreu algumas modificações e hoje temos vários sistemas de axiomas para a Teoria dos Conjuntos O sistema que melhor reproduz a teoria de Cantor é de Zermelo-Fraenkel, o mais utilizado atualmente no ensino desse conteúdo (IZAR & TADINI, 1998).

Em 1926, os paradoxos da Teoria dos Conjuntos são divididos em duas classes: as lógicas ou matemáticas, e as lingüísticas ou semânticas. A primeira surge de construções puramente matemáticas; a segunda emerge do reflexo direto da linguagem que fazemos uso para falar de Matemática e Lógica (SUPPES, 1968).

Sob a visão de Suppes (1968), outros paradoxos surgiram, entretanto cada um deles apareceu por haver disponíveis, na linguagem, expressões para referir-se a outras expressões do idioma. Como conseqüência disso, Suppes considera importante distinguir o que chama de ‘objeto de linguagem’ – neste caso, a linguagem na qual falamos sobre conjuntos – e a ‘meta-linguagem’ – a linguagem que usamos para falar do objeto de linguagem. No entanto, o autor evita os paradoxos apontados, restringindo severamente a riqueza da nossa linguagem. Ele justifica que, ao se usar uma linguagem formalizada, é intuitivamente claro que existem poucas perspectivas de deduzir um dos paradoxos semânticos nesta linguagem e, assim, a situação intuitiva dos paradoxos matemáticos ou lógicos não é usualmente tão clara.

Por conseguinte, deve ser mencionado que, na visão de Suppes, é necessária uma formalização completa e rigorosa do objeto de linguagem para demonstrar fatos acerca desse objeto relacionados com a Teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

De acordo com Silva (2004), é interessante ressaltar que vários autores usavam diferentes palavras para identificar o mesmo objeto, ou seja, o conjunto, como hoje o entendemos. Cantor foi quem tornou popular a palavra *"Menge"* (em alemão), que passou a ser traduzida nas diversas línguas e, em português, como *conjunto*.

Diversos matemáticos e filósofos fizeram uso de raciocínios envolvendo conjuntos. Entretanto, Silva (2004, p.5) adverte que "na história da evolução deste conceito é necessário separar seu uso intuitivo do seu uso formal". E comenta que "no final do século XIX, não havia mais dificuldades em se falar em conjunto que apresentasse uma certa propriedade dada" (p.6).

De acordo com essa autora, uma extensa obra do grupo Bourbaki surgiu em 1939, cujo primeiro volume abordou de forma significativa a Teoria dos Conjuntos, utilizando uma linguagem rigorosa e tendo por objetivo a ênfase no conceito de estrutura, pretendendo gerar uma ampla economia de pensamento.

No que diz respeito às funções, Zuffi (1999) comenta que alguns autores indicam a existência de sinais de que os babilônicos já possuíam um "instinto de funcionalidade", que precede uma idéia mais geral de função. Já Boyer (1974) aponta indícios de idéias primárias sobre o assunto anteriores ao ano de 1361, quando Nicole Oresme descreveu graficamente um corpo movendo-se com aceleração uniforme no tempo. Contudo, seu trabalho resumia-se a aspectos qualitativos, sem utilizar idéias de medida.

Galileu Galilei colaborou para a evolução da idéia de função ao introduzir aspectos quantitativos nas suas representações gráficas, proporcionados pelo surgimento dos instrumentos de medida, os quais possibilitaram a busca por resultados emergentes da experimentação e observação. Já Descartes contribuiu ao utilizar equações em x e y, para estabelecer uma relação de dependência entre quantidades variáveis, permitindo, assim, o cálculo de uma delas a partir do valor da outra. No entanto, foi a partir dos trabalhos de Newton e Leibniz que foram propostas as primeiras contribuições efetivas para o delineamento do conceito de função (ZUFFI, 1999).

Suppes (1968) afirma que, desde o século dezoito, o trabalho de generalizar e classificar o conceito de função atraiu muita atenção dos matemáticos. A representação de funções ‘arbitrárias’ por meio de séries trigonométricas, atribuída à Fourier, enfrentou muitas oposições. Mesmo mais tarde, com os exemplos de funções contínuas sem derivadas, de Weierstrass e Riemann, os matemáticos recusaram-se a considerá-las com seriedade. O autor aponta que, ainda hoje, muitos textos de cálculo diferencial e integral não apresentam uma definição de função matematicamente satisfatória. Para ele, uma definição precisa e geral é imediata dentro do enfoque teórico de conjuntos. Uma função é simplesmente uma relação de muitos um a um, isto é, uma relação tal que qualquer elemento de seu domínio se relaciona exatamente com um elemento da imagem.

No decorrer da evolução do pensamento matemático e, mais especificamente, das idéias relativas às funções, não se pode deixar de observar a grande contribuição do matemático Euler, principalmente no que tange à linguagem simbólica e as notações que utilizamos até hoje, como, por exemplo, “f(x)” para denotar uma função de x (ZUFFI, 1999).

Outro importante fato a ser destacado, segundo Boyer (1974), refere-se ao uso do termo “função” como uma palavra-chave em Análise, pois foi na depuração desse termo que surgiu o processo de aritmetização da Análise, aparecendo Fourier com papel de destaque neste processo.

Com base no que foi mencionado, é possível observar que foram problemas como esses, que preenchiam as mentes desses e de outros pensadores, que influenciaram fortemente a elaboração do conceito de função.

De acordo com Caraça (1984), essa origem está intimamente ligada à necessidade do homem de registrar regularidades observadas em fenômenos e generalizar leis ou padrões. Assim, o conceito de função vem sendo explicitamente definido pelos matemáticos desde o século XVII, sob várias formas, mas seu ensino, até o meio do século XX, ocorria apenas na universidade.

Ainda na visão desse autor, com o movimento da matemática moderna passou-se a ensinar funções para estudantes a partir dos dez anos de idade. No Brasil, mais especificamente, isso aconteceu entre 1955 e 1970. Muito do formalismo Bourbakiano impregnou o ensino de funções nessa época, ignorando razões que determinam o surgimento do conceito de função, tais como: a necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar.

Devido à impossibilidade de os alunos de menos de quatorze anos atingirem o nível de formalidade necessário, pela falta de maturidade em termos cognitivos, as funções passaram a ser ensinadas apenas a partir da oitava série. Hoje, de modo geral, os livros didáticos e o ensino destacam a concepção de função como uma expressão analítica e a introdução do conceito é feita pelo conjunto de pares ordenados e como caso particular das relações (TINOCO, 2001).

3.5 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Sempre que trabalhamos no campo da Educação Matemática, seja ensinando ou pesquisando, nos apoiamos em representações para comunicar as abstrações matemáticas que ocorrem em nossos pensamentos. Isto acontece porque os objetos matemáticos não são palpáveis, mas estruturas ou relações que podem expressar situações diversas. Assim, no ensino e na aprendizagem da Matemática, se faz mister considerar diferentes formas de representação para este objeto (NEHRING, 1996).

Para compreender melhor o termo “registro de representação” considero necessário conhecer um pouco mais sobre a trajetória de Raymond Duval, adentrando, em seguida, na teoria dos registros de representação.

Em sua extensa produção, Duval abordou, essencialmente, o funcionamento cognitivo na atividade matemática e nos problemas de sua aprendizagem. Ele trabalhou sobre a utilização específica da língua materna nos procedimentos matemáticos, além da compreensão de textos de matemática e da aprendizagem de diversas formas de raciocínio e argumentação. Em seu estudo sobre as diferentes representações mobilizadas pela visualização matemática, ele construiu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento no que diz respeito à mudança de registros de representação semiótica. Assim, sua teoria dos registros de representação mostra-se, atualmente, como um importante instrumento de pesquisa no estudo da complexidade da aprendizagem de Matemática. Isto porque, segundo Duval, uma análise do conhecimento matemático é, essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento (MACHADO, 2003).

Segundo Duval (apud Machado, 2003), o raciocínio utilizado em Matemática está intimamente ligado ao uso das representações semióticas, fazendo com que toda comunicação em Matemática ocorra com base em tais representações. Com isso, a abordagem cognitiva utilizada por ele, intrinsecamente ligada ao raciocínio e à visualização matemática, tem sido adotada em muitas pesquisas, embasando trabalhos no que se refere à aquisição do conhecimento matemático e à organização de situações de aprendizagem desses conhecimentos.

3.5.1 A Teoria dos Registros de Representações Semióticas

Este subcapítulo intenta aprofundar a compreensão das representações semióticas, enfocando a idéia dos registros de representação, visto que o ensinar matemática requer o entendimento desses diferentes registros.

Duval (2003) inicia a explanação de sua teoria dizendo que a abordagem cognitiva é original na medida em que busca descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos na sala de aula. Além disso, o autor ressalta a diferença entre a atividade cognitiva exigida pela matemática e aquela exigida por outras áreas do conhecimento, em duas características:

A primeira se refere à relevância das representações semióticas, tendo por base o desenvolvimento histórico de tais representações como condição primordial para a evolução do pensamento matemático. Esse fato, apontado por Duval, também pode ser observado na recapitulação histórica feita anteriormente, na qual podemos observar que a busca por uma linguagem universal propiciou tal evolução. Nesse sentido, a história apresenta inúmeros exemplos em que determinadas noções somente alcançaram um certo nível de desenvolvimento a partir da criação de uma notação apropriada. Além disso, para o autor “O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar” (DUVAL, 2003, p.14), visto que os números, assim como os outros objetos matemáticos, não são observáveis com o auxílio de instrumentos.

A segunda característica está ligada ao fato de existir uma grande variedade de representações semióticas utilizadas na Matemática, como os sistemas de numeração, figuras geométricas, representações gráficas, escritas algébricas, além da língua materna. Desta forma, para se referir a esses diferentes tipos usados em Matemática, Duval fala em registro de representação.

Duval (2003) ainda comenta que:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação (p.14).

Portanto, seguindo sua linha de raciocínio, fica evidente, que a compreensão discente em Matemática pressupõe que os alunos sistematizem pelo menos dois registros de representações semióticas. E é, justamente, a aquisição desta sistematização um ponto chave no surgimento das dificuldades discentes em Matemática.

Para entender melhor e analisar o funcionamento cognitivo da compreensão é necessário estabelecer a diferença entre os dois tipos de transformação de representações semióticas: o “tratamento” e a “conversão”.

O que Duval (2003) chamou de “tratamento” significa transformar uma representação semiótica em outra **permanecendo num mesmo sistema**, como, por exemplo, resolver uma equação. O resultado obtido na resolução da equação é uma representação semiótica que sofreu uma transformação (tratamento) passando de "equação" para "resultado da equação". Por outro lado, a "conversão" significa transformar uma representação semiótica em outra, **mudando de registro e conservando os mesmos objetos denotados**. Um exemplo de conversão é a passagem da escrita algébrica de uma equação para a sua representação gráfica. Neste caso, a representação gráfica da equação simboliza sua escrita algébrica convertida numa representação semiótica diferente. Em outras palavras, a representação de uma função, como, por exemplo, $y = 2x - 1$ no plano cartesiano é uma atividade de conversão, enquanto resolver uma equação do tipo $2x - 1 = 5$ é uma atividade de tratamento.

Nesse sentido, Duval (apud Nehring, 1996) menciona que a representação semiótica possui o papel fundamental de mostrar através de

> um sistema particular de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras de um objeto matemático... onde existe diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações semióticas: **forma** (ou representante) e **conteúdo** (ou representado) (p.53).

Desta maneira, Nehring (1996) ressalta a importância dessa afirmação, visto que o tratamento dos conhecimentos depende da forma e não do conteúdo envolvido, pois

> Para se representar a metade de um inteiro podemos usar a forma decimal (0,5) ou a forma fracionária (1/2). Porém quando o aluno representa o valor metade de um inteiro, o registro de representação 0,5 é mais facilmente compreendido do que o registro de representação ½ (pensando principalmente na realidade brasileira, onde o uso do número decimal é mais utilizado que o fracionário). Ou seja, o tratamento estabelecido para os números racionais na representação decimal é mais facilmente construído pelos alunos do que a representação fracionária, principalmente quando representamos usando frações, números maiores que um inteiro (P.e. 17/5). Não podemos esquecer que a única mudança nestes dois registros (decimal e fracionário) foi a **forma** de sua representação e não o **conteúdo** representado (p.54).

A conversão realizada entre as representações semióticas desse exemplo ocorre quando o aluno observa que 0,5 = ½, pois, para Nehring (1996, p. 54), “Converter uma representação é mudar a forma pela qual um conhecimento é representado”, lembrando que, no exemplo acima, a diferença entre as representações da metade de um inteiro está na forma e não no conteúdo representado.

Sob a perspectiva matemática, a conversão interfere apenas na escolha do registro no qual serão efetuados tratamentos mais econômicos ou potentes, ou ainda, para dar suporte aos tratamentos efetuados através de um segundo registro obtido pela conversão. Moretti (2002, p.346) exemplificou essa economia de tratamento na determinação do denominador da expressão abaixo:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{?}$$

De forma que a solução do problema pode tornar-se simplória ao converter a forma fracionária para a forma decimal:

$$0,5 = 0,250 + 0,125 + 0,100 + 0,20 + ?$$

E assim, sem muita dificuldade se obtém 0,005 ou, convertendo para forma fracionária 1/200. Nesse sentido, a conversão é considerada como se fosse uma atividade lateral, óbvia e prévia à “verdadeira” atividade matemática. Por outro lado, sob o ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que surge como principal atividade de transformação representacional, conduzindo aos mecanismos subjacentes à compreensão (DUVAL, 2003).

Portanto, nota-se que uma das principais características da atividade matemática é a mobilização obrigatória de uma diversidade de registros de representação semiótica. Contudo, Duval (2003) salienta que raramente essa diversidade é considerada no ensino. Muitas abordagens didáticas não levam em consideração que existe uma grande variedade de registros de representação de um mesmo objeto matemático, e que a articulação desses diferentes registros é condição essencial para o entendimento matemático. Isso porque cada registro de representação de um mesmo objeto possui diferente conteúdo ou propicia uma representação parcial em relação aquilo que ela quer representar, sendo fundamental a compreensão e articulação de todos esses registros para alcançar uma visão total e multifacetada do objeto analisado.

Para clarear o entendimento acerca do que foi mencionado, consideremos o exemplo apresentado por Moretti (2002, p. 347) sobre as diferentes representações de uma mesma parábola:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y + 1 = (x - 2)^2$

c) $y = (x - 3)(x - 1)$

d) esboço da parábola no plano cartesiano

Apresento abaixo o esboço da parábola no plano cartesiano para melhor ilustrar o exemplo dado por Moretti:

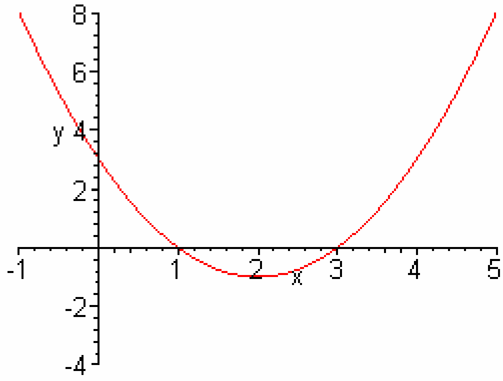


Figura 2 - Esboço da parábola

Cada um dos registros de representação apresentados acima tem, em sua totalidade, as mesmas informações do objeto matemático dado. Entretanto, sob o ponto de vista cognitivo, cada forma de representar a parábola evidencia um certo tipo de informação. Por exemplo, no item b, obtemos claramente as coordenadas do vértice da parábola; no item c é possível identificar as raízes; o item d mostra uma representação em um sistema semiótico diferente dos itens anteriores e que, se for o caso, pode ser muito apropriada para interpretação do fenômeno representado. Porém, neste último item, não vemos com precisão o valor de y correspondente a x= $\sqrt{2}$, por exemplo, e precisamos recorrer a uma das formas anteriores para obtê-lo (MORETTI, 2002).

Com isso, no que tange à pluralidade das representações, Duval (apud Moretti, 2002) afirma:

> As representações diferentes de um mesmo objeto, não tem evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a conseqüência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado (p.347).

Assim, de acordo com Moretti (2002), fica evidente que para um determinado conceito em Matemática não há uma representação suficientemente boa para conduzir à sua compreensão. Portanto, “a conceitualização implica em uma coordenação de diferentes registros de representação” (Ibidem, p.348).

Duval (apud Moretti, 2002), baseado nas idéias de Piaget e Vygotski, diz que o desenvolvimento das representações mentais acontece como uma interiorização das representações semióticas. Além disso, Moretti (2002) coloca que as capacidades cognitivas do indivíduo são aumentadas pela possibilidade de diversificar a representação de um mesmo objeto, e por conseqüência, potencializa suas representações mentais. Essas colocações nos remetem às idéias preconizadas por Pierce a respeito do signo, apresentadas anteriormente. Nas palavras de Peirce (2000, p.46), “Um signo, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém”. Este “algo”, mencionado por Pierce, é a coisa representada, o objeto. O signo desse objeto cria na mente interpretadora um outro signo que traduz o significado do primeiro, chamado “interpretante”. Em relação a esta apresentação de Peirce, Duval (apud Moretti, 2002) afirma:

> Observemos que esta definição minimalista vale também para as imagens mentais quanto para os signos (os símbolos matemáticos), ou para as fotografias e as palavras da língua! Esta definição em razão de sua generalidade, não faz diferença entre o que é mental (por exemplo, lembrar-se de ...) e o que é material (fotografias tomadas com a ajuda de um auto-foco). Esta definição pode parecer pobre mas ela permite prontamente distinguir a REPRESENTAÇÃO e o OBJETO que ela representa. É esta distinção, e não somente a noção de representação que é fundamental para a análise do conhecimento, uma vez que ela mostra imediatamente duas questões: relativas a sua relação e a sua não confusão (p.348).

Com isso, Duval formulou sua hipótese fundamental de aprendizagem que coloca a compreensão total de um conceito na coordenação de, ao menos, dois registros de representação e essa coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva da conversão. Esta idéia é ilustrada por Duval (apud Moretti, 2002, p.349) na figura 3 abaixo:

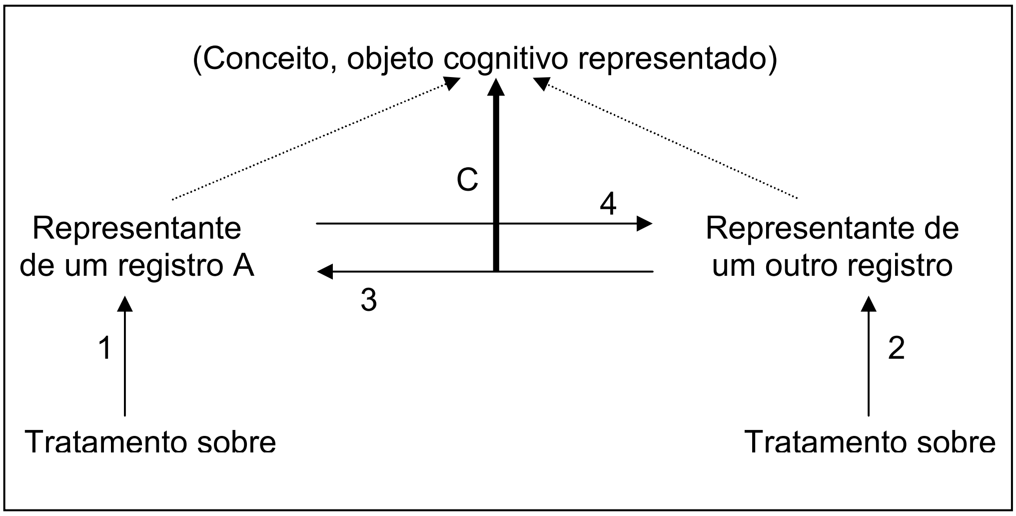


Figura 3 – Esquema de Duval

Para Moretti (2002), nesse esquema está retratado o caso mais simples de coordenação entre dois registros de representação, em que as flechas 1 e 2 são transformações internas – tratamentos – e as flechas 3 e 4 são transformações externas – conversões. A flecha C indica o que Duval chamou de compreensão integrativa de uma representação que supõe uma coordenação de registros. E, por fim, as flechas pontilhadas indicam a distinção de Saussure entre representante e representado.

Sendo assim, e visto que os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática concernem à mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações, é primordial desenvolver um método que permita observar verdadeiramente esses fenômenos nas produções dos alunos. Para tal, Duval (2003) sugere a necessidade de “distinguir cuidadosamente o que sobressalta no tratamento em um registro e aquilo que sobressalta em uma conversão” (p.24), ou seja, é preciso analisar se trata-se de uma mudança de registros ou uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes (DUVAL, 2003).

3.5.2 Os Registros de Representação e a Sala de Aula

Entendemos, a partir do que foi visto, que o aprendizado da Matemática e, conseqüentemente, a formação dos conceitos relacionados a esta Ciência, presumem que o aluno consiga atribuir significado a sua linguagem, de forma que os registros ou formas de representação dos conceitos permitam que ele possa diferenciar, relacionar, comparar, visualizar, substituir, interpretar, construir e analisar soluções de problemas relacionados aos diversos objetos matemáticos, em um sistema de comunicação comum a este conhecimento (SOUZA; CORDEIRO; MORETTI, 2004).

Para estes autores, o domínio das diferentes linguagens é inerente ao ensino e à aprendizagem de Matemática, de forma que os registros de representação, desde os desenhos até a escrita algébrica, se fazem essenciais no processo de evolução dos conceitos discentes. Além disso, nós, docentes, necessitamos compreender melhor como se processa a relação entre registros de representação e a sua utilização como ferramenta na construção de conceitos e na resolução de problemas dentro do cotidiano escolar.

Analisando essa relação entre os registros de representação e a sua utilização como ferramenta na construção de conceitos, é possível observar que é por meio da interpretação e manipulação das informações expressas em diversas linguagens que o aluno tenta traduzir essas informações naquelas que lhe são familiares, fazendo delas ferramentas no tratamento da situação para chegar à solução do problema proposto. Assim, ele desenvolve seu conhecimento acerca dos objetos matemáticos a partir do domínio das diferentes linguagens referentes a esse objeto, as quais se convertem em ferramentas do pensamento (SOUZA; CORDEIRO; MORETTI, 2004).

Nesse sentido, Danyluk (1998) comenta que as formas de representação dos conceitos utilizadas em Matemática são impregnadas de significados, os quais exigem uma interpretação de propriedades e relações entre estruturas conceituais a fim de serem compreendidos.

Por conseguinte, é possível observar que a compreensão discente dos diferentes registros de representação, os quais são carregados de significados, colabora para a formação de um conceito matemático. Neste sentido, Astolfi (apud Souza, Cordeiro e Moretti, 2004) afirma que a utilização de símbolos significa mais do que a aplicação mecânica de um código, mas a criação de uma variedade de formas de representação dos resultados, além de um convite à reflexão sobre o valor de cada registro e a clareza de seus significados para o indivíduo. Dessa forma, a articulação e a familiaridade com os diferentes registros de representação de determinado objeto matemático permitem que os objetos passem a ser utilizados como instrumentos na resolução de problemas.

A respeito disso, observemos um exemplo citado por Maranhão e Igliori (2003, p. 60-61) que explicita a dificuldade discente no entendimento da conversão de dois registros:

> [...] como ilustra a resposta dada pela estudante Elaine: 0,25 ≠ ¼ e ¼ = 0,25. Num sentido (¼ = 0,25) ela identificou as duas representações como de um mesmo número. Creditamos a isso, a utilização da regra conhecida para essa conversão (dividir 1 por 4). Na resposta 0,25 ≠ ¼, parece que aluna não tinha `a sua disposição uma regra para a conversão de 0,25 para 25/100 (congruente) que só exigiria o tratamento (simplificação), nesse registro, para chegar a ¼.

Nesse sentido, Souza e Cordeiro (2002) mostram que o uso de conversões entre diferentes registros de representação nem sempre é utilizado como estratégia prioritária pelos estudantes. Contudo, se o professor tornar familiar para os alunos o trânsito entre os registros, poderá provocar uma mudança de estratégias, fazendo com que eles passem a utilizá-los mesmo em situações em que é permitido escolher outras ferramentas para resolver o problema.

No que tange à compreensão conceitual e ao domínio cognitivo, Vizolli (2003) explicita a existência de uma grande insatisfação docente, além das constantes reclamações discentes em relação à Matemática. O autor afirma que um número significativo de professores trabalha em suas aulas com apenas um registro de representação do objeto matemático estudado, dificilmente articula os conteúdos já trabalhados e raramente leva em conta os conhecimentos prévios dos estudantes. Desta forma, a tendência discente é fazer cálculos mecânicos, operando matematicamente com os números do enunciado, sem relacioná-los com as informações apresentadas.

A respeito disso, lembramos um exemplo apresentado por Moretti (2002) no qual o estudante deve passar uma frase (enunciado do problema) em língua corrente para uma fórmula (em linguagem matemática):

> Um homem tem 23 anos a mais que seu filho, 31 anos a menos do que seu pai. A soma das idades das três pessoas é 119 anos. Calcule as idades. (p. 350)

De acordo com Moretti, para resolver esse problema o aluno pode montar sua estratégia designando H para idade do homem e F para idade do filho, escrevendo uma equação congruente com a primeira frase (*Um homem tem 23 anos a mais que seu filho*):

> H – 23 = F (A idade do homem menos 23 anos é igual à idade do filho)
> Ou ainda:
> H = F + 23 (A idade do homem é igual à idade do filho mais 23 anos).
> (Ibid., p. 350).

O interessante, nesse caso, é que as três frases dizem o mesmo, ou em outras palavras, possuem a mesma referência. No entanto, Moretti alerta que

> a equação H + 23 = F
>
> H: um homem
> +23: tem 23 anos a mais
> =F: do que seu filho
>
> que é semanticamente congruente com a primeira frase do enunciado e que não tem a mesma referência com esta mesma frase corre o risco de se impor como a sua descrição algébrica e conseqüentemente explicar o insucesso de muitos alunos na resolução deste problema. (Ibid., p. 350).

A respeito desse mesmo tipo de situação, Vizolli (2003) sugere que a conceituação ocorra por meio da utilização de diferentes registros de representação, partindo do entendimento do sentido e do significado operatório. Para Duval (apud Vizolli, 2003), o sentido significa o universo, a amostragem, as grandezas, além dos aspectos relacionados ao contexto da situação proposta, e o significado operatório refere-se às quantidades, à incógnita, ao tratamento e a conversão.

Nesse sentido, Vizolli (2003) comenta:

> Em relação ao sentido, há que se levar em consideração, o conteúdo social da situação em discussão e as grandezas, contempladas pelas quantidades e pela incógnita, isto porque, nem sempre as representações referem-se ao conceito matemático. No que se refere ao significado operatório, podemos destacar o tratamento matemático adotado na resolução do problema proposto (p.3).

E complementa ao afirmar que:

> Na articulação entre diferentes registros de representação evidencia-se o sentido e o significado operatório. Essa articulação é fundamental para adoção do tratamento matemático e para responder à pergunta feita no enunciado do problema (p.3).

Portanto, de acordo com que foi mencionado, a compreensão de um conceito se torna possível somente levando-se em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e o trânsito entre os diferentes registros de representação.

Um outro aspecto a ser considerado diz respeito ao alerta feito por Maranhão e Igliori (2003), em que afirmam que considerar as respostas discentes como certas ou erradas não tem valor numa perspectiva cognitiva, pois o aluno pode fornecer o resultado matematicamente correto, sem mobilizar coerentemente as unidades cognitivas específicas do funcionamento de um, entre dois, dos registros que se apresentam. Para as autoras, essas unidades são "as variáveis que permitem determinar as *unidades pertinentes de significado*, que devem ser levadas em conta em cada um dos dois registros, para a análise de sua coordenação, na realização de uma tarefa" (p.61). Para ilustrar essa situação, cito um exemplo apresentado por Catto (apud Maranhão e Igliori, 2003, p.61-62), em que um aluno do Ensino Médio resolveu a tarefa "Calcule $(3/2)^{-2}$" da seguinte forma:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = (1{,}5)^{-2} = \left(\frac{1}{1{,}5}\right)^{2} = \frac{1}{2{,}25}$$

Matematicamente, o resultado está correto. Entretanto, podemos observar que, primeiro, o aluno efetuou a divisão de 3 por 2 convertendo a forma fracionária para decimal. Cognitivamente, para ele o traço de fração indicava uma divisão. Porém, mesmo tendo aplicado corretamente as regras da potência e chegado à resposta certa, deve ser salientado o fato de que este estudante dividiu o numerador pelo denominador, ambos números inteiros, mas não efetuou a divisão quando um deles não era inteiro. Isso mostra que o próprio aluno não consegui manter o significado atribuído ao traço de fração. No caso dessa análise, o traço de fração foi associado à operação divisão como *unidade pertinente de significado*, para mostrar que a sua utilização de modo não consistente aponta para um problema do ponto de vista cognitivo, o que implica a não-coordenação dos registros (MARANHÃO e IGLIORI, 2003).

Assim, podemos perceber que a teoria dos registros de representação elaborada por Duval, no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática, enfoca as especificidades do sujeito que aprende (MARANHÃO e IGLIORI, 2003). E com isso, entendemos que os registros de representação de um objeto matemático possuem uma rede de relações, outras formulações e outras imagens mentais que, se forem familiares para os aprendizes, propiciam a evolução de suas concepções acerca do objeto matemático. Portanto, os sujeitos que conseguem operar com a mudança de registros de representação, possivelmente ampliam sua significação do objeto.

Após apresentar o embasamento teórico que sustenta esse trabalho de pesquisa, considerei necessário explicar as razões pelas quais adentrei o campo da semiótica e da lingüística, bem como, a relevância de apresentar uma breve recapitulação histórica acerca do surgimento e da evolução da simbologia.

Quando eu buscava sustentação para o trabalho, senti necessidade de compreender um pouco mais sobre signo, precisando, assim, entender as idéias de Peirce e Saussure. Contudo, como esse tema fugia da minha área de compreensão, precisei entender as diferenças das idéias desses dois estudiosos, para somente então compreender que o suporte necessário para meu trabalho encontrava-se mais nas idéias de Peirce.

Nesse momento, entendi que, para ficar claro ao leitor as razões de ter penetrado nas fronteiras da semiótica peirceana, eu deveria mostrar, da mesma forma que enxerguei, que a lingüística de Saussure se distanciava da proposta desse trabalho.

No que tange a evolução histórica da simbologia, sua importância está, justamente, em mostrar que seu desenvolvimento histórico foi condição primordial para que ocorresse a evolução do pensamento matemático. Nesse sentido, a própria história apresenta vários exemplos em que determinadas noções somente alcançaram um certo nível de desenvolvimento a partir da criação de uma notação apropriada.

Assim, das idéias aqui apresentadas, no desenvolvimento do trabalho foi mais evidenciada a teoria dos registros de representação, apoiada na semiótica e na evolução histórica da simbologia matemática. Da mesma forma, o olhar mais amplo e geral sobre a linguagem serviu como suporte na compreensão das especificidades da linguagem matemática dos alunos.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

O presente capítulo traz os dados coletados na realização da pesquisa com os alunos, juntamente com a análise do que foi obtido a partir de cada um dos instrumentos. Para tal, este capítulo foi dividido em três subcapítulos, os quais apresentam a descrição das observações, os dados coletados no teste e nas entrevistas.

Assim, o primeiro subcapítulo conduz à uma descrição do que foi observado em sala de aula, primeiramente analisando aspectos mais gerais, mapeando a realidade a ser estudada, e, em seguida, partindo para pontos mais específicos da pesquisa.

Após a descrição desses fatos, apresento, no segundo subcapítulo, os dados coletados por meio do teste, justificando o objetivo de cada uma das questões e prosseguindo com uma contagem de acertos com base nas respostas fornecidas pelos estudantes. A partir dessa contagem foi possível elaborar um quadro percentual das questões, que permite melhor visualização do resultado geral obtido no teste. Ainda com base nesse instrumento, comento alguns resultados de cada questão, exemplificando quando necessário. O fechamento deste subcapítulo ocorre com uma análise geral dos registros de representação envolvidos, salientando aspectos em que o aluno dispõe de boa habilidade para lidar com um determinado registro, mas comete erros ao transitar entre as diferentes representações.

Finalmente, o terceiro subcapítulo, relativo às entrevistas individuais, expõe as justificativas da classificação e escolha dos alunos selecionados. Em seguida, parte-se para a explanação dos objetivos de cada questão proposta, apresentando, juntamente, uma análise das respostas dos estudantes.

4.1 DESCRIÇÃO DAS OBSERVAÇÕES

A descrição das observações feitas em sala de aula inicia pelos aspectos gerais, detalhando o ambiente e mapeado a realidade da turma. Em seguida, parte em direção ao foco desta pesquisa, ou seja, aos registros de representação e sua utilização em aula. Optei por descrever os fatos intercalando-os com falas dos participantes ou registros no quadro-verde, feitos pela professora ou pelos alunos. Procurei observar os aspectos físicos do local e a influência dos mesmos nas aulas; os ruídos internos ou externos à sala de aula; o tipo de conteúdo desenvolvido e o modo como foi apresentado, atentando principalmente para o tratamento dado aos registros de representação em Matemática; a forma como ocorre a relação entre a professora e os alunos; a postura da professora diante das dificuldades dos alunos, bem como a conduta dos aprendizes. A partir desses focos de observação, pude mapear a realidade encontrada e analisar o desenvolvimento das aulas sob um olhar mais abrangente, percebendo o todo a partir de uma visão multifacetada.

A sala de aula é bem iluminada, com espaço suficiente para que a professora circule entre as mesas dos alunos, com um único ventilador de teto na parte central. Possui um quadro-verde em praticamente toda extensão da parede, e a distribuição das mesas é feita de forma que os alunos sentem-se dois a dois nas laterais e três a três na parte central. Uma das paredes é envidraçada, cheia de pequenas janelas que facilitam a iluminação do local.

No início das aulas, há muita conversa e barulho, mas à medida que a professora começa a conversar com os estudantes o barulho diminui, ocorrendo maior silêncio durante as explicações. No decorrer da explanação sobre o novo conteúdo, os alunos ficam mais atentos e participativos. Algumas vezes houve interferências de ruídos externos, em geral, provenientes de outras turmas.

A turma observada é formada por trinta e sete alunos, sendo que destes, trinta e cinco alunos, aproximadamente, freqüentam as aulas. Dentre os trinta e cinco alunos, a turma divide-se entre quatorze meninos e vinte e uma meninas, com idade aproximada de quinze anos.

No início do processo de observação, quando me apresentei aos alunos, a turma mostrou-se mais quieta, característica que foi se desfazendo com o passar do tempo e após habituarem-se à minha presença na sala de aula. Creio que o trabalho em pequenos grupos favoreceu o fato de que eu passasse despercebida. Assim, o grupo, em geral, mostrou-se mais descontraído. Com isso, foi perceptível o aumento do barulho gerado pelo trabalho em grupo e pela descontração.

As aulas são, em geral, expositivo-dialogadas. No que se refere ao desenvolvimento destas, observei que os alunos copiam a matéria do quadro e participam fazendo perguntas. Algumas vezes, pedem que a professora repita as explicações. No decorrer destas, alguns alunos participam respondendo aos questionamentos da professora ou completando suas frases. As perguntas mais freqüentes são relativas ao que devem fazer com o conteúdo apresentado, como devem proceder, para que serve ou aonde irão utiliza-lo. Quando são questionados sobre seu entendimento respondem “mais ou menos”, sem muito entusiasmo. Normalmente, os exercícios são propostos logo depois da exposição do conteúdo e realizados em pequenos grupos. A professora costuma propor os exercícios explicando-os e resolvendo o primeiro, mostrando o “modelo” a ser seguido. Em seguida, coloca-se à disposição dos alunos para esclarecimentos, circulando entre as classes.

Os alunos realizam o que foi proposto, falando em voz alta os resultados encontrados nos exercícios, comparando-os e comentando-os com os colegas de grupo. A maioria dos estudantes comemora ao acertar um exercício. Algumas vezes, eles pedem auxílio aos colegas do próprio grupinho ou à professora, para que esta repita a explicação individualmente. Outras vezes, perguntam-lhe se está correto ou fazem questionamentos relacionados ao conteúdo. Quando olha os cadernos, auxiliando-os, a professora os corrige com naturalidade, sem fazer cobranças, mas ressaltando como é o certo. Com base nestes fatos, posso afirmar que um número significativo de alunos participa das aulas, a relação entre eles e a professora ocorre de maneira tranqüila, com demonstrações de afetividade e respeito.

Quando solicitados a resolver um exercício no quadro, muitos estudantes demonstram vergonha ou medo de se expor diante dos colegas. Esse medo de errar perante a turma é uma forte característica do grupo, talvez porque, durante a correção no quadro, alguns riem, falam ou fazem piadas relativas ao colega que está resolvendo o exercício. Nesse sentido, as meninas mostram-se mais a vontade na correção dos exercícios no quadro, poucos meninos aventuram-se a realizar essa atividade, quase sempre empurrados pelos colegas. Alguns deles pedem que a professora confira o resultado antes de resolverem no quadro. Assim, ainda que a professora incentive os alunos a participarem dessa maneira da correção, a maioria dos exercícios acabam sendo corrigidos por ela, pela falta de voluntários. Neste caso, ora os alunos participam da correção respondendo em coro, ora conversam sobre outros assuntos, sem participar da correção. Notei que, nas vezes em que a própria professora faz a correção dos exercícios no quadro, ela fala em voz alta perguntando e escrevendo os resultados, sendo que, algumas vezes, não aguarda a resposta da turma, perguntando e respondendo a si mesma, concluindo sozinha a tarefa. Em seguida, questiona a turma sobre a existência de dúvidas sobre o exercício que ela mesma acabou de responder. Com o intuito de ilustrar esse tipo de situação, apresento a seguir um trecho de uma das observações realizadas[3], em que a professora corrigia um exercício de Teoria dos Conjuntos.

Para fazer os registros das observações, segui o mesmo estilo utilizado por Zuffi (1999) em sua tese de doutorado, fazendo as devidas adaptações para esta pesquisa. Assim, realizei a descrição das aulas, utilizando "P" para identificar falas da professora, "A" para identificar falas de aluno, aluna ou alunos, "Q" para identificar o que foi escrito no quadro pela professora. Os comentários estão entre colchetes. Esta codificação foi utilizada em todos os registros ou fragmentos das observações.

Como exemplo inicial, trago um trecho de uma das observações:

Q: $A = \{2,3,-1,0\}$, $B = \{x \in IN \,/\, 1 \leq x < 4\}$, $C = \{x \in Z \,/\, -3 < x \leq 1\}$

a) $A \cup B =$

b) $A \cap B =$

c) $(A \cup B) \cap C =$

d) $(B \cap C) \cup A =$

[3] Tanto nos fragmentos das observações aqui apresentados, como na transcrição das entrevistas, foi reproduzida a linguagem dos alunos e da professora conservando a forma coloquial e, até mesmo, erros de linguagem.

[A turma está bastante agitada, conversando sem parar. Em seguida a professora começa a correção falando em voz alta, perguntando e escrevendo os resultados]

P: Psiu! Silêncio gente!

[A professora aponta para o conjunto B perguntando aos alunos]

P: Quem são os naturais maiores ou iguais a um e menores que quatro?

A: um, dois e três!

[Agora apontando para o conjunto C]

P: Quem são os inteiros maiores que –3 e menores ou iguais a 1?

A: -2, -1, 0, 1.

[Após resolver as letras a e b, a professora continua]

P: A união B a gente já tinha encontrado. Eu vou fazer a intersecção com C, que é -2, -1, 0 e 1 [escreve os conjuntos $A \cup B$ *e C entre chaves colocando o símbolo de intersecção entre eles enquanto fala em voz alta]*

P: ...e vai ser...

[Os alunos não respondem, conversam sobre outros assuntos, olham a explicação, porém, neste momento nada dizem sobre a correção]

P: ...-1, 0 e 1 [E a professora escreve o conjunto (resposta) no quadro]

[Em seguida ela questiona os alunos]

P: Dúvidas na c?

[Espera alguns instantes. Passa para o próximo item]

P:Quem é a intersecção de B com C?

A: um! [em coro]

P: E eu vou fazer um [referindo-se ao conjunto unitário {1} que acaba de escrever no quadro] união com [escreve o conjunto A por extensão, dizendo em voz alta seus elementos] 2,3,-1,0.

P: Então vai ser 1,2,3,-1,0 [representando por extensão o conjunto, cujos elementos falou em voz alta].

[Terminada a correção deste exercício a professora pergunta, querendo saber se entenderam ou se têm dúvidas]

P: Deu?

[Como não há resposta dos alunos vira-se para o quadro e começa a colocar o outro exercício que deve ser corrigido]

Nesse fragmento apresentado, na segunda fala da professora, é possível perceber que, ao questionar seus alunos sobre quais são os elementos do conjunto $B = \{x \in IN / 1 \leq x < 4\}$, ela já “traduz” a linguagem simbólica envolvida. Desta forma, qualquer pessoa poderia responder seu questionamento, ainda que desconhecesse o conteúdo estudado ou a linguagem utilizada para tal.

Apesar de nem sempre responder aos questionamentos da professora durante a correção, o grupo mostrou-se participativo, descontraído e interessado, ainda que muitos alunos demonstrem imaturidade, fazendo gracinhas e piadas como forma de garantir atenção. Existem dois “líderes da bagunça”, ou seja, alunos que gostam de chamar a atenção e aparecer perante a turma. Fazem brincadeiras e piadas para atrair a atenção dos colegas, conquistando os mais dispersivos. Outra característica marcante neste grupo diz respeito ao medo de se expor perante os colegas para ir ao quadro ou fazer perguntas mais ousadas. É perceptível a interação existente entre os alunos, assim como entre os alunos e a professora. Também pude notar demonstrações de afetividade e simpatia da professora para com os alunos e vice-versa.

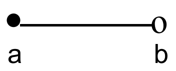
Há vários subgrupos (grupinhos), embora isso não resulte na desunião da turma. De maneira geral, os subgrupos são formados por componentes do mesmo sexo. Foi possível perceber a formação clara de oito subgrupos, em que é inegável a disputa entre os sexos. Na realização das atividades, esta disputa é ainda mais explicita. A competição ocorre na resolução dos exercícios no quadro, observando-se erros, acertos e rapidez dos competidores.

A professora demonstra ter autoridade perante a turma, mas sem ser autoritária. Não dá ordens ou faz exigências. Ela explica o conteúdo e a simbologia envolvida, dirigindo-se aos alunos de maneira informal, utilizando muito mais a linguagem coloquial, gestos e figuras de linguagem. Com isso, pressuponho que busca maior aproximação com seus alunos.

No que diz respeito aos conteúdos trabalhados em sala de aula, as observações contemplaram a realização de exercícios de Teoria dos Conjuntos; a introdução de intervalos e operações com intervalos; exercícios sobre pares ordenados, relação e função; diagramas envolvendo relação e função; introdução à função do 1º grau, zero da função e construção do gráfico da função de 1º grau; introdução de função constante e construção do gráfico da função constante[4].

Ao iniciar o conteúdo “Intervalos” a professora apresentou as possíveis notações a serem utilizadas:

Geométrica:



Algébrica:

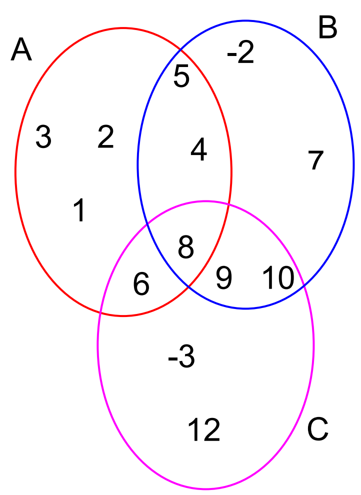
$[a;b)$ ou $[a;b[$ ou $\{x \in IR \,/\, a \leq x < b\}$

[4] Para ilustrar a forma como transcorreram as atividades em sala de aula, apresento, no apêndice A, um exemplo de observação.

Os intervalos são bem marcados pela professora com um riscado (WWWWWW) sobre o segmento que une as extremidades a e b, chamando a atenção dos estudantes para não esquecerem de “pintar o intervalo”, pois todos os valores entre “a” e “b” fazem parte do mesmo.

Na realização de exercícios complementares sobre Teoria dos Conjuntos e intervalos, alguns alunos pediram que as explicações fossem repetidas individualmente, pois não compreenderam o que deveria ser feito na atividade proposta. Outros alunos tiveram dificuldades para visualizar três conjuntos representados através de diagrama com as devidas intersecções, pois estes não apresentavam cores diferentes, visto que a folha de exercícios era uma fotocópia em preto e branco. Este fato pode ser exemplificado através de fragmentos de uma das observações realizadas, nos quais a professora corrigia um exercício deste tipo. Entre os fragmentos apresentados, inseri apontamentos importantes, interrompendo a seqüência de falas dos participantes. Outros fatos relevantes também podem ser percebidos através dos trechos apresentados abaixo.

Q:



a) $A \cup B$=

b) $A \cap B$=

c) $A \cap C$=

d) $A \cup C$=

e) $A \cap B \cap C$=

f) Os elementos que estão somente em B.

[A professora vai falando em voz alta, explicando e completando os resultados]

P: Fechou todos ali? [referindo-se ao item a]

P: A intersecção B. Quem vai?

[aponta para intersecção]

No momento em que a professora aponta para o conjunto intersecção, indicando os elementos que devem ser ditos pelos alunos, ela mesmo responde a questão.

P: Este pedacinho aqui. Entre o azul e o vermelho.

[Anota a resposta e segue]

P: E A intersecção C?

[Novamente aponta para o diagrama, na intersecção dos conjuntos A e C]

P: Este pedacinho aqui. Entre o vermelho e o rosa.

As cores freqüentemente utilizadas para facilitar a visualização dos três conjuntos representados transformam-se numa "muleta", resultando no fato já mencionado, em que os alunos demonstram dificuldades na visualização dos conjuntos quando estes não foram representados com cores diferentes. Este processo de diferenciação através das cores, quando não abandonado no decorrer do desenvolvimento do conteúdo, pode propiciar ao aprendiz a não compreensão do registro de representação (diagrama). Ou seja, isto faz com que o estudante não pense na representação em si, mas na resposta indicada entre cores que, em outro contexto, não estarão, necessariamente, indicadas. E, no momento em que não haja esta diferenciação dos conjuntos pelas cores, o aluno não enxerga os elementos da intersecção ou não vislumbra todos os elementos pertencentes a um dos conjuntos apresentados.

[A professora completa a resposta e segue com a correção]

P: E a união de A com C?

[Vai dizendo os elementos de A, de B e de C em voz alta, enquanto escreve o conjunto união. Neste momento não há nenhum tipo de preocupação com a ordem dos elementos (crescente ou decrescente). Os elementos são colocados misturados no conjunto. Segue para o próximo item]

P: Qual o elemento que representa a intersecção dos três?

A: 8! [em coro]

P: Isso! Tem que estar aqui [aponta para intersecção no diagrama]

Novamente, o local onde deve estar a resposta é indicado pela professora no momento em que ela aponta para a intersecção.

P: O elemento que está em todos ao mesmo tempo.

A: Não entendi A intersecção com C.

P: São os que estão entre a linha rosa e a vermelha [e aponta para a intersecção no diagrama]

Neste momento, novamente a professora fez uso do recurso “cores”, enfatizando a diferenciação por meio da qual poderia reforçar o fato de que são todos os elementos que pertencem a A e a C simultaneamente.

P: Qual é A intersecção B?

[Espera alguns segundos e explica dando o resultado]

P: Só os que têm nos dois.

A: Ah tá!

[A professora dirige-se para turma e pergunta]

P: Alguma dúvida?

[Outra aluna pede explicações individuais. Neste momento há muito barulho na sala de aula, muitas conversas paralelas. Aparentemente com intuito de diminuir o barulho e dando prosseguimento à aula a professora, sem aviso, começa a colocar novos exercícios no quadro]

Ainda no que tange às dificuldades externadas pelos alunos, um grupo questionou a diferença do uso de parênteses e colchetes na notação de intervalos. Vários alunos demonstraram ter dúvidas em relação à representação de intervalos na reta real. Muitos deles não conseguiram compreender que, entre dois números reais quaisquer, existem infinitos números. Nesse sentido, uma aluna perguntou à professora se o conjunto A= {-1, 0, 1, 2} era um “intervalo” da reta real. A professora respondeu que eram pontos isolados. Outro fato relevante refere-se à insegurança demonstrada pelos estudantes ao resolverem listas de exercícios com o conteúdo misturado. Eles demonstram, e até falam para professora, que separadamente “compreendem melhor” e sentem-se mais à vontade.

Também foi durante a realização de exercícios que surgiram as perguntas a respeito da notação de conjuntos por compreensão, no sentido de diferenciar o intervalo aberto ou fechado. Durante a correção de um exercício que solicitava a união e a intersecção de intervalos, a professora representou geometricamente cada intervalo, perguntando, em seguida, qual era a união e qual era a intersecção. Os alunos reproduziram a representação geométrica feita pela professora no quadro, contudo não demonstraram ter uma boa compreensão dessa representação. Assim, a professora tenta explicar que *“o intervalo é um pedacinho da reta real. Entre dois números existem infinitos números. Por exemplo: entre o dois e o quatro existem infinitos números, não só o três! Tem o 2,2; o 2,7; o 3,5; o 3,8; etc.”*. Numa outra aula, em que estava sendo exposto o conteúdo de função do 1º grau e a construção do gráfico desse tipo de função, a professora afirma que o resultado do gráfico deve ser uma reta. Neste instante um aluno questiona a professora *“E se não der uma reta, está errado?”*, obtendo como resposta *“Se não for uma reta está errado”.*

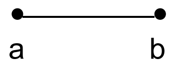
É interessante ressaltar o vocabulário discente que emergiu durante a realização desta atividade e foi usado com freqüência nas aulas. Expressões como *“A união B é juntar todos elementos”* referindo-se a união dos conjuntos A e B; *“A boca maior é o lado maior, né?”* para se referir aos símbolos de maior e menor; *“bolinha fechada/aberta”* para se referir ao intervalo fechado/aberto; *“pintar para direita/esquerda”* no sentido de preencher o intervalo; *“oito deitado”* para referir-se ao infinito; *“essa aqui”* ou *“aquela lá”* apontando para alguma notação; *“juntar tudo”* ou *“casamento”* para definir união de intervalos; *“só os iguais”* ou *“os que tem nos dois”* para explicar a intersecção de intervalos; *"infinito negativo"* indicando a "direção" do infinito (para esquerda na reta real); *"..é fechado? Então a bolinha é pintada!"* referindo-se ao intervalo fechado; *"...é o que tem comum."* reportando-se a intersecção; *"Dá para colocar só os números?"* referindo-se a possibilidade da ausência das chaves na representação de conjuntos por extensão.

Além das expressões utilizadas para referir-se a notação empregada em aula, alguns símbolos parecem representar obstáculos para os alunos quando precisam fazer uso dos mesmos. Embora conheçam o significado dos símbolos "maior que", "menor que", "maior ou igual", "menor ou igual", os alunos confundem qual dos símbolos é o "maior que" e qual e o "menor que". O mesmo ocorre para "maior ou igual", "menor ou igual". Deste modo, acabam perguntando com freqüência qual deles é o "maior que" ou qual é o "menor que", ou "qual deles eu uso?", ou ainda, "Coloco assim ou assim?" apontando ou escrevendo os símbolos $>$ e $<$. Provavelmente, em função dessa confusão entre o uso dos símbolos que expressam relação de ordem, alguns estudantes questionaram a diferença entre a escrita "$x \geq 2$" e "$2 \leq x$". Com isso, a professora explicou que, em Matemática, é possível ler da direita para esquerda e também da esquerda para direita, o que faz, das duas alternativas, respostas iguais. Em outro momento, usou a analogia do reflexo do espelho. Outra dificuldade evidente diz respeito à representação de conjuntos por compreensão. Os alunos demonstram dificuldade na compreensão de quais elementos pertencem ao conjunto, algumas vezes não reconhecem o símbolo que representa o conjunto numérico (naturais, inteiros, racionais, reais), e, muitas vezes, confundem os símbolos que expressam relação de ordem (maior que, menor que, maior ou igual, menor ou igual.

Um fato marcante e bastante presente no ensino atual refere-se às diferenças entre o que é escrito a mão e o que é digitado, principalmente no que se refere a símbolos ou registros de representação matemáticos. Além das dificuldades discentes apresentadas habitualmente, ainda há aquelas causadas pela diferença de grafia, tornando-se um obstáculo na linguagem. Um exemplo simples e claro desse fato ocorreu durante uma das observações, quando a professora distribuiu uma lista de exercícios e alguns alunos perguntavam se "Isso aqui é fração?" apontando para a representação da fração 5/8. Evidentemente a professora afirmava que o registro representava a fração cinco oitavos. Entretanto, ao escrever no quadro a mesma fração, ela registrou "$\frac{5}{8}$" . Apesar de aparentar ser simples ou evidente que 5/8 = $\frac{5}{8}$ para um grande número de pessoas, para alguns alunos isso é motivo de incerteza e pode vir a ser um empecilho na resolução de um exercício qualquer que faz uso da fração, mas pretende desenvolver outro conteúdo. Outros exemplos, também comuns nas aulas de Matemática, referem-se a símbolos como os que representam o conjunto dos números inteiros, racionais ou reais. Assim, é relevante salientar que a representação digitada nem sempre reproduz a forma de representação dada em aula, transformando-se num obstáculo da linguagem e interferindo diretamente na comunicação e na aprendizagem discente.

A simbologia utilizada em aula é bastante formal, sendo que para diminuir o impacto desse formalismo, a professora (re)explica inúmeras vezes o significado das notações e símbolos utilizados. Nas aulas observadas, a simbologia envolvida está relacionada à representação de conjuntos e intervalos de modo genérico e através de exemplos como:

- {0,2,3,5};

- {x/x é n° par maior que 2 e menor que 20};
- $\{x \in IN / 1 \leq x < 7\}$;
- $\{x \in IR / a \leq x \leq b\}$;
- (a;b),]a;b[, [a;b],
- 

;
- (-1;5],]2; 9[, etc.

Também por meio de símbolos como $+\infty$, $-\infty$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\cup$, $\cap$, $\in$, $\neq$, $=$; gráficos, tabelas, diagramas de Venn e, ainda, notação de funções, como f: $R \rightarrow R$, f(x).

Um fato interessante é que, para referir-se ao zero da função, a professora utiliza “z.f.”, por escrito ou oralmente. Também devo salientar que, na introdução do conceito de função do 1º grau, o formalismo da linguagem se fez presente, sendo intermediado pelas “traduções” da professora, que prioriza o conteúdo e não a linguagem utilizada.

Tanto a professora como os estudantes fazem uso de diversas linguagens no desenvolvimento das aulas. Em geral, utilizam bastante a linguagem oral combinada com a corporal. Contudo, a linguagem escrita aparece com maior ênfase nas aulas observadas, tendo em vista o tipo de metodologia empregada, que salienta a realização de exercícios, individualmente ou em grupos. A professora utiliza as três linguagens mencionadas acima, alternadamente, o que sugere que ela busca maior entendimento por parte dos alunos. Os estudantes utilizam com mais freqüência as linguagens escrita e corporal, normalmente combinadas. Nesse sentido, nota-se que os alunos sentem dificuldade ao se referir a determinados símbolos.

No que diz respeito às explicações fornecidas pela professora quando questionada a respeito do significado de determinada notação, posso exemplificar com o esclarecimento dado por ela a um aluno sobre união de conjuntos. Relembrando a ele o que já tinha sido explicado anteriormente, ela esclareceu: *"A união de dois conjuntos significa a reunião de todos os elementos pertencentes a esses dois conjuntos. Em outras palavras, juntar todos os elementos de A e todos os elementos de B".* Numa outra ocasião, um aluno questionou sobre o porquê da representação de "conjuntos por compreensão". Prontamente ela respondeu: *"Os conjuntos por compreensão são uma outra forma de representar conjuntos. Neste tipo de representação escrevemos o conjunto que tem elementos com uma propriedade comum"* e citou um exemplo para ilustrar suas palavras. Num dos exercícios sobre operações com intervalos, alguns alunos pediram explicações sobre como deveriam fazer. A professora explicou: *"Coloca o intervalo A na reta real, depois coloca o intervalo B na reta real [...]"*, referindo-se a representação geométrica de intervalos *"[...] e então faz a união e a intersecção olhando as retas, lembram?"*. Percebi que os alunos não lembravam, tampouco entenderam claramente a explicação dada.

4.2 APRESENTAÇÃO DOS DADOS COLETADOS NO TESTE

De acordo com as necessidades de investigar o uso dos registros de representação em Matemática em sala de aula, elaborei um teste[5] com questões relativas aos conteúdos de Teoria dos Conjuntos, Intervalos e Gráficos de funções. O teste tem por objetivo mais amplo indicar possíveis dificuldades relativas aos registros de representação em Matemática. De acordo com as idéias apresentadas por Alves-Mazzotti (1998), esse teste é um documento de coleta de dados, utilizado

[5] Vide apêndice B.

para indicar aspectos a serem focalizados por outros instrumentos, como a entrevista que ocorrerá logo após, complementando os demais instrumentos. As questões, em sua maioria, se assemelham a exercícios propostos pela professora regente e realizados em aula, com o intuito de não surpreender os alunos de forma negativa ao solicitar algo muito diferente do que estão habituados.

A professora não adota livro, visto a maioria dos alunos provêm de famílias carentes e não têm condições financeiras de adquirir este tipo de material, que deixa de ser fornecido pelo Ministério da Educação - MEC a partir do primeiro ano do Ensino Médio. Com isso, ela elaborou um polígrafo com o conteúdo e exercícios a serem dados em aula. Este polígrafo é de uso exclusivo da professora, que se baseia no mesmo para passar no quadro a matéria e exercícios de cada aula. Assim, as questões do teste foram baseadas nos exercícios e exemplos contidos nesse material utilizado pela professora, bem como nas aulas observadas.

A questão inicial do teste intenta perceber se os alunos entendem quais elementos pertencem aos conjuntos escritos por compreensão, ao representarem os mesmos por extensão. Os conjuntos dos itens a e b da questão 1 são intencionalmente determinados da mesma forma que aqueles que aparecem na questão seguinte. Com isso, é possível verificar se os erros cometidos na questão 2 tinham origem na forma de representação dos conjuntos ou nas operações de união e intersecção de conjuntos. Desta forma, as questões 1 e 2 eram complementares, na medida em que a primeira questão isolava um dos fatores de erro possíveis, permitindo que a análise da segunda questão se referisse diretamente às operações com conjuntos.

Na terceira questão do teste, procuro identificar se os alunos compreendem a simbologia envolvida, permitindo-lhes liberdade ao escrever em língua corrente e expressar-se com suas próprias palavras.

No mesmo sentido da questão anterior, a quarta questão propicia liberdade de escolha, agora, na forma de representação do conjunto dos números naturais pares. A intenção é perceber de que maneiras os alunos representam um conjunto quando isto não é imposto.

Na questão de número 5, o objetivo é verificar o significado de um conjunto escrito por compreensão, ao expressarem-se com suas próprias palavras, em língua corrente, como na questão 3.

Ao contrário da questão 5, que apresenta o conjunto por compreensão e tenta identificar o entendimento discente deste conjunto, na sexta questão a idéia é observar se os alunos sabem representar um conjunto por compreensão, ou se apenas conseguem transcrever seus elementos quando este é dado.

A questão seguinte aborda o conteúdo de intervalos e intenta perceber se os alunos compreendem com clareza as duas notações algébricas (notação de intervalos e notação de conjuntos) e a notação geométrica ensinadas pela professora. Além disso, busco perceber se os estudantes possuem habilidade de transitar entre os diferentes registros de representação de um intervalo. Ainda na questão 7, são novamente abordadas as operações de união e intersecção, agora com intervalos.

Complementando a questão 7, a oitava refere-se à representação de intervalos através da notação de conjuntos, especificamente, tendo estes intervalos representados geometricamente na reta real. Outra vez, busco perceber se a compreensão discente transpõe a “tradução de códigos” e demonstra a habilidade de transitar entre os diferentes registros de representação.

Nas questões 9 e 10, voltam a aparecer as operações de união e intersecção com intervalos. Contudo, diferentemente da sétima questão, que solicitava a representação geométrica do resultado, os intervalos das questões 9 e 10 são representados algebricamente, através das notações de conjuntos e de intervalos.

Mudando outra vez o conteúdo enfocado, a décima primeira questão envolve a representação de uma função do 1º grau e uma função constante através de seus gráficos. Com isso, pretendo observar que construções de gráficos aparecem e que elementos norteiam esta construção.

Isto posto e transcorrida a aplicação do instrumento, fiz a correção dos testes observando as respostas apresentadas. Dos trinta e cinco alunos que realizaram o trabalho, dois haviam chegado recentemente à escola, por transferência, e não haviam trabalhado o conteúdo na escola anterior. Por esta razão, os testes destes alunos foram desconsiderados. Com isso, trinta e três alunos participaram desta etapa da pesquisa.

Assim, numerei os testes dos alunos a fim de facilitar a tabulação dos dados e preservar a identidade dos participantes, utilizando um número para identificar cada aluno. Para a tabulação dos dados coletados utilizei uma distribuição matricial na qual, em cada questão, consta o número identificador dos alunos que acertaram, dos que erraram, daqueles que escreveram “não sei”, bem como são apontados os números identificadores de alunos que, independente de acerto ou erro, usaram registros de representação de forma peculiar[6].

---

[6] Vide apêndice C.

Em seguida, elaborei um segundo quadro, contabilizando o número de acertos, erros e respostas “não sei” em cada questão, bem como os percentuais. O intuito, com esse quadro, é mostrar quais questões apresentaram maior índice de dificuldade, seja pelo erro expresso ou pela resposta “não sei”, que pode caracterizar o não entendimento da questão proposta ou do conteúdo em si. Desta forma, apresento a seguir o quadro 1:

Questão	**Acertos**		**Erros**		**Respostas “Não sei”**	
	Nº	**%**	**Nº**	**%**	**Nº**	**%**
1a	20	61	10	30	3	9
1b	20	61	9	27	4	12
2a	23	70	7	21	3	9
2b	9	27	21	64	3	9
3	20	61	7	21	6	18
4	13	39	14	43	6	18
5	14	43	13	39	6	18
6	8	24	16	49	9	27
7a	29	88	1	3	3	9
7b	17	52	9	27	7	21
7c	25	76	5	15	3	9
7d	1	3	23	70	9	27
7e	3	9	25	76	5	15
8a	13	39	16	49	4	12
8b	11	33	17	52	5	15
9a	2	6	23	70	8	24
9b	11	33	16	49	6	18
10a	8	24	16	49	9	27
10b	14	43	13	39	6	18
11a	21	64	12	36	0	0
11b	29	88	4	12	0	0

Quadro 1 – Distribuição de freqüências das respostas por questão

Observando o quadro 1 apresentado acima, é possível notar alguns fatos curiosos, como, por exemplo, o baixo percentual de acertos da questão 4, em que eles deveriam representar o conjunto dos números naturais pares. Grande parte dos estudantes não considerou o número zero como um natural par. Outros representaram tal conjunto como sendo finito, escrevendo apenas alguns elementos sem importar-se em colocar um indicativo de que o conjunto é infinito, como as reticências. Há, ainda, aqueles que tentaram representar o conjunto por extensão, mas esqueceram das chaves no início ou no fim do conjunto. Além disso, apenas um aluno representou o conjunto por compreensão. Isso faz supor que, ao terem liberdade de escolha para representar conjuntos, os estudantes relutam no uso de uma linguagem mais formal, com simbologia mais "carregada", como é o caso desse tipo de representação. Isso também pode significar um indício de que estes alunos apresentam dificuldade ao transitar entre as diferentes formas de representação de um conjunto. Semelhante ao ocorrido na questão 4, mas com percentual de acerto ainda menor, a questão 6 confirma a possibilidade dos aprendizes apresentarem dificuldades na representação de conjuntos por compreensão, visto que 76% deles cometeram erros ou não souberam resolver a questão. Os erros mais recorrentes denotam a falta de entendimento relativa aos símbolos de "maior que" e "menor que", bem como "maior ou igual", "menor ou igual". Isso ficou evidente no registro de representação apresentado por eles: $\{x \in \mathrm{IN} \ / \ 1 \geq x \leq 4\}$.

Na primeira questão do teste, utilizando a conversão das representações apresentadas, os alunos, em sua maioria, obtiveram êxito, assim como na questão 2, em que muitos fizeram uso da conversão dos conjuntos B e C, representados por compreensão, para, em seguida, efetuar o tratamento de união ou intersecção entre os conjuntos. Contudo é visível a repentina baixa no percentual de acertos da questão 2a (70%) para a 2b (27%). Este fato pode indicar que a conversão da representação do conjunto C, necessária para a resolução do item 2b, pode ter sido um empecilho para que se efetuasse corretamente o tratamento de intersecção entre estes dois conjuntos.

Nas questões 3 e 5, que propiciavam liberdade de expressão aos estudantes para revelarem sua compreensão acerca dos registros apresentados, muitos alunos escreveram uma tradução literal. Ou seja, agiram como se decodificassem uma mensagem, sem entender muito bem seu significado, apenas transcrevendo códigos. Este tipo de questão é um alerta para uma possível falta da real compreensão, do entendimento do significado de tais registros.

O que mais chamou minha atenção ao analisar as respostas da sétima questão diz respeito aos itens “d” e “e”. Nesses itens os alunos precisavam converter a representação dada algebricamente na representação geométrica dos intervalos, após deveriam aplicar o tratamento união ou intersecção, conforme cada caso, obtendo a representação geométrica do intervalo resultante. Entretanto, muitos estudantes apresentaram uma resposta matematicamente correta, mas representada de forma diferente daquela solicitada no exercício, ou seja, fizeram a representação algébrica do intervalo, ao invés da representação geométrica. Para solucionar o problema bastaria converter novamente a representação encontrada. Se, por um lado este fato mostra que os estudantes conseguem transitar entre esses dois registros de representação de um intervalo, por outro lado, aponta uma visível falta de atenção discente na leitura do enunciado e na resolução dessa questão.

A oitava questão evidenciou, principalmente, duas possibilidades para os erros encontrados: falta de atenção ao ler o enunciado da questão ou não compreensão sobre a forma de representação pedida (notação de conjuntos), isso porque o erro mais recorrente foi o uso da notação de intervalos, ao invés da notação de conjuntos, a qual havia sido solicitada. Semelhante a esse caso, na nona questão, especificamente no item “a”, que apresentava notação de conjuntos, um número bastante significativo de alunos errou, sem considerar os que não souberam responder. Alguns alunos converteram a representação, fazendo uso da notação de intervalos para, só então, resolver a questão. É fato que não era vedado o uso de conversões nesta questão, porém, este é mais um indicativo de dificuldades na utilização da notação de conjuntos. O mesmo pode ser observado na questão 10a. Com isso, e a partir do que já foi mencionado, posso pressupor que estes estudantes apresentam dificuldades de compreensão e, conseqüentemente, de representação de intervalos por meio da notação de conjuntos. Por conseguinte, não transitam entre estes registros, e, se o aluno não conseguir esse trânsito entre os diferentes registros não irá compreender o que está fazendo e tampouco conseguirá entender o conceito do objeto matemático em estudo.

Por fim, a última questão do teste mostrou um bom percentual de acerto (88%). Contudo, há que se lembrar que o conteúdo envolvido nesta questão havia sido revisado na aula anterior pela professora, talvez significando que o maior índice de acertos pode estar relacionado com o curto espaço de tempo envolvendo a explicação do mesmo e a realização do teste.

4.3 APRESENTAÇÃO DOS DADOS COLETADOS NAS ENTREVISTAS

Este subcapítulo intenta expor os dados coletados por meio da entrevista[7] com os alunos, além de justificar a classificação e escolha dos entrevistados. Também apresento aqui a justificativa das questões que elaborei para cada entrevista e as respostas apresentadas pelos estudantes.

---

[7] A transcrição das entrevistas encontra-se no apêndice D.

4.3.1 Justificativa da Classificação e Escolha dos Alunos

Com o intuito de auxiliar na escolha dos estudantes que deveriam ser entrevistados, construí um quadro a partir da correção do teste e observando o número de acertos obtidos, classificando-os em níveis conforme seu desempenho. Os níveis A, B e C correspondem a um determinado percentual de acertos, tendo em vista um total de vinte e uma questões, conforme mostra o quadro 2, abaixo:

Nível	Número de acertos	Percentual de acerto por nível
A	14 a 16	Superior a 66%
B	9 a 13	Entre 42% e 66%
C	0 a 8	Igual ou Inferior a 42%

Quadro 2 – Classificação dos Níveis de Acerto

Os alunos foram escolhidos para entrevista de forma que os três níveis fossem contemplados na mesma proporção, ou seja, foram escolhidos três alunos de cada nível, porque julguei interessante analisar estudantes com diferentes condições de aprendizagem. Também foi levado em consideração o tipo de respostas apresentadas no decorrer do teste.

Na figura abaixo, são apresentados o número de alunos em cada nível, de acordo com o desempenho obtido no teste.

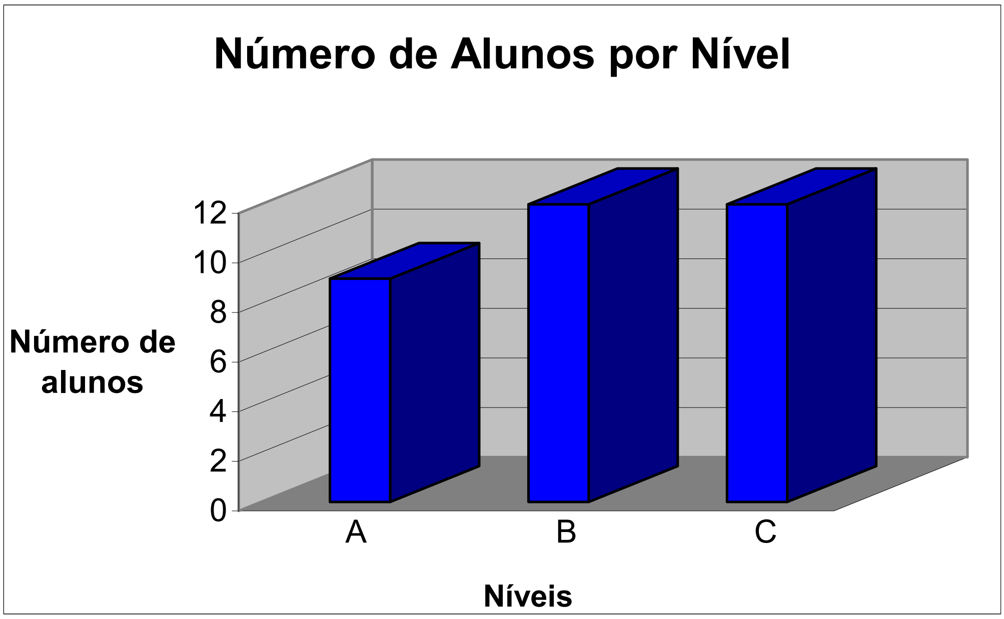


Figura 4 – Número de Alunos por Nível

4.3.2 Respostas dos Alunos e Justificativa das Questões da Entrevista

Na entrevista, procurei questionar os alunos sobre sua visão acerca de sua própria aprendizagem e das dificuldades que encontram com os registros de representação em Matemática. Para tal, elaborei dez perguntas gerais[8] direcionadas a todos os entrevistados, e outras mais específicas para cada aluno, de acordo com as respostas apresentadas no teste, analisando caso a caso. Dentre as perguntas feitas para todos os alunos, algumas são mais abrangentes, e outras mais específicas aos registros de representação que apareceram no teste.

A questão *"O que você achou das questões do teste?"* tinha como principal objetivo perceber a impressão dos alunos em relação ao grau de dificuldade

[8] Vide apêndice E.

encontrado na realização do mesmo. O que ficou evidenciado é que, entre os alunos entrevistados, uma parcela significativa considerou as questões do teste de nível fácil. Esta classificação diz respeito ao fato de as questões terem abordado o conteúdo de forma semelhante àquela trabalhada em sala de aula pela professora. Outro fator destacado pelos entrevistados que facilitou a realização das questões, foi a possibilidade de consultar o caderno, pois, segundo alguns deles, *“Ajudou, porque aí me lembrou algumas coisas que eu tinha esquecido [...] de alguns sinais que eu tinha esquecido. Aí me ajudou bastante”.* Ou, como enfatiza outro entrevistado: *“Ficou fácil porque podia olhar o caderno e lembrar de coisas que eu tinha esquecido”.* Com isso, é perceptível que até mesmo aqueles alunos que demonstraram maior dificuldade na resolução das questões, classificam o teste como “fácil”, justificando *“Ah! Eu me enrolei um pouquinho numas partes, mas tava fácil. Se eu tivesse estudado mais, eu acho que teria acertado. Eu acho que não acertei muito”.*

Estabelecer uma relação entre o gosto e o grau de dificuldade encontrado pelos alunos na disciplina de Matemática foi a principal finalidade de elaborar a questão *“Você gosta de Matemática?”* caracterizada como mais abrangente, mas de fundamental importância para uma análise holística. E, como resposta a esta questão, os entrevistados demonstraram que o “gostar” está intimamente ligado ao “compreender”, e estes são diretamente proporcionais; pois quando entendem, gostam. Isso fica claro ao declararem: *“Ah! Antes eu não gostava muito porque eu achava muito complicado. Mas esse ano tá sendo bem mais fácil. Tô entendendo mais [...]”.* Ou no comentário *“Não é tudo que eu gosto. Porque tem coisas que são mais fáceis e tem coisas que são bem difíceis”*. Outro diz: *“Gosto. Agora nesse ano.*

Porque tá um pouco mais fácil. A professora explica bem. E agora tô gostando um pouco mais".

Contudo, mesmo declarando que a Matemática é mais agradável quando é compreendida e que o interesse pelo conteúdo cresceu porque estão entendendo melhor, grande parte dos entrevistados apresentou dificuldades para explicar o significado de expressões usadas em sala de aula.

Ao questiona-los sobre as expressões "conjunto por extensão" e "conjunto por compreensão", o objetivo era perceber se os entrevistados compreendiam e utilizavam tais expressões com naturalidade, visto que as mesmas foram introduzidas em sala de aula pela professora e utilizadas no desenvolvimento do conteúdo. Surpreendentemente, nenhum dos estudantes soube dizer algo a respeito. Apenas repetiam: *"Não lembro", "Não sei", "Não lembro mesmo!".* No entanto, pude constatar que, apesar de desconhecerem ou não lembrarem de tais expressões, eles tinham conhecimento das duas maneiras de representações de conjuntos.

Com o intuito de complementar a questão anterior, após explicar aos alunos como são representados os conjuntos por extensão e por compreensão, respectivamente, considerei coerente questioná-los a respeito da representação de conjuntos, eleita por eles como a mais usual, a mais fácil. Como esperado, todos entrevistados manifestaram sua preferência de representação de conjuntos por extensão. Segundo eles *"Porque é mais fácil de entender. Porque tu só bota os números. Tu já vê direto os elementos"*. Alguns deles consideram que a representação por compreensão exige muito mais atenção no momento do registro e explicam que a representação de conjuntos por extensão é mais fácil *"Porque não precisa usar símbolos [...] tu não precisa estar botando x, naturais, pertence, e* *outros símbolos [...]".* Assim, fica claro que a utilização dos símbolos matemáticos não ocorre com naturalidade. Isso aponta para um possível indício de que os alunos tendem a ter dificuldades na representação de conjuntos por compreensão.

Visto isso e unindo ao fato dos alunos tenderem a utilizar com mais freqüência, a representação de conjuntos por extensão, julguei apropriado verificar o entendimento acerca de conjuntos representados por compreensão. É interessante lembrar que este tipo de representação foi um dos maiores indicadores de erro nas questões do teste.

A questão que solicitava aos alunos que explicassem com suas palavras o significado da representação de um conjunto por compreensão buscava observar o entendimento da linguagem empregada. Da mesma forma a questão intentava salientar se as maiores dificuldades na representação de conjuntos por compreensão ocorrem no registro de representação de conjuntos por compreensão ou na interpretação do mesmo. O resultado obtido nesta questão demonstra que, ainda com certa dificuldade e resistências iniciais, a maioria dos alunos entrevistados consegue dizer o que o conjunto representa. Contudo, as colocações são "traduções literais" e com pouca significação conforme se observa na fala de um dos entrevistados: *"x pertence ao conjunto Z, tal que x tem que ser menor ou igual que menos dois, ou maior que dois".* Algumas dificuldades na "tradução" dizem respeito ao símbolo que identifica o conjunto numérico em situações como *"x pertence aos naturais, [...] não! Calma aí! x pertence aos inteiros, [...] aí eu não me lembro [...], não tenho certeza!"* ou *"O problema é ler a parte inicial por causa dos símbolos [...]".* Todavia, o maior impedimento remete aos símbolos que expressam relação de ordem (maior que, menor que, maior ou igual, menor ou igual). Isso é evidenciado em falas como *"[...] x pertence ao conjunto Z, tal que menos três é [...],* *tal que menos três é [...], menor ou igual?* Esses sinais eu confundo!*"* ou então *"Esse daí eu lembro! O problema é esses sinais [...] é pior".* Com isso, a interpretação da representação de um conjunto por compreensão torna-se artificial, perdendo sua significação, já que se preocupam mais com a "tradução" do que com a compreensão.

Nesse sentido, é fácil supor que, quando a professora utiliza símbolos, nem todos alunos sentem-se à vontade. Assim, a questão *"Quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?"* tinha por objetivo perceber se os alunos entendem os registros de representação e que meios eles utilizam para compreendê-los quando isto não ocorre de imediato. Em geral, os alunos declararam que compreendem a linguagem matemática e os registros de representação utilizados pela professora. Contudo, em certas situações, precisam de auxilio, como mostra um dos estudantes em seus depoimento: *"Ela deu uma lista de símbolos no caderno, daí eu olho"* E o outro afirma: *"Eu não entendo tudo, né? Aí, depois eu pergunto e vou entendendo".* Um aluno explica porque é fácil compreender o que está sendo escrito no quadro: *"[...] a professora de Matemática, pelo menos essa aqui, quando ela explica, ela já fala o que significa, entendeu? E na hora da explicação ela mesmo já fala, tipo: x alguma coisa igual aos inteiros, entendeu? Então ela já fala. Ela não põe o símbolo [no quadro] e vai explicando [o conteúdo], ela vai falando o que é cada coisa"*. Com isso, fica claro que a "tradução" feita pela professora permite aos alunos uma despreocupação com os registros de representação e o seu significado, sendo que o efeito é percebido somente mais tarde, quando o aluno nota que, sozinho, tem dificuldade de transitar entre os diferentes registros de representação ou não é capaz de compreender o seu significado.

Assim sendo, é de suma importância saber se os alunos esclarecem suas dúvidas e em que circunstâncias isso ocorre. Portanto, a intencionalidade de questionar sobre o hábito discente de fazer perguntas é dada em razão da necessidade de compreender se os alunos solucionam suas dúvidas e de que forma o fazem. Além disso, a questão intenta verificar até que ponto a exposição pública reprime o aluno, comprometendo seu entendimento. O que pude constatar na entrevista com os estudantes é que a maioria deles faz perguntas e questiona: *"Eu sempre pergunto, porque o que adianta eu ficar com dúvida?"* Outros utilizam a timidez ou vergonha de se expor como justificativa, porém arranjam maneiras de solucionar suas dúvidas, como demonstram os depoimentos: *"Perguntar, assim, na hora, não! Mas depois eu chego na mesa [da professora] e pergunto. Ou vejo se algum colega entendeu, daí eu pergunto pra ele [...]", "Não pergunto. Fico quieto. Depois pergunto pros meus colegas"* ou *"Não sou de perguntar muito. Eu pergunto pros colegas, ou então, se ela* [a professora] *vem na minha classe aí eu pergunto. Eu tenho vergonha de perguntar na frente de todo mundo".*

Outro ponto relevante, questionado, diz respeito ao uso de diferentes registros de representação e ao trânsito feito entre eles. Os gráficos construídos a partir de leis de funções exemplificam bem a situação. Nesse sentido, o objetivo da questão *"Você gosta da parte relativa aos gráficos de funções? Por quê?"* era compreender o que chama atenção dos alunos para os gráficos e se eles conseguem transitar entre os diferentes registros de representação das funções estudadas. Talvez por ser o conteúdo em que estavam trabalhando mais recentemente, quase todos os entrevistados responderam que gostam de fazer os gráficos e até se divertem com a tarefa, como demonstra um aluno em seu depoimento: *"Ah! É gostoso fazer. É legal! Ao mesmo tempo tu faz e tu te diverte fazendo. Porque tem exercícios que tu fica ali* *matutando, matutando, matutando, e é complicado, acaba sempre se complicando. E já no gráfico não. Tu resolve a conta, se a conta tiver certa tu consegue fazer o gráfico direitinho. É legal!".* O gosto pela construção dos gráficos de funções é atribuído, principalmente, à facilidade que julgam ter para tal. E novamente associam o "*gostar*" ao "*compreender*"*.* Isso pode ser verificado nas falas dos próprios alunos*: "Eu gosto. Porque eu achei essa parte fácil de fazer"*, *"Acho bem legal. É facinho de fazer. A conta não é muito difícil", "Quando eu sei, eu gosto"* e *"Gosto. Porque não são tão difíceis. E tem que desenhar, e eu gosto de desenhar".*

Complementando esta questão acima e consciente de que as funções apresentadas para a construção dos gráficos no teste são simples, consideradas de nível fácil, visto que os alunos estavam iniciando a construção de gráficos, e, tendo em vista que um número significativo de alunos não encontrou dificuldades para construir os gráficos solicitados no teste, pedi aos entrevistados que construíssem o gráfico de uma função do 1º grau com nível de dificuldade um pouco maior. Com isso, a questão *"Se a função do exercício 11 do teste fosse f(x) = 2x +1, como ficaria o gráfico?"* tinha por objetivo analisar se os alunos obtiveram êxito na questão do teste pela facilidade apresentada, ou se realmente têm habilidade na construção de gráficos de funções do 1º grau. O resultado obtido na entrevistas foi positivo, visto que os entrevistados não encontraram obstáculo na construção do gráfico pedido, com exceção do nervosismo de um ou dois deles. Apesar das respostas serem corretas, durante a análise surgiram outras questões: Será que os alunos tiveram facilidade na construção do gráfico porque estavam trabalhando com o tema em sala de aula? Após algum tempo eles ainda terão facilidade em lidar com gráficos ou este "aprendizado" é temporário?

O questionamento sobre o significado da expressão “Linguagem Matemática” buscava perceber que tipo de entendimento os estudantes possuem acerca de um sistema de comunicação completamente diferente da língua corrente, que é utilizado freqüentemente no cotidiano escolar. Os entrevistados demonstraram estranheza e total desconhecimento do significado da expressão “Linguagem Matemática”. Nem sequer aproximaram-se de tal significado. Para eles *“Linguagem Matemática tem a ver com cálculos”,* ou pode ser *“o estudo das contas”, “Escrever com números”.*ou, ainda, é simplesmente *“Tudo que fala sobre Matemática”*. Outros se limitaram a dizer *“Ah! Não sei explicar!”* ou somente *“Não sei.”*. Isso mostra claramente o quanto a expressão “linguagem matemática” está dissociada de significado.

Como já foi dito, além das perguntas gerais, feitas para todos os participantes, elaborei algumas perguntas específicas, feitas para alguns alunos, dependendo das peculiaridades encontradas em seus testes.

Um aspecto notável nas respostas dos testes refere-se ao elevado número de alunos que representaram o conjunto dos números naturais pares sem o elemento zero. Desta forma, julguei interessante solicitar-lhes novamente, na entrevista, a representação desse conjunto com o intuito de explorar as razões da ausência do elemento zero. As justificativas para falta de tal elemento variaram entre *“Ah! Eu acho que esqueci”.*ou *“Ah, é!”* e até mesmo *“O zero não é neutro?“*. Creio que o esquecimento é compreensível, contudo um dos alunos julgou que o zero não era par nem ímpar, pois, em algum momento aprendeu que o zero é neutro. Mas de onde procede essa “neutralidade” do zero? Insistindo na questão, descobri que, na construção do conjunto dos números inteiros, o aluno compreendeu que, por não ser um elemento positivo e tampouco negativo, o zero é “neutro”. É possível supor que em algum momento de sua vida escolar algum professor tenha utilizado esta expressão ou tenha se referido ao zero como o elemento neutro da adição e o aluno tenha associado ao zero a “função” de neutro, permanentemente. Outros aspectos de representação que merecem destaque referem-se aos registros de representação do conjunto solicitado, como a falta de chaves no início ou no final do conjunto, expressos na dúvida do aluno que diz *“Faço fechado ali?”*; o uso de reticências trocado por expressões como *“e vai”* querendo afirmar que o conjunto é infinito; o uso da representação de conjuntos por extensão e por compreensão misturadas. Contudo, ao esclarecer a confusão entre os diferentes tipos de representações, o erro é imediatamente corrigido, como mostra a frase dita pelo aluno: *“Acho que pra representar os pares [...] ou faria até um determinado número e fecharia e botaria três pontos [...], ou escreveria”.*

Outros alunos, em uma das questões do teste, representaram o vazio utilizando as duas formas de representação ϕ, { }, simultaneamente, obtendo {ϕ}. Por este motivo, considerei relevante solicitar novamente que representassem o conjunto vazio. Quando questionados sobre essa representação, os alunos entrevistados justificaram-se dizendo *“Me enganei”* ou demonstraram desconhecimento sobre a representação correta em respostas como : *“Tu sabe que eu nem sei [...]”.* Os alunos entrevistados também mostraram incerteza sobre a maneira de representação do conjunto, repetindo a pergunta: *“Conjunto vazio?”,* ou afirmando: *“Não lembro”*.

O intuito de questionar os alunos com a frase: *“A questão 7 do teste pedia para representar os intervalos na reta real, e em seguida eram dados os intervalos a serem representados. Nos últimos dois itens (letra d e letra e), você representou a resposta com notação algébrica de intervalos. Por quê?”* era entender porque alguns alunos preferiram utilizar a notação algébrica de intervalos em vez representá-los na reta real. Surpreendentemente, eles mesmos não sabiam dizer:

"Sei lá! Porque a sora fazia assim, sempre" ou *"Porque eu sempre fiz desse jeito"*. Alguns não haviam percebido que trocaram o tipo de registro de representação nos últimos dois itens da questão sete: *"Ah! Eu pensei que era assim! Acho que não me dei conta"*. Outro aluno, justificou: *"Porque eu não sabia o que era reta real".*

Independente de acerto ou erro, alguns alunos responderam às questões do teste apresentando peculiaridades interessantes, como, por exemplo, o uso de mais de um tipo de representação na mesma questão, quando isso não se fazia necessário. Ou respondiam corretamente, mas usavam uma notação diferente daquela pedida no enunciado. Isso se evidencia na oitava questão do teste, que pedia para representar intervalos usando notação de conjuntos e em que alguns alunos utilizaram notação algébrica de intervalos. Um dos alunos utilizou as duas notações e outro aluno escreveu os intervalos em língua corrente. Com isso, questionei suas razões na entrevista, tentando compreendê-las. Os motivos apresentados pelos entrevistados foram: *"Eu não sabia fazer", "Não sabia fazer a notação de conjuntos, né?!"* ou *"Não entendi o que era para fazer".* O aluno que escreveu em língua corrente explicou: *"Eu não entendi muito bem. Aí eu fiz assim".* E o aluno que utilizou as duas notações argumentou: *"Talvez porque no começo, quando eu li, eu nem me lembrava dessa daqui [notação de conjuntos]. Daí eu me lembrei dessa outra [notação de intervalos] e depois vi que tinha que fazer desse jeito [notação de conjuntos]".*

Outro aspecto apresentado no teste, que é imprescindível para um questionamento, refere-se aos nove alunos que representaram o conjunto formado pelos números 1, 2, 3 e 4, da seguinte forma: $\{x \in N / 1 \geq x \leq 4\}$. Destes, três foram entrevistados e questionados a respeito do significado da representação do conjunto, porque o objetivo era verificar se eles, ao explicarem o significado do conjunto, perceberiam que um dos símbolos que expressa relação de ordem está invertido. O interessante nessa questão, é que nenhum dos alunos deu-se conta sozinho, tive que questioná-los a respeito do símbolo estar corretamente representado, e somente então eles concordaram, dizendo *"tá virado"* ou expressando incerteza *"[...] pode ser",* ou ainda, *"Tá ao contrário. Agora que eu vi".* Outro fato surpreendente é que um dos alunos explicava o significado do conjunto como se os símbolos não apresentassem erro e, só depois da minha intervenção e insistência, ele percebeu que realmente havia um erro de representação no conjunto.

Houve questões direcionadas apenas para um ou dois alunos, mas que contemplavam importantes aspectos a serem focalizados. Esse é o caso do questionamento a respeito do significado da palavra "grupo" que foi direcionado apenas para dois estudantes, que utilizaram a expressão "grupo dos reais" numa das questões do teste. A intenção era entender o significado dessa palavra para o aluno, bem como perceber se possui o mesmo significado de "conjunto". Um dos alunos, imediatamente, respondeu *"Grupo é [...] um conjunto!"*, o que confirma a hipótese previamente levantada. O outro aluno nem deu-se conta que havia trocado as palavras, respondendo, inicialmente, algo diferente do que foi perguntado. Quando interpelado sobre o uso da expressão "grupo" pela professora, em sala de aula, o aluno mostrou-se evasivo e não respondeu. E ao ser questionado diretamente sobre a possibilidade de "grupo" e "conjunto" terem o mesmo significado o aluno manifestou-se com incerteza: *"[...] É. [...] Acho que é".*

A pergunta "Nas questões 9a e 10a eram apresentados intervalos representados pela notação de conjuntos e pedia-se a intersecção ou a união destes intervalos. Você respondeu com notação de intervalos. Por quê? Como seria esta resposta na notação de conjuntos?” era direcionada especificamente para um aluno, que havia usado uma representação de intervalos diferente da apresentada no corpo da questão. Assim, essa pergunta buscava entender as razões que o levaram a usar uma notação diferente. Além disso, objetivava que o aluno transitasse entre as representações, respondendo como ficaria a resposta na notação de conjuntos. Ao responder, ele demonstrou que suas grandes dificuldades estavam associadas à confusão entre os símbolos de “maior que” e “menor que” evidenciadas em suas palavras: *“Esses sinais eu confundo”.*

Um outro aluno representou o intervalo $\{x \in R / -1 < x < 2\}$ como o conjunto {0,1}, ignorando a existência de infinitos números reais entre menos um e zero, bem como entre os números reais zero e um, ou um e dois. Tendo isso em vista, elaborei a questão *“Entre os números 1 e 4, que números reais existem?”* a fim de verificar se o aluno tinha noção de que entre dois números reais existem infinitos números reais. A resposta imediata do aluno foi os números dois e três, mas, com minha insistência em perguntar se havia mais algum número, o aluno respondeu *“Sei lá! E tem aqueles lá [risos], aqueles quebradinhos, sabe? [...] Aqueles negócio lá que na reta a gente até sabe”,* demonstrando que tinha noção de que existiam muitos outros números entre dois reais quaisquer. Contudo, ao questioná-lo sobre a possibilidade desses “muitos números” serem “infinitos” o aluno descorda: *“Ah! Infinitos não!”.*

Na questão nove do teste, dois alunos usaram chaves em vez de colchetes ou parênteses para representar o intervalo (-1;1]. Por esta razão, elaborei a questão *“O que significa para você {-1, 1}?”* para compreender porque utilizaram chaves. Se o intuito dos alunos era representar o conjunto formado pelos elementos –1 e 1 ou se foi um engano no momento do registro de representação do intervalo em questão. Um dos alunos disse que era um intervalo e alegou que já não lembrava porque tinha usado chaves. O outro afirmou num primeiro momento, que {-1;1} é um conjunto, mas ao olhar o que foi solicitado na questão percebeu seu engano na resposta dizendo *“Eu não me lembro bem. Mas devia ter colocado aberto ou fechado”.*

A questão *“Na questão 1 do teste, você escreveu por extenso em língua corrente.* Por quê*?”* tinha por objetivo compreender as razões do aluno que em vez de representar os conjuntos dados, escreveu em língua corrente o significado de cada conjunto. O aluno justificou sua resposta afirmando que não havia entendido o que era para ser feito na questão.

Um dos alunos, ao fazer a união de dois conjuntos dados, repetiu alguns elementos. Por isso, elaborei uma questão para verificar a razão do ocorrido. O aluno explicou que *“Ah! [...] A sora falou que dava pra repetir [...]”.*

A questão *“Das notações utilizadas para representar intervalos, qual você utiliza mais? Por quê?”* foi dirigida a um aluno que em várias questões do teste, utilizou mais de uma representação de intervalo. O intento da questão era perceber a razão dele para tal. Sua resposta foi *“A da reta”, que em sua opinião “[...] é mais fácil de ver!”.* Depois de representar o intervalo na reta real, o aluno conseguiu, com mais facilidade, representar de outras formas.

Já a questão sete do teste pedia aos alunos que representassem os intervalos dados na reta real. Um dos alunos construiu gráficos. Assim, considerei relevante conhecer os motivos que conduziram o aluno para tal resposta. Sua justificativa foi *“Porque eu não sabia o que era reta real”*, demonstrando que, em alguns casos, eles não relacionam a expressão “reta real” com sua representação.

Por fim, questionei alguns alunos sobre o motivo que os conduziu a escreverem “não sei” em determinadas questões, bem como se havia questões no teste em que eles não entenderam o que era para fazer. O intuito era esclarecer se os alunos realmente não sabiam resolver a questão pedida ou se não estavam compreendendo o que lhes foi solicitado, porque o enunciado não foi entendido. As respostas à questão foram pouco expressivas como *“essa aqui”* em que o aluno apontava para a questão, ou *“Algumas eu não entendi. E também não sabia fazer”*. Evidentemente, se o aluno não compreendeu o que era para ser feito, não sabia resolver a questão. Contudo, é necessário salientar que, na entrevista, os alunos não lembravam com clareza quais questões não haviam compreendido ou o porquê de terem escrito “não sei” em algumas delas, visto que já havia transcorrido algum tempo desde a realização do teste.

5 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ANÁLISES

O objetivo deste capítulo é tentar fazer um apanhado geral sobre as análises dos três instrumentos de coleta de dados, entremeando, numa teia de informações, dados coletados e fundamentação teórica. Com isso, pretendo expor um panorama geral da pesquisa fornecendo indicativos que permitam responder as questões iniciais desta pesquisa, bem como apontar soluções o problema que a desencadeou.

Analisando os dados coletados por meio das observações, do teste e das entrevistas, podemos ver um mesmo fato sob diferentes pontos de vista. De um modo geral, algo que me chamou bastante atenção, tanto nos testes quanto nas entrevistas, foi a dificuldade discente para explicar o que entendem ao deparar-se com um conjunto representado por compreensão. Esse fato pode ser melhor compreendido ao relembrarmos momentos de observação em sala de aula, nos quais a professora corrigia um exercício em que eram dados dois conjuntos por compreensão. No referido exercício, antes de resolver as operações de união ou intersecção solicitadas, a professora questionava seus alunos *“Quem são os inteiros entre –5 e 1, incluindo o -5?”* referindo-se a um dos conjuntos do exercício, o qual estava representado por compreensão. Aos poucos os alunos iam dizendo quais eram os elementos do conjunto. Em seguida ela perguntava sobre outro conjunto do exercício, *“E quais são os naturais entre zero e cinco, incluindo o zero e sem incluir o cinco?”.* E outra vez os alunos respondiam corretamente.

Este fragmento, como um outro apontado na descrição das observações, mostra, pelas falas da professora, que, ao questionar seus alunos sobre quais são os elementos dos conjuntos B={x $\in$ Z / -5 $\leq$ x $<$ 1} e C={x $\in$ IN / 0 $\leq$ x $<$ 5} em questão, ela “traduz” a linguagem simbólica envolvida. Assim, fica evidente o porquê de os alunos terem dificuldades com esse tipo de representação, visto que, em aula, eles não transitam entre os diferentes tipos de representação sem intermédio da professora. Relembrando um antigo ditado que diz: “Em vez de dar o peixe, temos que ensinar a pescar!”, considero que, desta forma, os estudantes continuarão enfrentando obstáculos ao lidarem com a representação de conjuntos por compreensão, pois não desenvolveram a habilidade de entender o que representa aquele conjunto dado. E essa falta de habilidade discente para transitar entre esses tipos de representação não será desenvolvida enquanto não houver necessidade, posto que, até agora, sempre houve alguém que o fizesse por eles. Temos que concordar que o transito entre esses registros de representação não é uma tarefa fácil, pois cada registro apresenta suas particularidades, e, como já foi mencionado anteriormente, se o aluno não consegue transitar entre os diferentes registros não irá compreender o que está fazendo e tampouco conseguirá entender o conceito do objeto matemático em estudo.

Nesse sentido, Baquero (1998) lembra que:

> A linguagem escrita demanda, em relação à linguagem oral, um trato mais elaborado. Trata-se de uma linguagem com maior grau de descontextualização na medida em que exige a dupla abstração dos componentes “fásicos” da linguagem [...] e, fundamentalmente, demanda uma abstração em relação ao interlocutor, ausente (p.84).

E complementa:

> A escrita se trata de uma linguagem abstrata e é sua abstração, precisamente, o que define a particular demanda de trabalho intelectual que requer, o que, na opinião de Vygotsky, representa a dificuldade maior em sua aquisição. Neste sentido, a caracterização central dos processos de escrita apresentam-na como uma complexa operação intelectual e como uma também complexa prática cultural. [...] não é uma habilidade de transcrição a que determina a competência no domínio da língua escrita, mas a capacidade de produções lingüísticas específicas sujeitando-se às regras particulares que impõe de acordo com sua particular funcionalidade potencial e seu sistema de representação (p.85).

Com isso, é bastante compreensível o motivo pelo qual os estudantes apresentam dificuldades e até resistência na utilização da representação de conjuntos por compreensão, visto que há grande necessidade de abstração e entendimento da simbologia envolvida para transitar entre os diferentes registros de representação de conjuntos.

Nesse sentido, Laborde (1990) comenta que a habilidade estudantil para mudar de uma forma de linguagem para outra não é algo espontâneo entre os alunos, como tem sido observado em diversas pesquisas. Para exemplificar esse fato, basta relembrar, mais uma vez, que a professora precisa “traduzir” a linguagem simbólica envolvida numa representação de conjuntos por compreensão para a língua corrente, a fim de que os alunos saibam realizar a tarefa pedida.

Por outro lado, a forma utilizada pela professora representa também uma forma de mediação. À sua maneira, ela procura auxiliar os alunos na compreensão da simbologia envolvida. A esse respeito, Grando (1998) lembra que, para Vygotski, o signo, representado pela palavra, é o mediador central no processo de formação de conceitos.

Ainda sobre a ação da professora, penso que, fazendo intervenções pelo uso da língua corrente na “tradução” da linguagem matemática expressa na simbologia dos conjuntos representados por compreensão, talvez ela esteja se apoiando no fato de que o conceito científico é formado pela mediação social em busca do objeto a ser apropriado, não tendo embasamento no real (GRANDO; MORETTI, 2003). Nesse sentido, La Rosa (2001) comenta que a intervenção de membros culturalmente mais maduros como mediadores na aprendizagem é essencial para o processo de desenvolvimento do indivíduo. Contudo, Baquero (1998) alerta que a intervenção docente deve servir para a apropriação das respostas dos estudantes com o intuito de ressignificá-las numa lógica discursiva diferente. Além disso, comenta que as “perguntas de resposta conhecida” são um tipo de intervenção não desejável, já que, nesse caso, é o professor que faz as perguntas, que conhece as respostas, e a repetição de uma pergunta está supondo uma resposta errada.

No conteúdo de intervalos, notei que os alunos, em sua maioria, compreendem bem o conceito de intervalos e conseguem representar intervalos na notação geométrica ou notação algébrica de intervalos, inclusive transitam entre esses dois registros com relativa facilidade. Contudo mostram-se receosos e apresentam muita dificuldade ao representar um intervalo por meio de notação de conjuntos ou mudar de registro, quando a notação de conjuntos é solicitada. Este fato nos remete ao que foi exposto acima, lembrando que grande parte dos alunos não compreende bem a representação de conjuntos por compreensão.

A respeito disso, vale lembrar algumas idéias de Vygotski, expostas por Grando:

> O processo de desenvolvimento dos conceitos exige o desenvolvimento de funções psicológicas superiores de conduta, tais como a atenção voluntária, a memória lógica, a abstração, a comparação e a diferenciação. Em razão desses processos psíquicos tão complexos, a criança não se apropria dos conceitos como se se apropriasse de qualquer hábito intelectual (VYGOTSKI, apud GRANDO, 1998, p.13).

Com isso, observei, por meio dos testes, que muitos dos erros cometidos, ou respostas “não sei”, envolviam a manipulação direta ou indireta da representação de conjuntos por compreensão. Esse fato foi reforçado pelas respostas fornecidas nas entrevistas, bem como por observações em sala de aula. Numa das entrevistas, eu questionava o aluno sobre a razão de ter utilizado notação de intervalos, se era solicitada a notação de conjuntos. Como resposta, ele apenas disse que não sabia fazer a notação solicitada, por isso fez a outra. Já numa outra entrevista, pedi para outro estudante me explicar, com suas próprias palavras, o que representava o conjunto $\{x \in Z \ / \ -1 \leq x < 5\}$. O aluno simplesmente disse *“Nem lembro mais”.* Insisti perguntando se não queria tentar dizer algo a respeito e ele respondeu *“Não. Não lembro mais. Bah! Não lembro mesmo!”*. Tentei auxilia-lo para ver se ele fazia algum progresso, porém, na maioria das vezes, ele ia concordando comigo e se mantinha calado durante as pausas que eu fazia para que continuasse sem meu auxílio. Por fim o aluno revelou “*Esse daí eu lembro! O problema é esses sinais [...] é pior”.*Nessa fala, o aluno se refere a “$x \in Z$” como problema, afirmando que entende o significado de “$-1 \leq x < 5$”. E complementa sua afirmação dizendo onde está sua dificuldade na compreensão deste tipo de representação de conjuntos: *“É. a parte inicial por causa dos símbolos, por isso que o caderno ajudou”.*

Por fim, um trecho de uma das observações em sala de aula aborda um terceiro exemplo referente às razões da dificuldade discente apresentada na manipulação direta ou indireta com a representação de conjuntos por compreensão. Na referida observação, a professora, durante a correção de um exercício, aponta para o conjunto $B= \{x \in IN \ / \ 1 \leq x < 4\}$ e pergunta aos alunos: *“Quem são os naturais maiores ou iguais a um e menores que quatro*?” e, em seguida, apontando para o conjunto $C = \{x \in Z \ / \ -3 < x \leq 1\}$, pergunta: *“Quem são os inteiros maiores que –3 e* *menores ou iguais a 1?”*. Com isso, percebi que a “tradução” da linguagem simbólica envolvida neste tipo de exercício é freqüente. E esse tipo de mediação, ao invés de auxiliar os alunos, pode acabar fazendo com que se acomodem e não procurem entender o que significa tal simbologia.

Além da evidente dificuldade com o registro de representação de conjuntos por compreensão, notei, nas observações feitas em sala de aula, que alguns alunos fazem certa confusão com os símbolos de relação de ordem. Essa observação foi reforçada tanto no teste como nas entrevistas, visto que os próprios estudantes confirmaram que se confundem ao utilizar tais símbolos, embora saibam o que representam. Para exemplificar, apresento situações ocorridas nas entrevistas, nas quais me refiro a erros cometidos nos teste em função destes símbolos. Numa das situações o aluno havia representado, no teste, o conjunto $\{x \in \mathrm{IN} \ / \ 1 \geq x \leq 4\}$. Por isso o questionei *“Na questão 6 do teste, você representou o conjunto formado pelos números 1, 2, 3 e 4 dessa forma. Você pode me explicar o que quer dizer isso aqui?*” e o aluno respondeu em várias etapas, fazendo pausas entre elas *“Deixa eu ver [...] x pertence aos naturais, tal que um tem que ser maior [...] maior que x, e o quatro tem que ser [...] menor [...] menor que quatro.* [...] *x vai ser [...] menor ou igual a quatro”*. Nesse momento, insisti para que percebesse o erro cometido *“De acordo com o que você disse x é menor que um e menor ou igual a quatro. É isso?”*, e o aluno concorda. Então pergunto *“Menor ou igual, ou maior ou igual?”* e ele responde *“Maior ou igual”.* Insisto mais uma vez, tentando fazer com que veja o erro *“Então o x é maior ou igual a um. Nesse caso, tem algo errado com estes símbolos aqui, não é?”.* E somente nesta última vez que ele se dá conta de que há algo errado e diz *“[...] tá virado”* apontando para um dos símbolos. Mais uma vez interfiro confirmando sua resposta *“Então x é maior ou igual a um e menor ou igual a quatro”* e ele afirma: *“Daí estaria certo”.*

Um outro momento das entrevistas aponta essa mesma situação. Outro aluno havia representado o conjunto formado pelos números 1, 2, 3 e 4 como $\{x \in IN \ / \ 1 \geq x \leq 4\}$. Ao ser questionado sobre o significado do conjunto que representara, demorou para perceber seu erro e só o fez com minha interferência insistente, assim como no caso anterior. Por fim o estudante revelou: *“Tá ao contrário. Agora que eu vi”.* Em outra ocasião, perguntei a um dos entrevistados *“Nas questões 5 e 9a , você escreveu ‘não sei’. Porque? Você entendeu o que era para fazer?”* e o aluno respondeu *“Na verdade eu nunca sei quando é assim ó [...]”* indicando os símbolos maior ou igual e menor ou igual.

Os símbolos que expressam relação de ordem são introduzidos no início do Ensino Fundamental e utilizados como “ferramenta de apoio” em conteúdos nas séries posteriores, entretanto, ainda assim, provocam dúvidas na sua manipulação em diferentes contextos. Por exemplo, o aluno do Ensino Fundamental sabe responder o conhecido exercício de preencher a lacuna indicando qual o número é o maior e qual é o menor por meio dos símbolos de relação de ordem, do tipo 8 ..... 3, em que ele usa o símbolo “>” para indicar tal relação. Todavia, como foi evidenciado nos instrumentos dessa pesquisa, o estudante do 1° ano do Ensino Médio, ainda que saiba o que significam tais símbolos, enfrenta dificuldades no momento em que precisa representar um conjunto por compreensão, escrevendo em linguagem matemática que um elemento x qualquer desse conjunto está compreendido entre dois números.

Essa aparente confusão entre estes símbolos ou o simples não lembrar da representação de algum símbolo pode ser entendida ao analisarmos a fala de um outro aluno durante a entrevista. Questionei se, quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever no quadro, por exemplo, ele entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender. O aluno, em resposta a essa pergunta, disse: *“Não, porque a professora de Matemática, pelo menos essa aqui, quando ela explica, ela já fala o que significa, entendeu? E na hora da explicação ela mesmo já fala, tipo: x alguma coisa igual aos inteiros, entendeu? Então ela já fala. Ela não põe o símbolo [no quadro] e vai explicando [o conteúdo], ela vai falando o que é cada coisa”*. Nesse caso insisti *“E quando vocês fazem algum trabalho ou teste que venham escritos em linguagem simbólica, vocês chamam a professora para perguntar o que significa?”* e a resposta foi *“Às vezes sim”.*

Com isso, percebo que há um emaranhado de razões para as dificuldades discentes com os registros de representação em Matemática, algumas relativas à ênfase dada aos registros de representação, bem como a coordenação entre os diferentes registros. E, como foi mencionado anteriormente, uma das principais características da atividade matemática é a mobilização obrigatória de uma diversidade de registros de representação semiótica. Contudo, essa diversidade raramente é considerada no ensino. Muitas abordagens didáticas não levam em consideração que existem diversos registros de representação de um mesmo objeto matemático e que a articulação desses diferentes registros é condição essencial para o entendimento matemático (DUVAL, 2003).

Por outro lado, há que se salientar outros aspectos observados, como o trabalho cooperativo em sala de aula. A colaboração com o outro contribui para o surgimento de diferentes estratégias de resolução, propiciando possíveis mudanças de estratégias, o que favorece um progresso no domínio dos conhecimentos em questão. Saber mudar de estratégia e considerar um problema sob diferentes pontos de vista contribui para uma utilização mais flexível do conhecimento e para uma maior apropriação do mesmo (LABORDE, 1996).

Outro fator que considero relevante para que a aprendizagem ocorra de forma mais natural e prazerosa, se refere à relação entre o professor e os alunos. Percebi, nas observações, que os estudantes têm carinho e respeito por sua professora. Da mesma forma, notei que ela também é afetiva com eles. As entrevistas vieram confirmar a afetividade nesta relação. É evidente que esse bom relacionamento influi diretamente no “gostar” e, conseqüentemente, no “aprender” Matemática. E isso fica bem claro nas falas de um dos estudantes quando questionado sobre a razão de gostar de Matemática: *“Ah! Antes eu não gostava muito porque eu achava muito complicado. Mas esse ano tá sendo bem mais fácil. Tô entendendo mais. A professora é legal, explica bem”*. Em seguida confirmo suas palavras “*Então você gosta porque está entendendo?*” e o aluno responde afirmativamente.

Nesse caso, a afetividade, o fato da professora ser ”legal”, propicia maior descontração nas aulas, melhor interação da professora com o grupo ou entre os alunos. Com isso, posso dizer que a simpatia e bom relacionamento auxiliam na aprendizagem como um “catalisador do conhecimento”, fazendo com que os alunos se mostrem mais participativos e interessados. Mesmo assim, não podemos esquecer que a turma mostra um grande medo da exposição frente aos colegas. O medo de ser ridicularizado frente ao grupo é um forte inibidor para que a participação em aula seja ainda mais efetiva. Esse temor afeta também a solução de dúvidas relativas ao conteúdo estudado, pois alguns alunos acabam não externando suas dificuldades por vergonha ou timidez. Essa característica da turma foi observada em sala de aula e também nas entrevistas, como mostra a resposta de um dos estudantes durante a entrevista: *“Não sou de perguntar muito”*.

De acordo com tudo que foi exposto, considero que muitas são as circunstâncias em que emergem dificuldades discentes com a simbologia matemática. Nesse sentido, posso apontar, principalmente, algumas das ações docentes, já expostas, além do fato de que os exercícios, muitas vezes, são meras repetições, não há uma proposta que provoque os estudantes, desafiando-os a aventurar-se pelo mundo da Matemática.

Malta (2004) considera que:

> Hoje, estou convencida de que as deficiências no uso da linguagem escrita e o pouco desenvolvimento da capacidade de compreensão da Matemática, claramente detectados há vinte anos, não se configuram apenas como eventos simultâneos, como sintomas paralelos que indicavam que o sistema de ensino estava doente, mas, sim, que esses fenômenos estão intimamente ligados por uma relação causa-efeito: sem o desenvolvimento do domínio da linguagem necessária à apreensão de conceitos abstratos (e, portanto extremamente dependentes da linguagem que os constrói) nos seus diversos níveis, não pode haver o desenvolvimento do pensamento matemático (também em seus diversos níveis) (p.44-45).

Essas palavras, de certa forma, ilustram algumas das idéias que concebi a partir dos elementos encontrados na pesquisa.

6 CONCLUSÃO

Este capítulo apresenta minhas impressões e percepções durante a realização desse trabalho, bem como a utilidade dessa pesquisa, as respostas que encontrei para as questões que a desencadearam, e algumas sugestões para futuras investigações.

Certo dia, buscando fundamentação para o trabalho, encontrei um trecho curioso que me fez repensar o uso das palavras que utilizo:

> Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais... (ALVES, 2003, p.6).

Refleti por alguns momentos acerca desse pensamento e passei a entender as palavras como espelhos, por isso não são totalmente confiáveis, já que refratam inúmeras imagens (MAZZEI, 2004).

Nesse sentido, percebo a relevância de uma tomada de consciência, a fim de que a linguagem seja utilizada intencionalmente e, com isso, favoreça a aprendizagem.

Penso que nós, como docentes, devemos repensar nossas palavras, discursos e práticas em sala de aula, pois, assim como as palavras formam elos comunicativos, interativos e afetivos entre nós e os alunos, elas podem também erguer barreiras, bloquear o raciocínio livre, afastar mental e fisicamente professor e alunos. Creio que nenhum docente desejaria isso de forma consciente. Portanto, é preciso refletir, e digo isso porque acredito que precisamos nos fazer entender, estabelecer laços afetivos, interagir e fazer com que os alunos interajam, mas não dar respostas prontas, apenas provocar o raciocínio e incentivar a busca pelo saber.

Como professora de Matemática, escolhi essa profissão pelo prazer que tenho tanto com a Matemática quanto com o seu ensino. E, por isso, suponho que a maioria dos docentes também optou por essa profissão por prazer. Nesse sentido, Alves (2003) sustenta que é fundamental mostrar ao aluno o prazer que se tem com o saber que se está ensinando. Somente assim, o aluno também poderá desfrutar desse prazer em lidar com os saberes. Caso contrário, teremos fracassado em nossa missão, “como a cozinheira que queria oferecer prazer, mas a comida saiu salgada e queimada...” (ALVES, 2003, p.13).

Durante a realização dessa pesquisa, tive momentos de contentamento e outros de frustração. A alegria tem origem no aprofundamento de meus conhecimentos, na busca por novos saberes, na procura por respostas que acalmassem minhas inquietações, na aventura do querer ir além. A frustração instalou-se em momentos que percebi a realidade, verdadeira e dura, que se mostrou no cotidiano escolar, quando me deparei com a repetição, as receitas prontas, as instruções “siga o modelo”, o medo e o desinteresse estudantil. Notei que os mesmos motivos que me trouxeram prazer na realização desse trabalho são os componentes que faltam para os estudantes ambicionarem vôos mais altos pelos vales dos saberes matemáticos. Incentivos e convites a aventurarem-se, também não percebi. Isso realmente me entristeceu! Como eles poderão sentir-se à vontade para desejar ir mais longe em seus conhecimentos, se nem mesmo sabem se isso é aprazível? Se tudo que aprenderam na escola é que precisam seguir exatamente o que a professora falou para tirarem boas notas?

Talvez muitos professores tentem argumentar que a falta de recursos das escolas públicas não oferece condições para que eles incentivem seus alunos a se arriscarem mais. Eu não creio nisso. Imagino que possa ser uma desculpa para o comodismo de alguns mestres. De acordo com Alves (2003), não é a falta de recursos que faz da educação uma máquina de manipulação. Os recursos somente fariam de nós formigas disciplinadas e trabalhadoras.

Assim, penso que esta pesquisa proporcionou alguns subsídios para que outros professores também repensem suas práticas docentes, a relevância de suas palavras e atitudes e, sobretudo, o que pretendem fazer de seus alunos: “formigas disciplinadas” ou “pescadores do saber”?

Quando pensei em realizar esta pesquisa para responder minhas inquietações não podia imaginar que encontraria também respostas que eu não buscava. Não podia supor o quanto viajaria pelo mundo da reflexão, tampouco prever que, analisando outra professora e sua turma, refletiria sobre minha própria prática, sobre a linguagem que utilizo em sala de aula, sobre minha postura docente e sobre minhas intenções em relação aos meus próprios alunos. Observando e pensando sobre as atitudes de uma outra professora de Matemática, analisei e refleti sobre minha própria conduta profissional.

As respostas que eu tanto busquei são importantes para mim e para este trabalho, mas ficaram pequenas diante das inúmeras oportunidades de reflexão que me proporcionaram em sua busca. É como quem deseja observar o mar em sua magnitude, mas, juntamente, tem a oportunidade de admirar um sublime pôr-do-sol, contemplando o esplendor da natureza.

Todavia, irei me restringir aos resultados das questões que me conduziram até aqui, apontando as dificuldades evidenciadas pelos alunos no uso da simbologia e no trânsito entre os registros de representação, discutindo possíveis causas para os problemas, bem como as incertezas quanto ao que perdura do uso de uma determinada simbologia em diferentes contextos.

Como já foi exposto no capítulo anterior, as respostas ao problema central, acerca das maiores dificuldades percebidas no uso da simbologia matemática em relação aos conteúdos de Teoria dos Conjuntos, Intervalos e Funções se apresentaram, de modo mais acentuado, na manipulação direta ou indireta da representação de conjuntos por compreensão. Acredito que tais dificuldades emergiram nos momentos em que a linguagem simbólica envolvida nessas representações foi “traduzida”, permitindo aos alunos uma posição cômoda, em que esperavam as respostas prontas, além de exercícios do tipo “siga o modelo”. Contudo, não creio que isso tenha ocorrido somente agora, no 1° ano do Ensino Médio. Receio que esse fato possa ser reincidente, visto que a linguagem matemática aparece muito antes do Ensino Médio, no entanto, continua provocando dúvidas e resistência discente na sua utilização. Da mesma forma, a falta de ênfase no trânsito entre os diferentes registros de representação ocasiona as dificuldades discentes em perceber, por exemplo, que as representações algébrica ou gráfica de uma mesma função, são, na verdade, duas maneiras diversas de enxergar o mesmo objeto matemático.

Com isso, penso que uma maior ênfase no trânsito entre os diferentes registros de representação, aliada à redução da “tradução” feita pela professora, possa ser uma maneira de minimizar as dificuldades discentes percebidas.

Há que se considerar que esse trabalho foi realizado apenas com uma turma e uma professora e que, portanto, tenho consciência de que não é possível fazer generalizações sobre as conclusões. Possivelmente com outras turmas ou outros professores, apareceriam resultados diversos. Por conseguinte, penso que o estudo desse tema possa ser retomado, para que outras situações sejam analisadas.

De acordo com Alves (2003), nas escolas, as crianças são ensinadas e aprendem tão bem que se tornam incapazes de pensar de forma diferente. Para elas, se existe uma maneira "correta" de fazer as coisas, por que se dar ao trabalho de explorar outros caminhos? Basta repetir daquele modo que foi ensinado. "O saber sedimentado nos poupa dos riscos da aventura de pensar" (ALVES, 2003, p.29). Além de que o conhecimento já testado, automatizado, poupa trabalho, evita erros e torna desnecessário o pensamento. Com isso, se aprende para não precisar pensar, sabendo-se a receita, basta segui-la quando surgir a ocasião.

Com isso, considero que, com o passar do tempo, o que perdura dos conhecimentos matemáticos não permite nem mesmo o entendimento dos símbolos, muito menos a sua utilização contextualizada.

No que tange a aparente confusão entre os símbolos que expressam relação de ordem, penso que, apesar de sua apresentação ocorrer no Ensino Fundamental e serem utilizados em outros conteúdos como uma "ferramenta de apoio", as dúvidas no seu uso surgem na tentativa docente de auxiliar os alunos, ao lhes fornecer respostas prontas por meio da "tradução" da linguagem matemática.

No meu entender, os esquecimentos relativos a linguagem matemática refletem a sua falta de significado na vida do aluno. Nesse sentido, Alves (2003) comenta que

> Dentro de pouco tempo quase tudo aquilo que lhes foi aparentemente ensinado terá sido esquecido. Não por burrice. Mas por inteligência. O corpo não suporta carregar o peso de um conhecimento morto que ele não consegue integrar com a vida (p.24).

A respeito disso, penso que os atuais métodos de ensino abarcam parte da responsabilidade pelo esquecimento, pela falta de significado e, até mesmo, pelo desinteresse dos alunos. Essas idéias são claramente evidenciadas nas palavras de Alves (2003):

> Os métodos clássicos de tortura escolar como a palmatória e a vara já foram abolidos. Mas poderá haver sofrimento maior para uma criança ou para um adolescente que ser forçado a mover-se numa floresta de informações que ele não consegue compreender, e que nenhuma relação parecem ter com a sua vida? (p.18)

É inegável que nós, professores, algumas vezes, pecamos por excesso. Excesso de zelo talvez. Na tentativa de proteger e auxiliar, da melhor maneira possível, acabamos por fornecer o resultado pronto e, mais tarde, nos indignamos porque nosso aluno não aprendeu a resolver a questão e obter o resultado sozinho. O excesso de proteção faz de nós obstáculos para que aprendam a lidar sozinhos com as mais diversas situações. Quem sabe é na ânsia de que realmente aprendam algo, que mostramos onde está a resposta e esquecemos de mostrar-lhes que caminhos levam a ela. Talvez façamos assim por enxergá-los como seres frágeis, vítimas das diferenças sociais. Quiçá por inúmeras outras razões.

No cotidiano escolar, intentando perceber o aprendizado discente, classificamos as respostas de nossos alunos como certas ou erradas. Todavia, a vida não é feita de respostas certas ou erradas! Indiretamente, acabamos ensinando isso aos alunos, que tudo se resume ao erro ou ao acerto. E, assim, esquecemos que ao aprender as respostas certas, os estudantes desaprendem a arte de arriscarse a errar, sem perceber que, na prática, milhares de tentativas erradas são feitas antes que se chegue à resposta certa (ALVES, 2003).

Nesse sentido, o mesmo autor comenta:

> Espero que haja um dia em que os alunos sejam avaliados também pela ousadia de seus vôos! Teses serão aprovadas a despeito do seu final insólito: “Assim, ao fim de todas estas pesquisas, concluímos que todas as nossas hipóteses estavam erradas!” Pois isso também é conhecimento (ALVES, 2003, p.30).

Com isso, percebo que esta pesquisa é apenas o início de outras que poderão surgir, pois há que se aprofundar nesse tipo de estudo, ambicionando, talvez, investigar como ocorre o início da alfabetização matemática, especialmente enfocando símbolos que vão proporcionar, mais tarde, o suporte para a Teoria dos Conjuntos, e quais significados da linguagem matemática irão perdurar no decorrer da vida escolar. Também vejo necessidade de se averiguar o quanto a linguagem matemática é significativa para o aluno, visto que é essa expressividade que pode impulsionar o interesse discente no uso de tal linguagem.

Nesse sentido, quero esclarecer que não tenho a pretensão de finalizar esse trabalho, pois acredito que uma pesquisa desse tipo não é conclusiva, e sim o primeiro passo para o surgimento de outras, ainda mais profundas e elucidativas, isso porque percebo a realização desta dissertação como a descoberta da ponta de um *“iceberg”*, tendo, assim, plena consciência de que a maior parte dele ainda não foi revelada.

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. O Planejamento de Pesquisas Qualitativas. In: ALVES-MAZZOTTI, A.; GEWANDSNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1998, p. 107-203.

ALVES, Rubem. **A alegria de ensinar**. Campinas: Papirus, 2003.

BAQUERO, Ricardo. **Vygotsky e a aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

BAYER, Arno. **Causas do Baixo Rendimento em Matemática do Aluno que Ingressa na Universidade do Rio Grande do Sul.** 1997. Tese (Doutorado em Ciências da Educação) - Faculdad de Ciências de la Educación, Universidad Pontifícia de Salamanca, Salamanca, 1997.

BOGDAN,R.C.;BIKLEN,S.K. **Investigação Qualitativa e Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Disponível em <http://www.mec.gov.br/seb/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acesso em: 06 nov. 2004.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

CATALÁN, Maria Ángeles R. **Discurso y Educación**. Sevilha: MERGABLUM, 2001.

COELHO NETTO, J. T. **Semiótica, Informação e Comunicação**. São Paulo: Perspectiva, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: uma visão do estado da arte. **Proposições**, São Paulo, v.4, n.10, p. 7-17, março 1993.

DANYLUK, Ocsana. **Alfabetização Matemática:** o cotidiano da vida escolar. Caxias do Sul: EDUCS, 1991.

DANYLUK, Ocsana. **Alfabetização Matemática:** as primeiras manifestações da escrita infantil. Porto Alegre: Sulina, 1998.

DICIONÁRIO Michaelis [CD-ROM]. São Paulo: Melhoramentos, 2002.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia D.A. (Org). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas.** São Paulo: Makron, 1997.

GORDON, W.T; LUBELL, A. **Saussure para Principiantes**. Buenos Aires: Era Naciente, 2000.

GRANDO, Neiva. MORETTI, Méricles. Conceito de volume: referências de diferentes cotidianos para escola. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2003. p. 116-135.

GRANDO, Neiva. **O Campo Conceitual de Espaço na Escola e em Outros Contextos Culturais**. 1998. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1998.

IZAR, Sebastião A.; TADINI, Wilson M. **Teoria Axiomática dos Conjuntos**: uma introdução. São José do Rio Preto: UNESP, 1998.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

KLÜSENER, Renita. Ler, Escrever e Compreender a Matemática, ao Invés de Tropeçar nos Símbolos. In: NEVES, Iara et al. **Ler e Escrever:** compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: Editora da Universidade, 2001. p. 177-191.

KOCH, Ingedore Grunfeld Villaça. **A inter-ação pela linguagem**. São Paulo: Contexto, 2003.

LABORDE, Colette. Language and Mathematics. In: NESHER, P; KILPATRICK, J. **Mathematics and Cognition**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

LABORDE, Colette. Duas utilizações complementares da dimensão social nas situações de aprendizado da Matemática. In: GARNIER, Catherine; BEDNARZ, Nadine, ULANOVSKAYA, Irina et al. **Após Vygotsky e Piaget**: perspectiva social e construtivista - escolas russa e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.29-46.

LA ROSA, Jorge de. **Psicologia e Educação:** o significado do aprender. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

LINCOLN, Y.S.; GUBA, E.G. **Naturalistic Inquiry**. London: Sage, 1985.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna:** análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1998.

MACHADO, Sílvia D.A. (Org). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

MALTA, Iaci. Linguagem, Leitura e Matemática. In: CURY, Helena N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos e propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 41-62.

MARANHÃO Maria Cristina; IGLIORI, Sônia. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, Sílvia D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.57-70.

MAZZEI, Luís D. **Dificuldades de Ensino e de Aprendizagem do Conhecimento Matemático**: analisando a linguagem empregada por professores e alunos. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

MORAES, R.; GALIAZZI, M.C. Tomando Conta do Ambiente em que se Vive: aprendizagem e apropriação de discursos pela linguagem. In: ENCONTRO INTERNACIONAL DE LINGUAGEM, CULTURA E COGNIÇÃO: REFLEXÕES PARA O ENSINO, 2., 2003, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte, UFMG, 2003. CD-ROM. p. 1-14.

MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos registros de representação na aprendizagem de Matemática. **Contrapontos,** Itajaí, v.2, n.6, p. 343-362, set./dez. 2002.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. Campinas: Papirus, 2000.

NEHRING, Cátia. **A Multiplicação e seus Registros de Representação nas Séries Iniciais**. 1996. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade de Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1996.

PASCUAL-LEONE, Juan. Piaget, Vygotski e a função do símbolo. In: TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Liliana. **Substratum:** Temas fundamentais em psicologia e educação. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. v.1. p. 57-81.

PATTON, M.Q. **Qualitative Evoluation Methods**. London:Sage, 1980.

PIERCE, C.S. **Semiótica**. São Paulo:Perspectiva, 2000.

POETZSCHER, C. C. B. **Linguagem e seus Condicionamentos Sociais**. Rio de Janeiro: Revinter, 1994.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é Semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2003.

SILVA, Circe M. S. **No Paraíso dos Símbolos**: surgimento da lógica e teoria dos conjuntos no Brasil. Disponível em: <http://www.ufes.br/circe/administrador/artigos/arquivos/artigo60.htm> Acesso em: 24 nov. 2004.

SOUZA, Roberta N. S.; CORDEIRO, Maria Helena. Os registros de representação como ferramenta do pensamento na resolução de problemas matemáticos que envolvem o conceito de Função Linear. **Contrapontos,** Itajaí, v.2, n.6, p.439-448, set./dez. 2002.

SOUZA, Roberta N. S.; CORDEIRO, Maria Helena; MORETTI, Méricles T. Desenvolvendo o conceito de função linear: análise de uma experiência didática utilizando diferentes registros de representações semióticas. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 8. 2004, Recife. **Anais...** Recife, UFPE, 2004. CD-ROM.

SUPPES, Patrick. **Teoria Axiomática de Conjuntos**. Cali: Norma, 1968.

TINOCO, Lucia A. A. (Coord). **Construindo o Conceito de Função**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática / UFRJ – Projeto Fundão – SPEC / PADCT / CAPES, 3ª. edição, 2001.

VIZOLLI, Idemar. Registro de representação semiótica no estudo de porcentagem. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos. **Anais**... São Paulo: SBEM, 2003. CD-ROM.

VYGOTSKI, L.S. **A Formação Social da Mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

VYGOTSKI, L.S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

ZUFFI, Edna M. **O Tema "Funções" e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio:** por uma Aprendizagem de Significados. 1999. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

APÊNDICES

APÊNDICE A – EXEMPLO DE OBSERVAÇÃO DE AULA

Dados de Identificação:

Série: 1ª série do Ensino Médio Turno: Manhã
Data/Horários da observação: 19/05/04 / 9h30min – 10h15min (terceiro período)

Realizei a descrição da aula, utilizando "P" para identificar falas da professora, "A" para identificar falas de aluno, aluna ou alunos, "Q" para identificar o que foi escrito no quadro pela professora, sendo uma cópia fiel do que foi escrito. Os meus comentários estão entre colchetes.

[A aula começa com muita conversa. Todos os alunos falam ao mesmo tempo, quase sem parar. A professora pede silêncio]

P: Ontem ficou algum exercício?
A: Não.
P: Hoje eu vou dar a função do 1º grau. A gente vai construir o gráfico de uma função do 1º grau.
A: Eu detesto essa coisa de gráfico!
[A turma está bastante agitada, conversando muito. Em seguida a professora começa a escrever o novo conteúdo no quadro]
Q: Função do 1º grau:

Dados os n^{os} reais a e b, com $a \neq 0$, chama-se função do 1º grau a função f: $R \rightarrow R$, definida por

$f(x) = ax + b$
ou
$y = ax + b$

Onde

a: coeficiente angular (determina se a função é crescente (a>0) ou se a função é decrescente (a<0)).
b: coeficiente linear (determina o ponto onde a reta corta o eixo y).

P: Tem coisa no quadro para copiar!
[Os alunos conversam sem parar, pouco prestam atenção. A turma mostra-se bastante agitada]
Q: Por exemplo:

a) $f(x) = 5x - 2$ b) $y = x + 3$ c) $f(x) = -\frac{x}{2}$ d) $f(x) = x$

[Os alunos continuam conversando. A professora circula entre as classes enquanto copiam]
[Há muito barulho na sala]
[Cerca de cinco minutos depois o barulho diminui]

P: Deu? [Para certificar-se que já haviam terminado de copiar]
[Sem aguardar resposta, a professora prossegue a aula, explicando o novo conteúdo]
P: Função do 1º grau.
P: Eu vou dizer que é uma função do 1º grau quando o a e o b forem números reais e o a for diferente de zero. Além disso, ela é de 1º grau porque o expoente do x é um.
P O a a gente vai chamar de coeficiente angular e o b de coeficiente linear.
[Se dirigindo aos exemplos do quadro, a professora começa a explicar pedindo a participação da turma]
[Apontando para o exemplo a) f(x) = 5x – 2]
P: Quem é que está multiplicando o x?
A:cinco.
P: Então a é 5.
P: E o meu b é o número que não tem variável. Quem é o b?
A: menos dois.
P: Então o coeficiente angular dessa função é cinco e o coeficiente linear é menos dois!
[As perguntas sobre os coeficientes angular e linear se sucedem nos demais exemplos da mesma forma. A professora pergunta quem é o a e quem é o b, e os alunos respondem. No exemplo c) f(x) = $-\frac{x}{2}$, há dúvidas sobre o coeficiente angular. Inicialmente respondem menos dois. A professora pergunta se estão certos disso, e apenas um aluno diz menos um meio.]
[Terminada a determinação dos coeficientes angular e linear a professora continua introduzindo a construção de gráficos da função de 1º grau]
P: O segundo passo agora é montar o gráfico.
P: O gráfico da função de 1º grau vai ser uma reta, e para fazer o gráfico a gente vai atribuir valores para x.
P: Vamos fazer uma tabelinha de x e y.
[Alunos no fundo da sala demonstram não entender o que a professora falou por último. Contudo há muita conversa na sala, inclusive alunos do fundo conversavam até um instante atrás]
A: Ãhh? O quê?
A: Sei lá! Não entendi.
Q: Gráfico

a) f(x) = x + 1

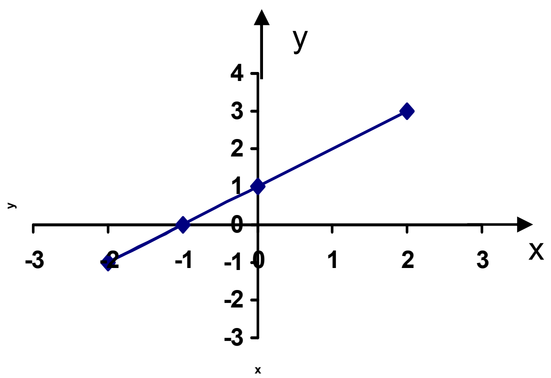
[A professora solicitou que os alunos dissessem valores para x, de preferência pequenos. A turma dizia um valor para o x e a professora explicava como se obtém o y, perguntando quanto seria o y se colocasse aquele valor no lugar do x. E assim completaram a tabela abaixo]

x	y	
3	4	→ (3,4)
2	3	→ (2,3)
0	1	→ (0,1)
-2	-1	→ (-2,-1)
-1	0	→ (-1,0)

[A professora explicou que para cada valor atribuído ao x se encontra um valor de y, e estes dois valores formam um par ordenado, o qual resulta num ponto do gráfico.]

P: Onde tem x eu coloco o valor. Então, três mais um...[pausa], o y é quatro. [Completando a tabela. Segue o mesmo processo para os outros valores.]
P: Estes dois valores [referindo-se aos valores de x e y] formam um par ordenado.
P: Com estes pares ordenados, vamos construir o gráfico.
A: Porque o x é 3?
P: É chute. A gente chuta um valor para o x e acha o y.
A: Sora eu não entendi!!
[Sem responder para aluna]
P: Quando o x é três ....[é interrompida por outro aluno]
A: A gente Poe o número que quiser?
P: O que quiser.
[Continua...]
P: Então x é três e meu y é quatro.
[A professora começa traçar os eixos do gráfico e localiza o par ordenado (3,4)]
P: Isso a gente já fazia no plano cartesiano, lembram?
[Ao marcar o par ordenado (0,1) diz aos alunos:]
P: Quando um [valor] é zero a gente marca em cima do eixo no outro valor.

Q:



P: É uma reta.
A: E se não der uma reta, está errado?
P: Se não for uma reta está errado.
P: Olhando para o gráfico, qual é o domínio?
P: O domínio eu vou olhar no eixo x.
[Os alunos não respondem]
P: Eu limitei o x?
A: Não.
P: Então?
[Uma aluna responde com ar de incerteza, quase perguntando]
A: Todos os reais?
P: É. Todos os números reais.
P: E a imagem?
A Todos os reais também.
P: Na função de 1º grau o domínio e a imagem são todos os reais, certo?

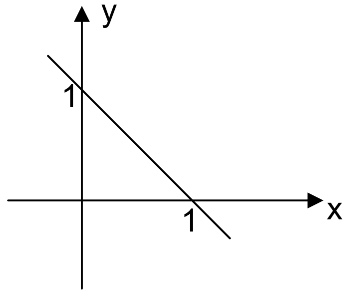
[Nenhum comentário dos alunos]
P: Olhando o coeficiente angular e o coeficiente linear o que a gente consegue descobrir?
[Nenhuma manifestação dos alunos.]
P: O meu a é ....
A: um.
P: Se o a é maior que zero a função é crescente. Se o a é menor que zero a função é decrescente. Então essa função é ...
A: Crescente [Somente uma aluna responde]
A: Agora não entendi mais nada! [Um aluno no fundo da sala resmunga em voz alta]
[A professora repete a explicação sobre o coeficiente angular positivo e negativo]
[Alguns minutos depois...]
P: O coeficiente linear mostra onde a reta corta o eixo y.
A: Ai! É muita informação! [Um aluno perto de mim reclama em voz baixa.]
[Há muita conversa na sala. Barulho constante.]
P: Olhando no gráfico, onde está cortando o eixo y?
A: No um.
P: Então um não é o b?
A: É! [alguns]
A: Ah! Agora tá! [um aluno]
A: Não entendi nada! [Outra aluna]
[Os alunos reclamam que não entendem, entretanto não prestam atenção nas explicações ou ouvem somente parte delas]
P: O ponto onde a reta corta o eixo y é sempre o b.
A: Sempre?
P: Sempre.
P: A gente não vai precisar de vários pontos. Na verdade a gente vai precisar de dois pontos. Mas são dois pontos especiais.
P: Um ponto é onde a reta corta o eixo x, que vamos chamar de zero da função. E o outro é o coeficiente linear. Só estes dois!
[A professora indica o zero da função no gráfico com uma seta e escreve “zero da função”.]
Q: b) $f(x) = -x + 1$

$b = 1 \rightarrow$ corta o eixo $y = 1$
Z.F. $\rightarrow$ $-x + 1 = 0$
$-x = -1 \quad . (-1)$
$x = 1 \rightarrow$ Z. F.

Obs: Zero da Função

Z.F. $\rightarrow$ Geometricamente o zero da função é o ponto onde a reta corta o eixo x. (fazer $y = 0$)

P: Então com o ZF e o coeficiente linear eu consigo fazer o gráfico.
Q:



P: O meu <u>a</u> é positivo ou negativo?
A: Negativo.
P: O que que eu disse? Se o meu a é negativo, a função é ...
A: Decrescente.
P: Nesse segundo caso eu só usei dois pontos. Então não precisa fazer tabela. Só calcula os dois pontos. Achando esses dois pontos é só unir que a gente acha a reta da função de 1º grau.
P: Dúvidas?
[Ninguém se manifesta. Está quase no horário do intervalo. Os alunos estão impacientes. Toca o sinal e termina o período.]

APÊNDICE B - TESTE APLICADO AOS ALUNOS

Prezado Aluno:

Este teste complementa um trabalho de pesquisa que está sendo realizado no curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, com o objetivo de compreender as razões das dificuldades encontradas pelos alunos no entendimento e utilização da simbologia matemática Com base nisso, conto com a sua colaboração, agradecendo desde já sua atenção.

Observação: Nas questões em que você não souber responder escreva "não sei".

Nome do aluno:____

1) Represente os conjuntos abaixo por extensão:

   a) A = {$x \in$ N/ x é número ímpar menor que 6}

   b) B = {$x \in$ Z/ $-1 \leq x < 3$}

2) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4}, B = {$x \in$ N/ x é número par menor que 8} e C = {$x \in$ Z/ $-3 < x \leq 0$}, determine:

   a) $A \cup B =$

   b) $B \cap C =$

3) Escreva com as suas palavras o que você entende por "$2 \in R$".

4) Represente o conjunto dos números naturais pares.

5) Escreva com as suas palavras o que representa {$x \in$ Z/ $-2 \leq x < 3$}.

6) Represente por compreensão o conjunto formado pelos números 1, 2, 3 e 4.

7) Represente, na reta real, os intervalos abaixo:

   a) $[-2;7[$

   b) $\{x \in R/-1 \leq x < 3\}$

   c) $(-3;0]$

   d) $\{x \in R/-1 \leq x < 3\} \cap (-3;0]$

   e) $[-2;7[\cup (-3;0]$

8) Usando a **notação de conjuntos**, escreva os seguintes intervalos:

a) 

b) 

9) Determine $A \cap B$, quando:

   a) $A = \{x \in R/\ x \leq 1\}$ e $B = \{x \in R/-1 < x < 2\}$

   b) $A = (-\infty\ ;\ 3)$ e $B = [2\ ;\ +\infty[$

10) Determine $A \cup B$, quando:

a) $A = \{x \in R / 1 < x < 4\}$ e $B = \{x \in R / 0 \leq x < 2\}$

b) A = [1 ; 3[e B =]-1 ; 0[

11) Construa o gráfico das seguintes funções, sabendo que o domínio de cada uma delas é o conjunto dos números reais:

a) $f(x) = x - 3$

b) $y = 4$

APÊNDICE C – DISTRIBUIÇÃO MATRICIAL DE ALUNOS

Questão	Acerto	Erro	“Não sei”	Observar
1a	1-2-3-4-5-6-9-10-11-14-17-18-19-23-29-30-31-32-33	7-8-12-13-15-16-20-22-24-27	21-25-28	12 – escreveu em língua corrente
1b	1-2-3-4-5-6-7-9-11-14-16-17-18-19-23-28-29-30-32-33	8-10-13-20-22-26-27-31	15-21-24-25	12 – escreveu em língua corrente
2a	1-2-3-4-5-6-7-9-10-14-16-17-18-19-22-23-26-28-29-30-31-32-33	8-11-12-15-21-24-27	13-20-25	3-22- repetiram elementos
2b	1-3-5-7-10-18-23-29-31	2-4-6-8-9-11-12-14-15-16-17-19-21-22-24-26-27-28-30-32-33	13-20-25	2-4-6-9-14-17-19-21-26-28-30-32-33- representação do vazio
3	1-2-4-5-6-7-9-10-12-13-14-15-16-18-27-28-30-31-32-33	3-17-19-22-24-26-29	8-11-20-21-23-25	19-29- “grupo” dos reais
4	5-6-7-9-10-18-22-23-26-27-29-31-33	1-2-3-4-11-12-14-16-17-19-20-28-30-32	8-13-15-21-24-25	2-4-11-12-14-16-17-19-28-32- pares sem o zero
5	1-2-4-6-7-11-14-16-17-19-20-22-26-31	5-8-9-10-12-13-15-18-27-29-30-32-33	3-21-23-24-25-28	1-4-11-19-20- tradução literal 32- o “conjunto” x pertence a Z
6	4-5-9-11-14-23-31-33	1-2-3-6-7-8-10-13-15-17-18-19-26-27-29-32	12-15-20-21-22-24-25-28-30	7-8-10-18-19-26-27- 29-32- $1 \geq x \leq 4$
7a	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-13-14-15-16-17-18-19-20-22-23-25-26-27-29-30-31-32-33	28	12-21-24	
7b	4-5-6-7-8-9-10-11-14-16-17-19-22-26-27-30-31	1-2-3-15-18-23-29-32-33	12-13-20-21-24-25-28	
7c	1-2-4-5-6-7-10-11-14-15-16-17-18-19-20-23-25-26-27-29-30-31-32-33	3-8-9-13-22	12-21-24	
7d	33	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-14-16-17-18-19-25-26-27-29-30-31-32	12-13-15-20-21-22-23-24-28	5-6-7-9-14-16-19-26-31- representação algébrica de intervalos
7e	6-30-33	1-2-3-4-5-7-8-9-10-11-13-14-15-16-17-18-19-20-23-25-26-27-29-31-32	12-21-22-24-28	3-5-9-14-16-19-31-32- representação algébrica de intervalos
8a	4-5-9-10-11-14-17-19-21-22-23-26-30	1-2-3-6-7-8-12-13-18-20-25-27-28-30-32-33	15-16-24-29	2-3-8-18-20-25-28-30-32-33- not. Intervalos 6- escreveu em língua corrente
8b	4-5-9-10-11-17-19-22-23-26-30	1-2-3-6-7-8-12-14-18-20-21-25-27-28-30-32-33	13-15-16-24-29	2-3-8-18-20-25-28-30-32-33- not. Intervalos 6- escreveu em língua corrente 14- $[0; 3,2) = \{x \in R / 0 \leq x < 4\}$
9a	9-19	1-2-4-5-6-7-8-10-14-16-17-18-20-21-23-25-26-27-29-30-31-32-33	3-11-12-13-15-22-24-28	9-19- not. Intervalos 14- usou chaves

9b	1-2-4-5-7-9-10-13-14-19-29	3-6-8-12-17-18-20-21-23-25-26-27-30-31-32-33	11-15-16-22-24-28	19- not. Intervalos
10a	5-9-10-19-26-30-31-32	1-2-3-4-6-7-8-14-17-18-21-23-25-27-29-33	11-12-13-15-16-20-22-24-28	5-9-10-19-26-30-31-32- not. Intervalos
10b	4-5-6-7-9-10-13-14-19-23-26-29-30-33	1-2-3-8-12-15-17-18-21-25-27-31-32	11-16-20-22-24-28	
11a	1-2-4-6-7-9-10-11-14-16-17-18-19-20-22-23-29-30-31-32-33	3-5-8-12-13-15-21-24-25-26-28		17- os eixos não têm indicações
11b	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-16-17-18-19-20-21-22-25-26-28-29-30-31-32-33	15-23-24-27		17- os eixos não têm indicações

Observação: os números, em cada coluna, são os identificadores dos alunos.

APÊNDICE D – TRANSCRIÇÃO DAS ENTREVISTAS

TRANSCRIÇÃO DAS ENTREVISTAS - Nível A

E: Entrevistador
A: Aluno

Aluno A:

E: O que você achou das questões do teste?
A: Ah! Pra mim foi normal! Eu tinha estudado. Foi legal!
E: Estava fácil?
A: Tava. Até que tava fácil alguns exercícios. Tava legal.
E: O fato de poder olhar no caderno ajudou ou se você não olhasse se sairia bem?
A: Ajudou, porque aí me lembrou algumas coisas que eu tinha esquecido [...]
E: Arã.
A: [...] de alguns sinais que eu tinha esquecido. Aí me ajudou bastante.
E: Você lembra do que tinha esquecido, o que você teve que olhar no caderno?
A: Ah! Foi aqueles sinais, assim, agora eu não me recordo muito. Se eu olhar no caderno eu lembro, entendeu?
E: Algum símbolo?
A: É, algum símbolo. Daí fica difícil, sem tu olhar, tu te lembrar, entendeu? Tem que olhar, dá uma revisada.
E: Entendo. Você pode representar o conjunto vazio? Você lembra?
A: Ih!
E: Só se você lembrar.
A: Não lembro.
E: Não lembra? Está certo. Não faz mal.
E: Se eu pedir para você representar um conjunto por extensão, você sabe o que é um conjunto por extensão?
[O aluno balança a cabeça negativamente]
E: Não? E por compreensão?
[O aluno balança a cabeça negativamente outra vez]
E: Também não? Ok! Não lembra o que é?
A: Não.
E: Certo. Vou te dar um exemplo de cada. Conjunto por extensão é a representação de um conjunto, na qual listamos os seus elementos. Por exemplo, zero, um, dois, três, quatro. E no conjunto por compreensão, o conjunto será representado por meio de uma propriedade comum aos seus elementos. Por exemplo, x pertence aos naturais, tal que x é número par.
A: Ah, tá!
E: Qual destas representações você acha mais fácil?
A: Ah! Por extensão!
E: É o que você utiliza mais?
A: É.
E: Certo.
E: Explica com as tuas palavras o que representa este conjunto que eu escrevi aqui.
A: Nem lembro mais.
E: Não lembra? Quer tentar?

A: Não. Não lembro mais. Bah! Não lembro mesmo!
E: Vou tentar te ajudar. O x pertence [pausa]
A: [...] isso é pertence, a [...]
E: Esse é o conjunto dos números [pausa]
E: [...] inteiros.
A: [...] inteiros, é!
E: tal que [pausa]
A: [...] tal que, um menos [...] é [...]
E: menos um.
A: [...] menos um é menor ou igual que x que é menor que cinco.
E: Isso.
A: Esse daí eu lembro! O problema é esses sinais [...] é pior.
E: Essa parte aqui do conjunto você lembra. O que você não lembra é como se diz a parte inicial?
A: É. A parte inicial por causa dos símbolos, por isso que o caderno ajudou.
E: Entendi. Explica com as suas palavras o que você entende por "Linguagem Matemática".
A: Sei lá! O jeito que tu olha e tu entende. Do jeito que ta ali, cada pessoa tem um jeito de olhar e entender. Acho que seja isso.
E: Arã. Você pode representar o conjunto dos números naturais pares?
A: [...] dois, quatro, seis, oito, dez, doze e assim vai indo?
E: Acho que falta fechar o conjunto deste lado. [...] Certo. [...] Os números pares [...], não está faltando nenhum aqui? Algum que você tenha esquecido?
A: O zero.
E: O zero, não é? O zero não é número par?
A: [inaudível]
E: Quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever no quadro, por exemplo, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?
A: Não, porque a professora de Matemática, pelo menos essa aqui, quando ela explica, ela já fala o que significa, entendeu? E na hora da explicação ela mesmo já fala, tipo: x alguma coisa igual aos inteiros, entendeu? Então ela já fala. Ela não põe o símbolo [no quadro] e vai explicando [o conteúdo], ela vai falando o que é cada coisa.
E: E quando vocês fazem algum trabalho ou teste que venham escritos em linguagem simbólica, vocês chamam a professora para perguntar o que significa?
A: Às vezes sim.
E: E quando você não entende algo que a professora explica em aula, você pergunta para ela ou para alguém ou não és de perguntar?
A: Não! Eu pergunto. Às vezes eu falo: "Ah! Professora não entendi! Me explica novamente". Eu sempre pergunto, porque o que adianta eu ficar com dúvida? Então eu pergunto pra ela.
E: Certo.
E: Bem [...], você lembra qual é o conjunto dos números reais, não é?
[O aluno balança a cabeça afirmativamente]
E: Você poderia me dizer quais são os números que existem entre um e quatro?
A: Tipo dois e três?
E: Dois e três. Tem mais algum? Reais entre um e quatro sem considerar o um e o quatro.
A: Sei lá! E tem aqueles lá [...] [risos]
E: Aqueles lá? Quais?

A: [...] aqueles quebradinhos, sabe? [...] Aqueles negócio lá que na reta a gente até sabe.
E: Então, você concorda comigo que entre o um e o quatro existem muitos números reais?
A: Muitos números.
E: Poderíamos dizer que são infinitos números ali no meio?
A: Ah! Infinitos não!
E: Não?
A: Não.
E: Está bem. Você gosta da parte de gráficos? De fazer os gráficos?
A: Eu gosto. É o que eu mais gosto de fazer.
E: Porque?
A: Ah! É gostoso fazer. É legal! Ao mesmo tempo tu faz e tu te diverte fazendo. Porque tem exercícios que tu fica ali matutando, matutando, matutando, e é complicado, acaba sempre se complicando. E já no gráfico não. Tu resolve a conta, se a conta tiver certa tu consegue fazer o gráfico direitinho. É legal!
E: Na questão 11 do teste era para fazer gráficos de duas funções, uma constante e outra do 1º grau. Você fez os dois gráficos corretamente. Mas se a função dada fosse f(x) = 2x-1, como ficaria o gráfico? Você pode fazer o gráfico dessa função para mim?
A: [...] Bah, peraí! Deixa eu me lembrar. Eu só lembro depois que vejo alguma coisa.
[O aluno olha a questão resolvida por ele no teste e inicia a construção do gráfico.]
A: Ah! Como é que vai ficar? Ah! Não sei!
[Observando o desenvolvimento do aluno intervenho]
E: Dois x mais um é igual a três x? Mas esse número aqui não não tem x.
A: Ah, não! Peraí!
E: E era menos um, não é?
A: Era menos passa mais.
E: E onde está o sinal de igualdade?
A: Ah! É! Aqui! Dois x é igual a um. Dois x, igual [...], peraí, [...] x igual a um sobre dois.
E: E como fica o gráfico?
A: [inaudível]
A: É constante, daí. Ah, não! Não é! Tá certo, tem que pegar o linear que é menos um. Então seria menos um aqui, ó.
E: E o menos um é aqui?
A: Ah, não! O menos um não é aqui! Bah! Eu tô muito nervosa! Tô nervosa!
E: Calma! Não precisa ficar nervosa. Certo?
E: Voltando à questão 2b. A tua resposta foi o conjunto vazio, o qual você representou assim e desta outra forma. Esses dois símbolos representam a mesma coisa?
A: Tu sabe que eu nem sei [...], [risos]
E: Não lembra mais?
A: Eu coloquei assim porque se não fosse esse aqui, era esse outro aqui, entendeu?
E: Arã.
A: Porque eu lembro que uma vez eu vi.
E: Mas esse conjunto, assim como você representou, tem alguma coisa dentro, não é? E se ele tem alguma coisa dentro, então não é vazio, certo? Nesse caso tem alguma coisa errada aqui. [pausa] Então, quem sabe, ele é assim?
A:É.

E: Ou ainda, assim. E você acabou misturando os dois e escrevendo um símbolo dentro do outro, certo?
A: [risos]
E: A questão 9 do teste apresentava o seguinte conjunto: x pertence ao conjunto dos números reais, tal que x estava entre menos um e dois, sem incluir o menos um e o dois. E você representou este conjunto usando chaves e listando os elementos zero e um. Será que entre o zero e o um não existem muitos outros números? E entre o um e o dois?
A: Arã.
E: Então deveria ser um intervalo, não é? E como se representa esse intervalo?
A: Nem lembro mais como é que se representa.
E: Está bem. [...] Você gosta de Matemática?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Ah! Sei lá! É uma matéria que eu me dou bem.
E: Acha fácil?
A: Eu esqueço, assim [...], tipo tu me pegar e me testar assim [...] fico nervosa e não me lembro.
E: Arã.
A: Agora, se a sora começar a explicar, assim, eu já pego rapidinho.
E: Tem facilidade, mas esquece rápido?
A: É. Eu esqueço rápido.
E: Está certo! Muito obrigada!

Aluno B:

E: Você gosta de Matemática?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Ah! É uma matéria boa! É legal de fazer.
E: Acha fácil?
A: Às vezes é fácil. Ao menos esse ano, eu tô entendendo.
E: Que bom! O que você achou das questões do teste?
A: Ah! Eu me enrolei um pouquinho numas partes, mas tava fácil. Se eu tivesse estudado mais, eu acho que teria acertado. Eu acho que não acertei muito.
E: Explica com as suas palavras o que você entende por “Linguagem Matemática”.
A: Linguagem Matemática tem a ver com cálculos,eu acho.
E: Você sabe o que é a representação de um conjunto por extensão ou por compreensão?
A: Não lembro.
E: Não lembra? Tudo bem! Vou te dar exemplos. Conjunto por extensão é a representação de um conjunto, na qual listamos os seus elementos, como esse aqui. E no conjunto por compreensão, o conjunto será representado por meio de uma propriedade comum aos seus elementos. Por exemplo, x pertence aos naturais, tal que x é número par. Lembrou?
A: Arã.
E: Qual destas representações é mais fácil de usar?
A: Extensão.

E: Tu podes representar o conjunto dos números naturais pares?
A: Pares?
E: Sim.
[O aluno representa o conjunto e ao final diz:]
A: [...] e vai.
E: E como fazemos? Escrevemos “e vai”?
A: Não. [...] Ah! Esqueci.
E: Quando o conjunto é infinito, como se faz para dizer que é infinito?
A: Não é três pontinhos?
E: É, colocamos reticências. Para indicar que continua. [...] Tem certeza de que não está faltando nenhum número nesse conjunto?
A: O zero?
E: É. O zero! E se eu pedir para você explicar com as tuas palavras o que representa este conjunto que eu escrevi aqui? Você saberia me dizer?
A: x pertence aos [...] naturais?
E: [...] inteiros.
A: [...] aos inteiros, tal que menos três é menor ou igual a x que é menor que três.
E: Certo. Na questão 7 do teste era para representar na reta real os intervalos dados. Na parte que pedia a união ou a intersecção dos intervalos, você representou os intervalos na reta real para fazer a união ou a intersecção colocando a resposta final na notação algébrica. Porque você fez assim?
A: Como assim? Não entendi.
E: Porque você não fez a resposta final na reta real?
A: Porque a sora fazia assim sempre.
E: Ok! Na questão 8, pedia para escrever intervalos usando notação de conjuntos. E você usou as notações de intervalos e conjuntos. Porque você usou as duas?
A: Talvez porque no começo, quando eu li, eu nem me lembrava dessa daqui. Daí eu me lembrei dessa outra e depois vi que tinha que fazer desse jeito.
E: Então você fez a notação de intervalos porque foi a que você lembrou primeiro. Para depois fazer a notação de conjuntos que você acha mais complicada. É isso?
A: É.
E: O que significa isso aqui? O que representa?
A: [...]
E: [pausa] É um conjunto? É um intervalo? É outra coisa?
A: Acho que é um conjunto.
E: E que elementos tem?
A: menos um e um.
E: Arã. Aqui na questão 9 do teste tinha dois intervalos dados por notação de conjuntos. Na resposta você colocou esse conjunto aqui. Será que você queria representar um conjunto?
A: Não.
E: O que tu querias fazer?
A: Eu não me lembro. Mas devia ter colocado aberto ou fechado.
E: [...] usando colchetes ou parênteses, não é?
A: Arã.
E: Então você se enganou?
A: É.
E: Qual notação você utiliza mais para representar intervalos? Notação de conjuntos ou notação de intervalos? Ou a representação na reta real?
A: A da reta.

E: Você gosta da parte dos gráficos?
A: Eu gosto.
E: Porque?
A: Porque eu achei essa parte fácil de fazer.
E: Você acertou as questões de gráficos. Mas se a função fosse outra, será que você conseguiria fazer o gráfico? Por exemplo, se fosse $f(x) = 2x - 2$, você saberia fazer o gráfico?
A: Não sei.
E: Quer tentar?
A: Tá.
[O aluno constrói o gráfico na folha em branco]
E: Certo!
E: Quando você não entende algo que a professora explica em aula, você faz perguntas ou fica quieto?
A: Eu pergunto.
E: E quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever no quadro, por exemplo, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?
A: Ela deu uma lista de símbolos no caderno, daí eu olho.
E: Então está certo! Muito obrigada!

Aluno C:

E: O que você achou das questões do teste?
A: [inaudível] [...] difícil.
E: Não estava ou estava difícil?
A: Não tava.
E: Você acha que as questões estavam de acordo com o que a professora explicou em aula?
A: Tava. [...] Algumas coisas eu não lembrava porque era bem do começo, [...], mas podia usar o caderno, aí ficou fácil.
E: Ficou fácil porque podia olhar o caderno e lembrar de coisas que tinha esquecido?
A: Arã.
E: Você gosta de Matemática?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Eu não acho que é difícil fazer conta, como é difícil português pra mim.
E: Português é mais difícil?
A: Arã.
E: E quando tem que ler e interpretar um problema fica mais difícil ou continua fácil?
A: Daí depende da interpretação. Ás vezes não fica tão difícil.
E: Na questão 3 do teste era para escrever com as tuas palavras o que você entende por estes símbolos aqui. O que representa isso aqui. Você escreveu: “que dois pertence ao grupo dos reais”. O que significa grupo para você?
A: São todos os números naturais [...] é isso.
E: Certo. Mas em aula, vocês utilizam uma outra palavra para “grupo”. Como é que a professora chama? Não é bem “grupo” a palavra que ela usa. Como é que ela diz?
A: [...]

E: É o conjunto dos números reais?
A: Conjunto.
E: Grupo e conjunto significam a mesma coisa?
A: [...] É. Acho que é.
E: Certo. Tu sabes o que é a representação de um conjunto por extensão ou por compreensão?
A: Não.
E: Não lembra?
A: Não.
E: Nem por compreensão?
A: Não.
E: Você pode representar o conjunto dos números naturais pares? Pode escrever aqui.
A: Faço fechado ali? [Referindo-se ao uso de chaves para fechar o conjunto].
E: Como você achar melhor.
A: [...] Então é [...] [inaudível]
[O aluno mostra a folha]
A: Estes são os naturais pares.
E: Está bem. Mas você fez um conjunto com números e depois escreveu algo aqui.
A: [...]
E: Quando listamos os elementos temos um conjunto representado por extensão. E quando escrevemos uma propriedade comum aos elementos do conjunto temos um conjunto representado por compreensão. Aqui você usou as duas coisas no mesmo conjunto. Está certo dessa forma?
A: Acho que pra representar os pares [...] ou faria até um determinado número e fecharia e botaria três pontos [...], ou escreveria.
E: Ok! E o zero?
A: [...]
E: O zero é par ou ímpar?
A: O zero não é neutro?
E: Não. Talvez estejas confundindo. Quando pensamos em números positivos e negativos, o zero é “neutro”, pois não é positivo, nem negativo. Mas se pensarmos em pares e ímpares, o zero é par.
A: [mudo]
E: Bom, para você, qual a maneira mais fácil de representar um conjunto? Por extensão ou por compreensão?
A: Dessa forma.
E: Por extensão. E se eu pedir para você explicar com as tuas palavras o que representa este conjunto que eu escrevi aqui? Você saberia me dizer?
A: [...] x pertence ao conjunto Z, tal que menos três é [...], tal que menos três é [...] menor ou igual?
E: Arã.
A: Esses sinais eu confundo.
E: Menor ou igual e maior ou igual?
A: É.
E: Continuando [...]
A: [...] menor ou igual a x que é maior que dois.
E: O x é [pausa]
A: x é maior que dois.
E: Maior ou menor que dois?

A: Maior.
E: O x é maior que menos três e também é maior que dois?
A: Não. É menor que dois.
E: Ok! A questão 7 do teste era para representar na reta real os intervalos dados. Nas letras “d” e “e”, você colocou a resposta final na notação algébrica de intervalos. Porque você fez assim?
A: Porque eu sempre fiz desse jeito.
E: Mas você acha mais fácil fazer o intervalo na reta real ou escrever a notação algébrica de intervalos?
A: Eu faço o desenho para saber quais são os números, depois eu ponho ali.
E: Nas questões 9a e 10a os intervalos eram dados em notação de conjuntos. E em ambas você usou notação de intervalos na resposta. Como ficaria essa mesma resposta na notação de conjuntos?
A: x pertence aos reais, tal que menos um [...] menos um é menor ou igual a x, [...] tal que [...]
E: Quer escrever?
A: Escrevo “maior ou igual” ou coloco o sinal?
E: Já que estás escrevendo em língua corrente, escreve “maior ou igual”.
A: [...] tal que menos um é [...] maior ou igual a x [...] e o x [...] é menor que dois.
E: Certo. Mas você fez o intervalo de cima. Era esse aqui, não é?
A: Ah! É!
E: Você gosta da parte dos gráficos?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Não é difícil.
E: Você acha fácil construir gráficos.
A: Arã.
E: No exercício 11 pedia para construir gráficos daquelas funções dadas. Se a função fosse f(x)= 2x + 1, como ficaria o gráfico?
A: Do mesmo jeito que eu fiz no teste?
E: Sim.
A: [inaudível]
E: Certo. Explica com as suas palavras o que você entende por “Linguagem Matemática”.
A: Linguagem Matemática?
E: O que você acha que é?
A: Tudo que fala sobre matemática.
E: Ok! Quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever no quadro, por exemplo, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?
A: Eu sempre entendo logo. Pode ver meu caderno. Quando eu entendo não copio mais. Quando ela passa exercício eu nem copio.
E: Então você pega fácil a matéria?
A: Pego.
E: Você não tem problema com nenhum símbolo? Entende todos?
A: Não tenho problema.
E: Somente com os símbolos “maior que” e “menor que”?
A: É.
E: Você sabe o que significam, mas confunde um com o outro?
A: Arã.

E: E quando tu não entendes algo que a professora explica em aula, você faz perguntas ou fica quieto?
A: Perguntar, assim, na hora, não! Mas depois eu chego na mesa [da professora] e pergunto. Ou vejo se algum colega entendeu, daí eu pergunto pra ele [...]
E: Então está certo! Muito obrigada!

TRANSCRIÇÃO DAS ENTREVISTAS - Nível B

E: Entrevistador
A: Aluno

Aluno D:

E: O que você achou das questões do teste?
A: Ah! Achei que tava bem facinho. Deu pra entender bem [...]
E: [...] podia usar o caderno [...]
A: [...] isso ajudou muito.
E: Tem algumas coisas que você esquece quando não pode olhar no caderno?
A: É. Eu esqueço. Sou muito esquecido.
E: Você pode representar o conjunto dos números naturais pares, menores que sete?
A: menores que sete?
E: É. Os números naturais pares menores que sete.
[O aluno escreve o conjunto e mostra]
A: Aqui é quatro, tá?
E: Dois, quatro e seis. Não está faltando nenhum?
A: menor que sete?
E: É
A: Não.
E: Não? Está bem. Na questão 2 do teste você representou os pares menores que oito. Colocou o dois, o quatro e o seis. E na questão 4, você representou o conjunto dos números naturais pares, zero, dois, quatro, seis, oito, reticências. Afinal, o zero é par ou não é par?
A: Ah! Eu acho que esqueci.
E: Ok! Quando a professora pede para vocês representarem um conjunto por extensão. Você sabe o que é para fazer?
A: [...]
E: Não lembra?
A: Hum, hum.
E: E conjunto por compreensão? Também não?
A: Não.
E: Vou te um exemplo de cada. Conjunto por extensão é a representação de um conjunto, na qual listamos os seus elementos. Por exemplo, esse aqui que você fez. E no conjunto por compreensão, o conjunto será representado por meio de uma

propriedade comum aos seus elementos. Por exemplo, x pertence aos naturais, tal que x é número ímpar. Certo? Qual destas representações é mais fácil de usar?
A: Por extensão.
E: Porque?
A: Porque é mais fácil de entender. Porque tu só bota os números. Tu já vê direto os elementos.
E: Se eu pedir para você explicar com as tuas palavras o que representa este conjunto que eu escrevi aqui? Você saberia me dizer?
A: [...] x pertence ao conjunto dos números [...]
E: [...] inteiros [...]
A: [...] inteiros [...]
E: Está nervosa?
A: Arã. [...] e menos um é menor igual que x e x é menor igual que quatro.
E: Isso mesmo. Viu? Não precisa ficar nervosa! Na questão 8 do teste era para representar intervalos usando a notação de conjuntos. Você escreveu os intervalos em língua corrente. Porque? Você entendeu o que era para fazer?
A: Eu não entendi muito bem. Aí eu fiz assim.
E: E agora tu já sabes o que é para fazer ou continua sem entender?
A: Continuo sem entender.
E: Por exemplo, o intervalo da questão 9a está representado por notação de conjuntos. O que tinhas que fazer era representar os intervalos dessa forma. Então, esse aqui, como ficaria?
A: [...]
E: Ficaria assim: x pertence ao conjunto dos números reais [...]
A: [...]
E: [...] tal que [...] o x está entre quais números?
A: [...] um e três.
E: Isso. Só que o um não entra no intervalo, não é? Então o um é menor que x e o três [...]
A: [...] é maior [...]
E: [...] maior ou igual. Porque o intervalo é fechado.
A: [...] o três é maior ou igual que o x.
E: Você gosta da parte dos gráficos?
A: Acho bem legal.
E: Acha fácil?
A: Bem facinho.
E: O que te atrai nos gráficos?
A: Não sei. Acho bem legal. É facinho de fazer. A conta não é muito difícil. [A "conta" referida diz respeito ao zero da função].
E: Se a função da questão 11 do teste fosse f(x) = 2x – 4. Você saberia fazer o gráfico?
A: Posso fazer a conta?
E: Claro.
[O aluno faz o gráfico na folha e mostra à entrevistadora]
E: Certo. Quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever no quadro, por exemplo, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?
A: No início, assim, quando começou as aulas, eu não entendia muito bem. Mas com o tempo eu fui me acostumando e agora já tá mais fácil.

E: E quando tu não entendes algo que a professora explica em aula, você faz perguntas ou não és de perguntar?
A: Eu pergunto.
E: Você gosta de Matemática?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Ah! Antes eu não gostava muito porque eu achava muito complicado. Mas esse ano tá sendo bem mais fácil. Tô entendendo mais. A professora é legal, explica bem.
E: Então você gosta porque está entendendo?
A: Arã.
E: Explica com as suas palavras o que você entende por “Linguagem Matemática”.
A: Linguagem Matemática?
E: Nunca ouviu falar?
A: Ah! Eu já ouvi falar, mas não lembro [...]
E: Não tem problema. Obrigada!

Aluno E:

E: Você gosta de Matemática?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Porque é a matéria que eu me identifico mais. E as notas também são as melhores.
E: Quando tu não entendes algo que a professora explica em aula, você faz perguntas ou não és de perguntar?
A: Procuro pedir explicação.
E: Explica com as tuas palavras o que você entende por “Linguagem Matemática”.
A: Linguagem Matemática?
E: Sim.
A: Identifico como o estudo das [...] contas.
E: Certo. E quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever no quadro, por exemplo, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?
A: Eu entendo.
E: Entende de imediato?
A: Arã.
E: O que você achou das questões do teste?
A: Fácil.
E: Ok! Você pode representar o conjunto vazio para mim?
A: Conjunto vazio?
E: Arã. [pausa]
[O aluno escreve na folha em branco e mostra à entrevistadora]
E: Pode ser assim ou assim?
A: [inaudível]
E: O que é isso aqui no meio?
A: [...] Não precisava.
E: No teste você representou os dois, um dentro do outro, não é?
A: Os dois juntos.

E: Foi engano ou querias fazer assim mesmo?
A: Me enganei.
E: Certo. Agora, você pode representar o conjunto dos números naturais pares menores que sete?
A: Números pares menores que sete?
E: Arã.
A: Representar x pertence [...]
E: Como você achar melhor.
A: Números pares, né?
E: É. [pausa]
[O aluno mostra o conjunto que representou na folha]
E: Tem mais algum?
A: Só estes. Pares, só estes, [...] menores que sete.
E: Certo. Mas e o zero? Não é par?
A: [...]
E: Está faltando o zero, não é?
A: [...]
E: Você sabe o que é a representação de um conjunto por extensão ou por compreensão?
A: Não.
E: Não lembra?
A: Não me lembro.
E: A professora falou nisso em aula?
A: Não me lembro.
E: Tudo bem! Vou te dar um exemplo de cada. Conjunto por extensão é a representação de um conjunto, na qual listamos os seus elementos. Por exemplo, esse aqui. E no conjunto por compreensão, o conjunto será representado por meio de uma propriedade comum aos seus elementos. Por exemplo, x pertence aos naturais, tal que x é número ímpar. Lembrou?
A: Arã.
E: Bom, para você, qual a maneira mais fácil de representar um conjunto? Por extensão ou por compreensão?
A: Por extensão.
E: Porque?
A: Não sei. Parece que complica vendo o tamanho da coisa.
E: E se eu pedir para você explicar com as tuas palavras o que representa este conjunto que eu escrevi aqui? Você saberia me dizer?
A: [...] x pertence ao conjunto Z, tal que x tem que ser menor ou igual que menos dois, ou maior que dois.
E: Ok! Na questão 6 do teste, você representou o conjunto formado pelos números 1, 2, 3 e 4 dessa forma. Você pode me explicar o que quer dizer isso aqui?
A: Deixa eu ver [...] x pertence aos naturais, tal que um tem que ser maior [...]
E: [...] maior que o x? Tem certeza?
A: [...] maior que x, e o quatro tem que ser [...] menor [...] menor que quatro.
E: Então x vai ser [...]
A: [...] menor ou igual a quatro.
E: De acordo com o que você disse x é menor que um e menor ou igual a quatro. É isso?
A: Isso. [...] [inaudível]
E: Menor ou igual, ou maior ou igual?

A: Maior ou igual.
E: Ah! Então o x é maior ou igual a um. Nesse caso, tem algo errado com estes símbolos aqui, não é?
A: [...] tá virado.
E: Qual deles?
A: Esse.
E: Então x é maior ou igual a um e menor ou igual a quatro.
A: Daí estaria certo.
E: Na questão 8, pedia para escrever intervalos usando notação de conjuntos. E você usou as notações de intervalos. Porque? Você entendeu o que era para fazer?
A: Não entendi o que era para fazer.
E: Ok! Você gosta da parte relativa aos gráficos de funções?
A: Não muito.
E: Porque?
A: Acho fácil. Só que não gosto de desenhar os gráficos.
E: E se eu pedir para você fazer o gráfico da função $f(x) = 2x - 6$, você acha que consegue fazer?
A: Consigo.
[O aluno constrói o gráfico na folha e mostra à entrevistadora].
A: Não sei se eu não to confundindo os gráficos.
E: Não. Está correto.
E: Ok! Muito Obrigada!

Aluno F:

E: O que você achou das questões do teste?
A: Ah! Algumas eu achei fácil. Outras, não difíceis, mas eu não tava me lembrando ou não entendi direito.
E: E o caderno ajudou?
A: Ajudou! Ajudou bastante. Só que tinha coisa que eu não tinha, entendeu? Porque eu cheguei, assim, meio que depois, aí tinha coisa que eu não tinha.
E: Você não teve aula com esta professora desde o início do ano?
A: Não. Não tive.
E: Você veio de outra escola?
A: É. Eu vim de outra escola.
E: E na outra escola você não estava vendo o mesmo conteúdo?
A: Eu tive só conjuntos. Quando eu cheguei aqui, ela já tava nos gráficos. Daí ela já tava com uma coisa mais avançada, né? Aí fui pegando.
E: Arã. Na questão 3 do teste, você respondeu “que o número dois pertence ao grupo dos reais”. O que é grupo para você?
A: Grupo é [...] um conjunto!
E: É o mesmo que conjunto? Ok! O que você entende por “conjunto por extensão” ou “conjunto por compreensão”?
A: Conjunto por extensão?
E: É, ou por compreensão. Você sabe o que é?
A: [...] conjunto por compreensão [...] bah! É que falando assim eu não lembro.
E: Não lembra?
A: Não lembro mesmo!

E: Certo. Vou te dar exemplos. Conjunto por extensão é a representação de um conjunto, na qual listamos os seus elementos. Por exemplo, esse aqui. E no conjunto por compreensão, o conjunto será representado por meio de uma propriedade comum aos seus elementos. Por exemplo, x pertence aos naturais, tal que x é número par. Lembrou?
A: Arã.
E: Qual destas representações é mais fácil de usar?
A: O primeiro.
E: Por extensão. Porque esta forma é mais fácil?
A: Ah! Porque no segundo tu tem que saber o que é cada símbolo, os naturais, os reais. E no de cima já tá tudo escrito direitinho, o que tu vai precisar.
E: Ok! Na questão 6 do teste era para representar um conjunto formado pelos números 1, 2, 3 e 4. Você representou dessa forma aqui. Você pode me dizer o que representa este conjunto?
A: Bom [...] assim, o que eu me lembro, [...] é que a professora tinha falado, se eu não me engano, que os naturais não tem negativos [...] é isso que me lembro [...]
E: Arã.
A: [...] daí eu coloquei maior igual que um e maior igual que quatro.
E: Então x é [...]
A: [...] menor igual que quatro.
E: x é maior ou igual a um? E esse sinal aqui é o maior ou igual?
A: Maior igual. E o do quatro é menor igual.
E: Então o x é maior ou igual a um?
A: Arã.
E: E o símbolo do maior ou igual não seria assim?
A: [...] pode ser
E: Quando você não entende algo que a professora explica em aula, você faz perguntas para ela?
A: Eu pergunto.
E: Normalmente você pergunta para professora ou para os colegas?
A: Pra professora.
E: Ok! Teve alguma questão do teste que você não sabia o que era para fazer?
A: Ai teve!
E: Na questão 8 você escreveu "não sei". Você não sabia fazer ou não entendeu o que era para fazer?
A: Não entendi.
E: Você não sabia o que era notação de conjuntos? É isso?
[O aluno balança a cabeça afirmativamente]
E: Certo. Quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?
A: Eu não entendo tudo, né? Aí depois eu pergunto e vou entendendo.
E: Explica com as suas palavras o que você entende por "Linguagem Matemática".
A: Linguagem Matemática?
E: É.
A: [...]
E: Se você souber.
A: [...]
E: O que você acha que é?
A: [...] o que eu acho que é?
E: Sim.

A: Sei lá! Escrever com números. Não sei.
E: Você gosta da parte relativa aos gráficos de funções?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Porque eu acho legal fazer as coisinhas e juntar.
E: É fácil?
A: Eu acho que sim.
E: Se a função do exercício 11 do teste fosse f(x) = 2x + 6, como ficaria o gráfico?
[O aluno constrói o gráfico e mostra à entrevistadora]
A: Não ficou direitinho porque eu tô acostumado a fazer com régua.
E: Não faz mal. É só para ter uma idéia. Ok! Você gosta de Matemática?
A: Eu gosto. Só que tem umas coisas difícil. Mas eu gosto. Tipo a parte de gráficos, eu gosto bastante!
E: Algumas coisas você gosta e outras não?
A: É. Outras são meio difícil.
E: Ok! Obrigada!

TRANSCRIÇÃO DAS ENTREVISTAS - Nível C

E: Entrevistador
A: Aluno

Aluno G:

E: Quando você não entende algo que a professora explica em aula, você faz perguntas ou não és de perguntar?
A: Ah! Eu tenho vergonha de perguntar.
E: E como você faz? Fica sem entender? Pergunta para algum colega?
A: Não. Se ela escrever no quadro eu até entendo, só que daí na hora de resolver o exercício eu tenho uma certa dificuldade. Daí eu chamo ela na minha mesa e pergunto.
E: O que você achou das questões do teste?
A: Tava boa as pergunta.
E: Estava fácil ou difícil?
A: Tava mais ou menos. Tem coisa que eu acho que vi, mas eu não tava lembrada.
E: Na questão 1 do teste você escreveu o significado dos conjuntos em língua corrente. Você entendeu o que era para fazer?
A: Não. Não entendi.
E: Você pode representar o conjunto dos números naturais pares?
A: Todos?
E: Todos. Como se faz para indicar que um conjunto é infinito?
A: Ai! [...]
E: Quando o conjunto continua como se representa?
A: Ah, tá! A gente coloca três pontinhos.
E: Certo. Não está faltando nenhum número no teu conjunto?

A: Ah! Vários [....]
E: Certo, a reticências indica que existem infinitos elementos. Mas eu digo além desses que você escreveu, não falta nenhum?
A: [...]
E: O zero não é par?
A: Ah, é! Falta o zero!
E: O que você entende por “conjunto por extensão” e “conjunto por compreensão”?
A: Não sei.
E: Não lembra?
A: Não lembro.
E: Vou te dar um exemplo de cada. Conjunto por extensão é a representação de um conjunto, na qual listamos os seus elementos. Por exemplo, esse aqui. E no conjunto por compreensão, o conjunto será representado por meio de uma propriedade comum aos seus elementos. Por exemplo, x pertence aos naturais, tal que x é número primo. Lembrou?
A: Arã.
E: Qual destas representações é mais fácil de usar?
A: Por extensão.
E: Porque?
A: Porque eu aprendi assim e é a maneira mais fácil de representar.
E: Explica com as tuas palavras o que representa esse conjunto aqui.
A: [...]
E: Se você souber.
A: [...]
E: Não sabe?
A: [...] ai!
E: Quer tentar?
A: O número x pertence aos números reais [...] tal que [...] é menor ou igual a menos um [...] e [...] menor que três.
E: Ok! Quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?
A: Não, com símbolos eu [...] entendo.
E: Nas questões 6, 7, 9a e 10a , você escreveu “não sei”. Porque? Você entendeu o que era para fazer?
A: Eu não entendi. E também não sabia fazer.
E: E na questão 7 do teste você fez alguns gráficos. Porque você fez gráficos? O que eles representam?
A: Porque eu não sabia o que era reta real.
E: Não lembrava o que é reta real?
A: É. Não lembrava o que era.
E: Na questão 8 do teste, pedia para escrever intervalos usando notação de conjuntos. Você usou notação de intervalos. Porque?
A: Eu não sabia fazer.
E: Você gosta da parte relativa aos gráficos de funções?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Porque eu acho fácil de fazer.
E: Se a função do exercício 11 do teste fosse $f(x) = 2x - 8$, como ficaria o gráfico? Você sabe fazer?
A: Sei.

E: Pode fazer aqui?
A: Posso.
[O aluno constrói o gráfico e mostra à entrevistadora]
E: Certo. Você gosta de Matemática?
A: Mais ou menos. Não é tudo que eu gosto. Porque tem coisas que são mais fáceis e tem coisas que são bem difíceis.
E: Então está certo. Obrigada!

Aluno H:

E: Você gosta de Matemática?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Agora nesse ano. Porque tá um pouco mais fácil. A professora explica bem. E agora tô gostando um pouco mais.
E: Quando você não entende algo que a professora explica em aula, você faz perguntas para ela?
A: Não. Fico quieto.
E: Pergunta para os colegas ou não pergunta para ninguém?
A: Pergunto pros meus colegas.
E: O que você achou das questões do teste?
A: Ah! Acho que eu não consegui responder nada.
E: Você achou difícil?
A: Achei.
E: Na questão 2a era pedido a união dos conjuntos A e B. Você respondeu que a união dos conjuntos A e B é o conjunto que tem os elementos: zero, um, dois, três, quatro, seis, quatro e dois. Porque você repetiu os elementos dois e quatro?
A: Ah! [...] A sora falou que dava pra repetir [inaudível]
E: Como? Não entendi o que você disse?
A: Dá pra repetir, mas se quiser.
E: A professora disse que podia repetir os elementos? Que não faz mal?
A: É.
E: Houve alguma questão em que você não entendeu o que era para fazer?
A: [...] acho que essa [Aponta para uma questão do teste]
E: Essa você não fez porque não entendeu o que era para fazer?
A: É.
E: Você pode representar o conjunto dos números naturais pares?
A: [...]
E: Representa como você quiser [...]
[O aluno escreve na folha e mostra à entrevistadora]
E: O dois, o quatro, o seis, ok! Quando o conjunto não acaba, colocamos [...]
A: [...] três pontinhos.
E: Isso. E como é um conjunto temos que colocar chaves no início e no final, certo?
A: [...]
E: Não está faltando nenhum elemento nesse conjunto?
A: [...]
E: O zero não é par?
A: Ah! [...]

E: Quando a professora fala em “conjunto por extensão” e “conjunto por compreensão”, você sabe o que é?
A: [...] Não.
E: Nenhum dos dois?
A: Não.
E: Tudo bem! Vou te dar um exemplo de cada. Conjunto por extensão é a representação de um conjunto, na qual listamos os seus elementos. Por exemplo, esse aqui. E no conjunto por compreensão, o conjunto será representado por meio de uma propriedade comum aos seus elementos. Por exemplo, x pertence aos naturais, tal que x é número par. Bom, para você, qual a maneira mais fácil de representar um conjunto? Por extensão ou por compreensão?
A: O primeiro.
E: Por extensão. Porque?
A: Porque já tem ali [...]
E: Nas questões 5 e 9a , você escreveu “não sei”. Porque? Você entendeu o que era para fazer?
A: Na verdade eu nunca sei quando é assim ó [...]
E: [...] maior ou igual, ou menor ou igual. Ok! Na questão 8 do teste, pedia para escrever intervalos usando notação de conjuntos. Você usou notação de intervalos. Porque? Você não viu ou não sabia o que é notação de conjuntos?
A: Não sabia, né?!
E: Não sabia fazer a notação de conjuntos?
A: Não.
E: A questão 7 do teste pedia para representar os intervalos na reta real, e em seguida eram dados os intervalos a serem representados. Nos últimos dois itens (letra d e letra e), você representou a resposta com notação algébrica de intervalos. Porque?
A: Ah! Eu pensei que era assim! Acho que não me dei conta.
E: Quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?
A: Eu sempre olho no caderno.
E: Certo. E você gosta da parte relativa aos gráficos de funções?
A: Quando eu sei, eu gosto.
E: Então está certo. Obrigada!

Aluno I:

E: Você gosta de Matemática?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Porque eu gosto de cálculos. Eu gosto. Me entendo bem.
E: Acha fácil?
A: Acho fácil.
E: Quando você não entende algo que a professora explica em aula, você faz perguntas ou não és de perguntar?
A: Não sou de perguntar muito.
E: E como você faz para solucionar as tuas dúvidas?
A: Eu pergunto pros colegas.

E: Nem individualmente você pergunta para professora?
A: Se ela vem na minha classe aí eu pergunto.
E: Você tem vergonha de perguntar na frente de todo mundo, é isso?
A: É.
E: Quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?
A: Na maioria das vezes eu entendo.
E: O que você achou das questões do teste?
A: Achei [...] fácil.
E: Explica com as suas palavras o que você entende por “Linguagem Matemática”.
A: Ah! Não sei explicar!
E: O que você acha que é?
A: Não sei.
E: Quais são os números naturais pares?
A: zero, dois, quatro, seis, oito e aí vai.
E: Na questão 3 do teste você escreveu “dois é um número real comum”. O que é um número comum?
A: É [...] Seriam todos comuns.
E: Quando a professora pede para representar um conjunto por extensão, você sabe o que é para fazer?
A: Não.
E: Não lembra?
A: Não me lembro.
E: Conjunto por extensão é a representação de um conjunto, na qual listamos os seus elementos, como esse aqui. E no conjunto por compreensão, o conjunto será representado por meio de uma propriedade comum aos seus elementos. Por exemplo, x pertence aos naturais, tal que x é maior que dois. Qual destas representações é mais fácil de usar?
A: Eu acho mais fácil a de cima [...]
E: Por extensão?
A: É.
E: Porque?
A: Ah! Porque tu não precisa tá botando x, naturais, pertence, [...]
E: Porque não precisa usar símbolos?
A: Arã.
E: Você acha complicado representar um conjunto por compreensão?
A: Não. Não acho difícil. Só acho mais fácil o outro.
E: E se eu pedir para você explicar com as tuas palavras o que representa este conjunto que eu escrevi aqui? Você saberia me dizer?
A: Eu acho que sim.
E: Esse aqui.
A: x pertence aos naturais, [...] não! Calma aí! x pertence aos inteiros, [...] aí eu não me lembro [...]
E: tal que [..]
A: [...] tal que menos dois é menor do que x, igual ou menor do que x e um é maior do que x.
E: Certo. Na questão 6 do teste, você representou o conjunto formado pelos números 1, 2, 3 e 4 dessa forma. Você pode me explicar o que quer dizer isso aqui?
A: x pertence aos naturais, tal que um é menor do que x, [...] não! [...] tal que um é igual ou menor que x e tal que quatro é igual ou maior do que x.

E: Ok! Você disse que um é menor ou igual a x, mas esse símbolo é o menor ou igual?
A: Tá ao contrário. Agora que eu vi.
E: O que é isso aqui? É um conjunto? É um intervalo? O que é?
A: Eu acho que é um intervalo.
E: É um intervalo?
A: É.
E: Que números estão contidos nesse intervalo?
A: menos um, zero e um.
E: E usamos chaves para representar intervalos?
A: Aí eu não me lembro.
E: Houve alguma questão em que você não entendeu o que era para fazer?
A: Não me lembro. Se teve alguma, acho que essas daqui eu não lembrava direito. [O aluno aponta para algumas questões no teste]
E: Certo. Você precisou olhar o caderno?
A: É.
E: Você gosta da parte relativa aos gráficos?
A: Gosto.
E: Porque?
A: Porque não são tão difíceis. E tem que desenhar, e eu gosto de desenhar.
E: Você pode fazer o gráfico da função f(x) = 2x + 2? Sabe fazer?
A: Só o gráfico ou fazer o cálculo também?
E: Acho que você precisa fazer o cálculo do zero da função para fazer o gráfico, não é?
A: [...]
[O aluno constrói o gráfico na folha e mostra à entrevistadora].
E: Certo. Obrigada!

APÊNDICE E – ROTEIRO GERAL DAS ENTREVISTAS

ROTEIRO GERAL DA ENTREVISTA

1) Você gosta de Matemática? Por quê?

2) O que você achou das questões do teste?

3) O que você entende por "conjunto por extensão" e "conjunto por compreensão"?

4) Para você qual é a maneira mais fácil de representar um conjunto, por extensão ou por compreensão? Por quê?

5) Explica com as tuas palavras o que representa o conjunto $\{x \in Z / -2 \leq x < 1\}$.

6) Você gosta da parte relativa aos gráficos de funções? Por quê?

7) Se a função do exercício 11 do teste fosse $f(x) = 2x + 1$, como ficaria o gráfico?

8) Explique com as suas palavras o que você entende por "Linguagem Matemática".

9) Quando você não entende algo que a professora explica em aula, você faz perguntas para ela?

10) Quando a professora utiliza símbolos matemáticos para escrever, você entende ou precisa pedir ajuda de alguém para entender?